ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

FRÉDÉRIC SARRUS

Analise transcendante. Essai sur le développement des fonctions en séries

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 12 (1821-1822), p. 289-309
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1821-1822__12__289_0>

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1821-1822, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ANALISE TRANSCENDANTE.

Essai sur le développement des fonctions en séries ;

Par M. Frédéric Sarrus, docteur ès sciences, professeur de mathématiques au collége de Pezenas.

L'essai que l'on va lire a pour but la recherche d'un procédé simple, direct, uniforme et à l'abri de toute objection, pour parvenir aux diverses formules de développement que l'on a obtenues jusqu'ici, soit par la méthode de la séparation des échelles, soit par la théorie des fonctions génératrices, ainsi qu'à une infinité d'autres formules auxquelles l'application de l'un ou de l'autre procédé ne saurait conduire. Pour atteindre ce but, je partirai des principes développés dans un mémoire sur le même sujet présenté, il y a quelques années, par M. Servois, à la classe des sciences physiques et mathématiques de l'institut, dont il obtint l'approbation, et qui a paru postérieurement dans le V.^{e} volume du présent recueil. Je rappellerai d'abord brièvement ceux des principes consignés dans ce mémoire qui peuvent être nécessaires pour l'intelligence de mes recherches, en empruntant, le plus souvent, les expressions même de l'auteur. D'autres fois, au contraire, je me permettrai de signaler, sans détour, les distractions, en petit nombre d'ailleurs, qui me paraîtront avoir échappé à cet estimable géomètre. Je procéderai ensuite à la recherche de ma formule fondamentale, dont je ferai deux applications seulement, en me bornant, pour abréger, à en indiquer plusieurs autres.

En désignant par u une fonction déterminée quelconque d'une ou de plusieurs variables indépendantes, convenons d'exprimer une dérivée déterminée de cette fonction, en écrivant, avant la lettre qui la représente, une caractéristique destinée à rappeler la liaison qui existe entre cette dérivée et la fonction primitive u. Ainsi, ∇ étant une pareille caractéristique, ∇u représentera une dérivée de u qui sera entièrement connue, lorsqu'on aura déterminé quelle est la liaison que la caractéristique ∇ indique devoir exister entre la dérivée ∇u et sa primitive u.

Nous dirons alors que u est le *sujet* de ce mode de dérivation ; et que ∇u en est le *résultat*.

Que, par exemple, on ait $u=\frac{1-x^2}{1+x^2}$; x étant une variable indépendante ; et que le mode de dérivation désigné par ∇ consiste à changer x en $\frac{a}{x}$; on aura alors $\nabla u=\frac{1-\frac{a^2}{x^2}}{1+\frac{a^2}{x^2}}=\frac{x^2-a^2}{x^2+a^2}$.

Lorsque le sujet sera une fonction déterminée ou indéterminée de plusieurs autres fonctions, nous renfermerons ce sujet entre deux parenthèses, afin d'avertir que la caractéristique ∇ porte sur sa totalité. Ainsi, $\nabla(t+u)$ exprimera la dérivée ∇ de la somme des deux fonctions t, u ; de même $\nabla(pq)$ exprimera la dérivée ∇ du produit des deux fonctions p, q ; en général $\nabla[\psi(r,s)]$ exprimera la dérivée ∇ de la fonction ψ des fonctions r, s.

Qu'on ait, par exemple, $y=\text{Log.}(1-x^2)$, $z=\text{Cos.}(1+x^2)$, et que le mode de dérivation désigné par ∇ consiste à changer x en $1-x$; on aura dans ce cas $\nabla\left(\frac{y}{z}\right)=\frac{\text{Log.}(2x-x^2)}{\text{Cos.}(2-2x+x^2)}$.

∇u, quoique résultat d'une dérivation, peut, à son tour, devenir le sujet d'une dérivation nouvelle. Soit Γ la caractéristique de cette seconde dérivation, nous représenterons son résultat par $\Gamma\nabla u$. Cette dernière dérivée peut pareillement devenir le sujet d'une troisième dérivation ; et si Λ en est la caractéristique, le symbole de son résultat sera $\Lambda\Gamma\nabla u$; et ainsi de suite, quel que soit le nombre des dérivations successives, semblables ou dissemblables, que l'on se propose d'effectuer sur la fonction u.

