

---

---

# ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

---

---

FRÉDÉRIC SARRUS

**Analyse transcendante. Recherches sur les intégrales définies**

*Annales de Mathématiques pures et appliquées*, tome 12 (1821-1822), p. 36-39

[http://www.numdam.org/item?id=AMPA\\_1821-1822\\_\\_12\\_\\_36\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1821-1822__12__36_0)

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1821-1822, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---



---

## ANALISE TRANSCENDANTE.

*Recherches sur les intégrales définies ;*

Par M. FRÉDÉRIC SARRUS, docteur ès sciences.



### I. L'INTÉGRALE

$$\int e^{-x} x^a dx ,$$

prise depuis  $x=0$  jusqu'à  $x=\frac{1}{p}$ , se réduit à une fonction de  $a$  seul ; de sorte qu'en convenant de représenter cette fonction par  $a!$ , on a

$$\int e^{-x} x^a dx = a! \left[ \begin{array}{c} x=0 \\ x=\frac{1}{p} \end{array} \right] :$$

Faisant  $x=mx'$ ,  $m$  étant une quantité positive quelconque, mais indépendante de  $x'$ , on aura, en substituant, après avoir effacé les accents,

$$\int e^{-mx'} x'^a dx = a! m^{-(a+1)} \left[ \begin{array}{c} x=0 \\ x=\frac{1}{p} \end{array} \right] ; \quad (1)$$

d'où, en différentiant par rapport à  $m$ , et faisant ensuite  $m=1$  ;

$$\int e^{-mz} z^{a+1} dz = a!(a+1) ;$$

donc, suivant notre notation,

$$(a+1)! = a!(a+1) ; \quad (2)$$

or  $0! = 1$  ; donc

$$1! = 1.1, \quad 2! = 1.1.2, \quad 3! = 1.1.2.3, \dots, \quad n! = 1.2.3\dots n ;$$

En multipliant les deux membres de l'équation (1) par  $e^{-m} m^{(a+b+1)} dm$ , et intégrant depuis  $m=0$  jusqu'à  $m=\frac{1}{1+z}$ , on trouve

$$\iint e^{-m(1+z)} m^{a+b+1} z^a dm dz = a!b! ;$$

or, d'après l'équation (1), l'on a, entre les limites désignées ;

$$\int e^{-m(1+z)} m^{a+b+1} dm = (a+b+1)! \frac{1}{(1+z)^{a+b+2}} ;$$

donc

$$\int \frac{z^a dz}{(1+z)^{a+b+2}} = \frac{a!b!}{(a+b+1)!} \left[ \begin{array}{l} z=0 \\ z=\frac{1}{1+z} \end{array} \right] . \quad (3)$$

Si l'on pose  $e^{-z} = x$ , on trouvera

$$a! = \int \left( 1 - \frac{1}{x} \right)^a dx \left[ \begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array} \right] ;$$

Si l'on pose, au contraire,  $z = \frac{x}{1-x}$ , on trouvera

$$\frac{z^a dz}{(1+z)^{a+b+2}} = x^a (1-x)^b dx ;$$

d'où

$$\int x^a(1-x)^b dx = \frac{a!b!}{(a+b+1)!} \left[ \begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array} \right];$$

ce qui établit entre les intégrales Eulériennes une relation très-remarquable, déjà connue depuis long-temps. Nous ne discuterons pas les cas particuliers que présente l'équation (3). On peut les voir dans les *Exercices de calcul intégral* de M. LEGENDRE.

L'on a, en mettant au lieu de  $\text{Cos. } qy$  son développement,

$$\int e^{-y} \text{Cos. } qy dy = \int e^{-y} dy \left( 1 - \frac{q^2 y^2}{2!} + \frac{q^4 y^4}{4!} - \frac{q^6 y^6}{6!} + \dots \right);$$

d'où, en intégrant depuis  $y=0$  jusqu'à  $y=\frac{1}{2}$ ,

$$\int e^{-y} \text{Cos. } qy dy = 1 - q^2 + q^4 - q^6 + \dots = \frac{1}{1+q^2}. \quad (4)$$

On trouverait de même, et entre les mêmes limites,

$$\int e^{-y} \text{Sin. } qy dy = \frac{q}{1+q^2}; \quad (5)$$

partant

$$\iint e^{-y} \text{Cos. } qy \text{Cos. } qx dy dq = \int \frac{\text{Cos. } qx dq}{1+q^2} = \frac{\pi}{2} e^{-x};$$

$$\iint e^{-y} \text{Sin. } qy \text{Sin. } qx dy dq = \int \frac{q \text{Sin. } qx dq}{1+q^2} = \frac{\pi}{2} e^{-x};$$

pourvu qu'on prenne les intégrales depuis  $y=0$  jusqu'à  $y=\frac{1}{2}$  et depuis  $q=0$  jusqu'à  $q=\frac{1}{2}$ .

Faisant, dans ces formules,  $y = my'$ ,  $q = \frac{q'}{m}$  et  $x = mx'$ ,  $m$  étant une quantité positive quelconque, mais indépendante de  $x'$ ,  $y'$ ,  $q'$ , on aura, en substituant et supprimant les accents,

$$\iint e^{-my} \text{Cos}.qy \text{Cos}.qx \, dq \, dy = \frac{\pi}{2} e^{-mx} \begin{array}{|c|c|} \hline y=0 & q=0 \\ \hline y=\frac{1}{2} & q=\frac{1}{2} \\ \hline \end{array}$$

multipliant les deux membres par  $\phi m \, dm$  et intégrant entre deux limites positives de  $m$ , mais d'ailleurs quelconques, on aura, en faisant  $Fx = \int e^{-mx} \phi m \, dm$ , et l'intégrale du second membre étant prise entre les limites désignées,

$$\iint \text{Cos}.qy \text{Cos}.qx \, Fy \, dq \, dy = \frac{\pi}{2} Fx ;$$

on trouverait de même

$$\iint \text{Sin}.qy \text{Sin}.qx \, Fy \, dq \, dy = \frac{\pi}{2} Fx ;$$

De là on déduira, comme cas particulier, le théorème de M. Fourier.

Saint-Affrique, 26 avril 1821.

---