
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

CH. STURM

**Démonstration de deux théorèmes de géométrie, énoncés à
la page 248 du XIII.e volume des Annales**

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 14 (1823-1824), p. 17-23

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1823-1824__14__17_0

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1823-1824, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

*Démonstration de deux théorèmes de géométrie, énoncés
à la page 248 du XIII.^e volume des Annales ;*

Par M. CH. STURM.

THÉORÈMES. Soit une lemniscate, lieu géométrique des pieds des perpendiculaires abaissées du centre d'une hyperbole équilatère dont les diamètres principaux sont égaux à $2a$ sur les tangentes à la courbe. Sur l'axe transverse de cette hyperbole comme grand axe soit décrite une ellipse dont le petit axe soit égal à la distance entre ses foyers.

Désignons par D l'excès fini de l'asymptote infinie de l'hyperbole, comptée du centre, sur le quart infini de cette courbe, c'est-à-dire, sur la moitié de l'une de ses branches, comptée de son sommet. Soient en outre q le quart du périmètre de la lemniscate et Q le quart du périmètre de l'ellipse ; on aura

$$1.^{\circ} \quad D+q=Q\sqrt{2}, \quad 2.^{\circ} \quad Dq=\frac{\pi}{4}a^2.$$

Démonstration. En représentant par a et b les deux demi-diamètres principaux d'une hyperbole, son équation est

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1; \quad (1)$$

l'équation de sa tangente en un point (x', y') , pris sur la courbe, est

$$\frac{xx'}{a^2} - \frac{yy'}{b^2} = 1; \quad (2)$$

équation dans laquelle x' et y' sont liées par la condition

$$\left(\frac{x'}{a}\right)^2 - \left(\frac{y'}{b}\right)^2 = 1. \quad (3)$$

L'équation de la perpendiculaire menée du centre sur cette tangente est

$$a^2xy' + b^2yx' = 0. \quad (4)$$

Son pied étant donné par le système des équations (2, 4), dans lesquelles x' et y' sont liées par la relation (3); il s'ensuit qu'en éliminant x' , y' entre ces trois équations, l'équation résultante en x et y sera celle du lieu des pieds de toutes les perpendiculaires menées du centre de la courbe sur ces tangentes.

Or, on tire des équations (2 et 4)

$$\frac{x'}{a} = + \frac{ax}{x^2 + y^2}, \quad \frac{y'}{b} = - \frac{by}{x^2 + y^2},$$

valeurs qui, substituées dans l'équation (3), donnent pour celle du lieu cherché

$$a^2x^2 - b^2y^2 = (x^2 + y^2)^2;$$

c'est l'équation générale de la lemniscate.

Pour passer à son équation polaire, nous poserons

$$x = l \cos u, \quad y = l \sin u,$$

et cette équation polaire sera ainsi

$$l^2 = a^2 \cos^2 u - b^2 \sin^2 u.$$

Quant à l'hyperbole, en appelant h son rayon vecteur répondant à l'angle u , son équation deviendra

$$h^2 (b^2 \cos^2 u - a^2 \sin^2 u) = a^2 b^2.$$

Mais, dans le cas particulier qui nous occupe, et où il s'agit d'une hyperbole équilatère, on a $b = a$; en sorte que l'équation polaire de l'hyperbole devient simplement

$$a^2 = h^2 \cos 2u, \quad (5)$$

et celle de la lemniscate

$$l^2 = a^2 \cos 2u; \quad (6)$$

d'où résulte, entre les longueurs des rayons vecteurs correspondans des deux courbes l'équation de relation

$$lh = a^2 .$$

On peut déduire de ces équations une construction simultanée des deux courbes.

Sur le demi-axe transverse CA (fig. 6) soit décrite une circonférence, à laquelle soit menée la tangente AD. Soient menées arbitrairement, par le centre, les deux droites CE, CE' faisant des angles égaux avec CA, et coupant le cercle en F et F'. Soit pris l'arc FG=FA, et soit portée la corde CG de C en K. Soit élevée à CA la perpendiculaire KM rencontrant la circonférence en M et soit menée CM, coupant AD en N. Si alors du point C comme centre commun, et avec CM et CN pour rayon, on décrit deux cercles concentriques, le plus grand coupera nos arbitraires en quatre points H, H', H'', H''', qui appartiendront à l'hyperbole, et le plus petit coupera ces mêmes droites en quatre autres points L, L', L'', L''', qui appartiendront à la lemniscate.