Que, par exemple, pour nous borner au cas le plus simple, on ait $u=\frac{a-x}{a+x}$, que le mode de dérivation désigné par ∇ consiste à changer x en $x+a$, et que le mode de dérivation désigné par Γ consiste à changer x en $\frac{x^2}{a}$; nous aurons d'abord $\nabla u=-\frac{x}{2a+x}$, et ensuite $\Gamma\nabla u=-\frac{x^2}{2a^2+x^2}$. Dans la même hypothèse, on trouverait $\nabla\Gamma u=-\frac{2ax+x^2}{2a^2+2ax+x^2}$.

On voit, d'après cela, qu'on peut souvent être conduit à des expressions de la forme

$$\nabla\nabla u\,,\quad \nabla\nabla\nabla u\,,\quad \nabla\nabla\nabla\nabla u\,,\ldots\ldots\ldots$$

et alors nous convenons, pour abréger, de considérer comme leur étant équivalentes les expressions

$$\nabla^2 u\,,\quad \nabla^3 u\,,\quad \nabla^4 u\,,\ldots\ldots\ldots$$

De même, si nous rencontrons des expressions de cette forme

$$\Gamma\nabla\Gamma\nabla u\,,\quad \Gamma\nabla\Gamma\nabla\Gamma\nabla u\,,\quad \Gamma\nabla\Gamma\nabla\Gamma\Delta\Gamma\nabla u\,,\ldots\ldots$$

nous les remplacerons par

$$(\Gamma\nabla)^2 u\,,\quad (\Gamma\nabla)^3 u\,,\quad (\Gamma\nabla)^4 u\,,\ldots\ldots\ldots$$

nous remplacerions de même les expressions

$$\Lambda\Gamma\nabla\Lambda\Gamma\nabla u\,,\quad \Lambda\Gamma\nabla\Lambda\Gamma\nabla\Lambda\Gamma\Delta u\,,$$

par

$$(\Lambda\Gamma\nabla)^2u\,,\quad (\Lambda\Gamma\nabla)^3u\,,\ldots\ldots\ldots$$

et ainsi de suite, quel que pût être d'ailleurs le nombre des caractéristiques périodiquement entremêlées.

Nous admettrons encore des symboles de dérivées de la forme

$$\nabla^{-1}u\,,\quad \nabla^{-2}u\,,\quad \nabla^{-3}u\,,\quad \nabla^{-4}u\,,\ldots\ldots$$

dont la définition générale est donnée par l'équation

$$\nabla^n\nabla^{-n}u=u\,.$$

Ce sont des dérivées *inverses* ou d'*ordre négatif*.

Si, par exemple, le mode de dérivation désigné par la caractéristique ∇ consiste à changer x en $\text{Log}.x$, le mode de dérivation désigné par la caractéristique ∇^{-1} devra consister à changer x en e^x; car on a $\text{Log}.e^x=x$. Pareillement, si le mode de dérivation désigné par la caractéristique ∇ consiste à changer x en $\text{Tang}.x$, le mode de dérivation désigné par la caractéristique ∇^{-1} devra consister à changer x en $\text{Arc}(\text{Tang}.=x)$, puisque $\text{Tang}.\text{Arc}(\text{Tang}=x)=x$; et ainsi de suite.

Si le mode de dérivation, désigné par la caractéristique ∇, est tel qu'un même résultat $\nabla^n u$ ne puisse être dérivé que d'une seule fonction primitive u, on devra alors avoir évidemment

$$\nabla^{-n}\nabla^n u=u\;;$$

mais il n'en serait plus de même si plusieurs sujets différens pouvaient conduire à un seul et même résultat. Dans ce cas, u serait bien une valeur particulière de la fonction $\nabla^{-n}\nabla^n u$; mais elle n'en serait qu'une valeur particulière.

Que, par exemple, le mode de dérivation, désigné par la caractéristique ∇, consiste à changer d'abord x en x^{n+1}, et à diviser ensuite le résultat par la fonction primitive, si l'on a $u=ax$, on aura $\nabla u=\frac{ax^{n+1}}{ax}=x^n$. Or, comme, par l'effet de ce mode de dérivation, le coefficient a disparaît, il s'ensuit que ∇u demeurerait toujours le même quand bien même u deviendrait bx, cx, dx, ... ; lors donc qu'on demandera $\nabla^{-1}\nabla u$, on pourra dire indifféremment que c'est au, bu, cu, ... (*).

De même encore, si le mode de dérivation désigné par la caractéristique ∇, consiste à prendre le cosinus de la fonction u et qu'on ait $u=2a\varpi+x$, on aura $\nabla u=\text{Cos.}x$, résultat dans lequel la constante a ne paraît plus ; de sorte que $\nabla^{-1}\nabla u$ peut être indistinctement égal à $2a\varpi+x$, $2b\varpi+x$, $2c\varpi+x$;....... pourvu toutefois que a, b, c, ... soient des nombres entiers.

Lorsque deux caractéristiques de dérivation ∇, Γ seront telles que l'on aura identiquement

$$\nabla\Gamma u=\Gamma\nabla u\,,$$

quelle que soit d'ailleurs la fonction u; nous dirons que ces caractéristiques sont *commutatives entre elles*. C'est, par exemple, ce qui arriverait, si le mode de dérivation désigné par ∇ consistait à changer x en x^m, et que le mode de dérivation désigné par Γ consistât à changer x en x^n, puisque $(x^m)^n=(x^n)^m=x^{mn}$.

Mais il n'en serait plus de même si, par exemple, le premier mode de dérivation, consistant toujours à changer x en x^m, le second consistait à changer x en $x+a$; puisque $(x+a)^m$ et x^m+a sont deux quantités généralement inégales.

(*) C'est cette considération qui nous a déterminés à ne point admettre, comme l'a fait M. Servois, dans le mémoire cité, pour la définition des dérivées d'ordre négatif, la double équation

$$\nabla^{-n}\nabla^{n}u=\nabla^{n}\nabla^{-n}u=u\,.$$

De même si, a étant un facteur constant, on avait

$$\nabla au = a\nabla u,$$

nous dirions que la caractéristique ∇ est commutative avec ce facteur. C'est, par exemple, ce qui arrivera, si le mode de dérivation désigné par ∇ consiste à substituer pour x dans u une fonction quelconque de x.

Mais si, au contraire, le mode de dérivation consistait, par exemple, à prendre le logarithme, le facteur et la caractéristique cesseraient dès-lors d'être commutatifs entre eux, puisque $a\text{Log}.u$ et $\text{Log}.au$ ne sont point la même chose.

Si trois caractéristiques Λ, Γ, ∇ sont commutatives deux à deux, c'est-à-dire, si l'on a

$$\Lambda\Gamma u=\Gamma\Lambda u, \quad \Lambda\nabla u=\nabla\Lambda u, \quad \Gamma\nabla u=\nabla\Gamma u;$$

ces trois caractéristiques seront aussi commutatives entre elles; c'est-à-dire qu'on aura

$$\Lambda\Gamma\nabla u=\Lambda\nabla\Gamma u=\Gamma\Lambda\nabla u=\Gamma\nabla\Lambda u=\nabla\Gamma\Lambda u=\nabla\Lambda\Gamma u.$$

Cela se prouve en changeant u en ∇u, dans la première des trois équations de départ, en Γu dans la seconde, en Λu dans la troisième; puis en prenant les dérivées Δ, Γ, Λ, respectivement, des deux membres des trois mêmes équations, et comparant ensuite les résultats. On a, pour la première transformation,

$$\Lambda\Gamma\nabla u=\Gamma\Lambda\nabla u, \quad \Lambda\nabla\Gamma u=\nabla\Lambda\Gamma u, \quad \Gamma\nabla\Lambda u=\nabla\Gamma\Lambda u;$$

et par la seconde

$$\nabla\Lambda\Gamma u=\nabla\Gamma\Lambda u, \quad \Gamma\Lambda\nabla u=\Gamma\nabla\Lambda u, \quad \Lambda\Gamma\nabla u=\Lambda\nabla\Lambda u;$$

ce qui établit complètement la proposition annoncée.

Si l'on avait un plus grand nombre de caractéristiques qui fussent pareillement commutatives deux à deux, on arriverait à leur égard, par des moyens analogues, à une conclusion semblable. Il en serait encore de même pour ces caractéristiques combinées avec un ou plusieurs facteurs constans, si ces caractéristiques étaient commutatives deux à deux, non seulement entre elles, mais encore avec chacun des facteurs constans.