En effet, 1.° en abaissant la perpendiculaire GP sur le diamètre, on aura

$$\overline{CH}^2 = \overline{CN}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{AN}^2 = \overline{CA}^2 + \left(\frac{CA \cdot KM}{CK} \right)^2 = \overline{CA}^2 \cdot \frac{\overline{CK}^2 + \overline{KM}^2}{\overline{CK}^2} = \overline{CA}^2 \cdot \frac{\overline{CM}^2}{\overline{CK}^2},$$

ou bien

$$\overline{CH}^2 = \overline{CA}^2 \cdot \frac{\overline{CM}^2}{\overline{CG}^2} = \overline{CA}^2 \cdot \frac{CK}{CP} = \overline{CA}^2 \cdot \frac{CG}{CP};$$

c'est-à-dire,

$$z^2 = a^2 \sec. 2u, \quad \text{ou} \quad a^2 = z^2 \cos. 2u .$$

On aura, 2.°

$$\overline{CL}^2 = \overline{CM}^2 = \overline{CA}^2 \cdot \frac{\overline{CK}^2}{\overline{CM}^2} = \overline{CA}^2 \cdot \frac{\overline{CG}^2}{\overline{CM}^2} = \overline{CA}^2 \cdot \frac{CP}{CK} = \overline{CA}^2 \cdot \frac{CP}{CG};$$

c'est-à-dire,

$$l^2 = a^2 \cos. 2u .$$

Si l'hyperbole était déjà tracée, la construction de la lemniscate deviendrait beaucoup plus facile; H étant le point où cette hyperbole serait coupée par l'arbitraire CE, l'arc HN, décrit du point C comme centre, déterminerait le point N de AD; la droite CN déterminerait le point M de la circonférence; et enfin l'arc ML, décrit encore du point C comme centre, déterminerait le point L de la lemniscate.

On tire des équations (5, 6)

$$du = + \frac{a^2 dh}{h \sqrt{h^4 - a^4}}, \quad du = - \frac{l dl}{\sqrt{a^4 - l^4}},$$

en observant que, pour la dernière courbe, le rayon vecteur décroît lorsque u augmente. Mais on sait que s étant l'arc d'une courbe dont le rayon vecteur r fait un angle u avec l'axe, on a

$$s = \int \sqrt{dr^2 + r^2 du^2};$$

donc, en représentant respectivement par H, L les arcs de nos deux courbes, nous aurons

$$H = \int \frac{h^2 dh}{\sqrt{h^4 - a^4}}, \quad L = \int - \frac{a^2 dl}{\sqrt{a^4 - l^4}},$$

les arcs étant comptés à partir du sommet de l'hyperbole. Mais, à cause de la relation trouvée ci-dessus, $lh = a^2$, on peut exprimer H en l , et il vient ainsi

$$H = \int - \frac{a^4 dl}{l^2 \sqrt{a^4 - l^4}} = \frac{\sqrt{a^4 - l^4}}{l} + \int \frac{l^2 dl}{\sqrt{a^4 - l^4}}.$$

Remarquons présentement que l'excès de l'asymptote de l'hyperbole sur le quart de cette courbe n'est autre chose que ce que devient l'excès $h - H$ ou $\frac{a^2}{l} - H$ du rayon vecteur sur l'arc correspondant, compté depuis le sommet, lorsque ce rayon vecteur devient infini, ou, ce qui revient au même, lorsque $l = 0$, d'où il suit qu'on doit avoir

$$D = \frac{a^2}{h} - \frac{\sqrt{a^4 - l^4}}{l} - \int \frac{l^2 dl}{\sqrt{a^4 - l^4}}. \quad \left[\begin{matrix} l=a \\ l=0 \end{matrix} \right]$$

RÉSOLUES.

217

Or, en remarquant que $\frac{a^2}{l} - \frac{\sqrt{a^4-l^4}}{l} = \frac{a^2}{l} \left\{ 1 - \sqrt{1 - \frac{l^4}{a^4}} \right\}$, on voit que la quantité qui précède le signe \int s'évanouit aux deux limites, de sorte qu'on a simplement

$$D = \int - \frac{l^2 dl}{\sqrt{a^4-l^4}} \cdot \quad \left[\begin{matrix} l=a \\ l=0 \end{matrix} \right],$$

On aura de même, pour le quart de la lemniscate,

$$q = \int - \frac{a^2 dl}{\sqrt{a^4-l^4}}; \quad \left[\begin{matrix} l=a \\ l=0 \end{matrix} \right]$$

en intervertissant donc l'ordre des limites, on trouvera

$$D+q = \int \left\{ \frac{l^2}{\sqrt{a^4-l^4}} + \frac{a^2}{\sqrt{a^4-l^4}} \right\} dl = \int dl \sqrt{\frac{a^2+l^2}{a^2-l^2}} \cdot \quad \left[\begin{matrix} l=0 \\ l=a \end{matrix} \right]$$

Concevons présentement que, sur l'axe transverse de notre hyperbole, comme petit axe, on décrive une ellipse dont le grand axe soit $a\sqrt{2}$, en représentant par l l'abscisse de la courbe répondant à l'ordonnée y , son équation sera

$$2l^2 + y^2 = 2a^2,$$

d'où on tirera

$$dy = -\sqrt{2} \cdot \frac{l dl}{\sqrt{a^2-l^2}},$$

en conséquence, l'arc d'ellipse qui a pour expression $\int \sqrt{dl^2 + dy^2}$, sera

$$\int dl \sqrt{\frac{a^2+l^2}{a^2-l^2}};$$

et, pour avoir le quart du périmètre de la courbe, il faudra prendre cette intégrale entre les limites 0 et a ; représentant donc cette longueur par Q' , on aura

$$Q' = \int dl \sqrt{\frac{a^2+l^2}{a^2-l^2}}; \quad \left[\begin{matrix} l=0 \\ l=a \end{matrix} \right]$$

et par suite

$$D+q = Q'.$$

Mais, si l'on conçoit une ellipse qui ait l'axe transverse de l'hyperbole pour grand axe, et dont le petit axe soit égal à la distance entre ses foyers, son équation sera

$$l^2 + 2y^2 = a^2,$$

elle sera donc semblable à la précédente, et le rapport de leurs lignes homologues sera celui de $\sqrt{2}$ à 1; en représentant donc par Q le quart du périmètre de cette nouvelle courbe, on aura

$$Q' = Q\sqrt{2},$$

et, par suite,

$$D + q = Q\sqrt{2},$$

ce qui démontre déjà la première partie du théorème.

Présentement, dans la théorie des intégrales définies de la forme $\int x^{m-1} dx (1-x^n)^{\frac{p-n}{n}}$ donnée par Euler (*), on rencontre l'équation suivante

(*) Voyez le *Traité des différences et des séries* de M. LACROIX, dernière édition, page 426. On parviendrait également au but à l'aide des formules de la page 430 du même ouvrage, en y faisant $n=4$.

Le même résultat se présente aussi à la page 413 de ce traité; mais il nous a paru que la démonstration n'était point exacte.

On sait que

$$\int \frac{x^{2r} dx}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \int \frac{x^{2r+1} dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2r+1} \cdot \frac{\pi}{2}, \quad \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array} \right]$$

du moins en supposant r entier et positif. Si donc l'on pose $x=z^n$, n étant supposé positif, auquel cas les limites de z seront les mêmes que celles de x , on aura

$$n^2 \int \frac{z^{2rn+n-1} dz}{\sqrt{1-z^{2n}}} \cdot \int \frac{z^{2rn+n-1} dz}{\sqrt{1-z^{2n}}} = \frac{1}{2r+1} \cdot \frac{\pi}{2} \quad \left[\begin{array}{l} z=0 \\ z=1 \end{array} \right]$$

d'où, en posant $2rn+n-1=p$, il viendra

$$\int \frac{x^{m+1} dx}{\sqrt{1-x^n}} \cdot \int \frac{x^{n-m-1} dx}{\sqrt{1-x^n}} = \frac{2\pi \text{Cot.} \frac{m\pi}{n}}{n(n-2m)}, \quad \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array} \right]$$

en faisant donc $m=1$, $n=4$, $x = \frac{l}{a}$, on obtiendra

$$\int \frac{a^2 dl}{\sqrt{a^4-l^4}} \cdot \int \frac{l^2 dl}{\sqrt{a^4-l^4}} = \frac{\pi a^2}{4}, \quad \left[\begin{array}{l} l=0 \\ l=a \end{array} \right]$$

donc

$$qD = \frac{\pi a^2}{4},$$

deuxième partie du théorème (*).

Genève, le 15 avril 1823.

$$\int \frac{z^p dz}{\sqrt{1-z^{2n}}} \cdot \int \frac{z^{p+nd} dz}{\sqrt{1-z^{2n}}} = \frac{1}{n(p+1)} \cdot \frac{\pi}{2}; \quad \left[\begin{array}{l} z=0 \\ z=1 \end{array} \right]$$

mais il faut observer que p n'est point ici un nombre tout-à-fait arbitraire, à cause de l'équation $2rn+n-1=p$, dans laquelle r et n sont nécessairement des nombres positifs, et où r est un nombre entier. Si, par exemple, pour obtenir le produit

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} \cdot \int \frac{z^2 dz}{\sqrt{1-z^4}},$$

on voulait faire $p=0$ et $n=2$, il s'ensuivrait $4r+1=0$, ou $r=-\frac{1}{4}$, ce qu'on ne peut admettre; il faut donc chercher ce produit par une autre voie.

(*) M. H. W. T. à qui on doit ces deux singuliers théorèmes en a donné une démonstration qui ne diffère guère de celle qu'on vient de lire qu'en ce que, dans ses calculs, il substitue l'angle u au rayon vecteur.

J. D. G.