Quelles que soient les caractéristiques Γ, ∇, l'on a identiquement

$$\Gamma u=\Gamma\nabla\nabla^{-1}u\ ;$$

si donc ces caractéristiques sont commutatives entre elles, on aura

$$\Gamma u=\nabla\Gamma\nabla^{-1}u\ ,$$

d'où l'on conclura

$$\Delta^{-1}\Gamma u=\nabla^{-1}\nabla\Gamma\nabla^{-1}u\ ;$$

d'où l'on voit, en se rappelant ce qui a été observé ci-dessus, que ce n'est qu'avec des restrictions qu'on peut admettre l'équation

$$\nabla^{-1}\Gamma u=\Gamma\nabla^{-1}u\ .\ (*)$$

Les mêmes considérations conduisent aussi à n'admettre qu'avec des restrictions l'équation

$$\nabla^{-1}\Gamma^{-1}u=\Gamma^{-1}\nabla^{-1}u\ ;$$

lorsque les caractéristiques ∇, Γ sont commutatives entre elles.

(*) Voyez, sur ce sujet, la précédente note ; nous n'ajoutons pas d'exemple, parce que nous rencontrerons plus loin un cas où cette équation ne saurait être admise.

Lorsque la caractéristique de derivation ∇ sera de telle nature qu'on aura identiquement

$$\nabla(t+u)=\nabla t+\nabla u\ ,$$

nous dirons que cette caractéristique est de nature *distributive*. C'est, par exemple, ce qui arrivera si le mode de dérivation désigné par ∇ consistait à multiplier la fonction par un multiplicateur constant, puisqu'on a $a(t+u)=at+au$. Mais il n'en serait plus de même si ce mode de dérivation consistait à élever la fonction à une puissance, puisque $(t+u)^m$ n'est pas la même chose que t^m+u^m. Nous ne considérerons désormais que des fonctions de nature distributive.

D'après cette définition, on aura

$$\nabla(p+q+r)=\nabla(p+q)+\nabla r=\nabla p+\nabla q+\nabla r\ ,$$

et, en général,

$$\nabla(p+q+r+s+\ldots\ldots\ldots)=\nabla p+\nabla q+\nabla r+\nabla s+\ldots\ldots\ldots$$

quels que soient le nombre et les signes des fonctions p, q, r, s,....

Nous disons, quels que soient les signes de ces fonctions; car, soit $\nabla(p-q)$, en posant $p-q=t$; d'où $\nabla(p-q)=\nabla t$, nous aurons $p=q+t$; d'où $\nabla p=\nabla(q+t)=\nabla q+\nabla t$; ce qui donne $\nabla t=\nabla p-\nabla q$, et par conséquent $\nabla(p-q)=\nabla p-\nabla q$.

Si, dans cette équation, on suppose $p=0$, il viendra $\nabla(-q)=-\nabla q$; d'où l'on voit que le coefficient -1 est commutatif avec toute caractéristique de nature distributive.

Dans la même hypothèse, on aura

$$\nabla^2(t+u)=\nabla(\nabla t+\nabla u)=\nabla^2 t+\nabla^2 u\ ,$$

$$\nabla^3(t+u)=\nabla(\nabla^2 t+\nabla^2 u)=\nabla^3 t+\nabla^3 u\ ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ;$$

d'où

d'où on conclura que la caractéristique ∇ étant de nature distributive, la caractéristique ∇^n, où l'on suppose n un nombre entier positif, jouit de la même propriété ; mais en serait-il de même de la caractéristique ∇^{-n} ? et, dans le cas où ce ne pourrait être qu'avec des restrictions, en quoi ces restrictions pourraient-elles consister ?

Avant de répondre à cette question, nous devons d'abord résoudre celle-ci : quelles sont les diverses valeurs de la dérivée d'ordre négatif $\nabla^{-1}p$?

Soit u une valeur particulière de cette dérivée et soit $u+t$ une autre valeur quelconque de la même dérivée, on aura, d'après l'énoncé du problème,

$$\nabla(u+t)=\nabla u=p\ ;$$

mais, en vertu de la nature distributive de la caractéristique ∇, on a

$$\nabla(u+t)=\nabla u+\nabla t\ ;$$

d'où l'on voit qu'il faut, de toute nécessité, que l'on ait

$$\nabla t=0\ ;$$

de sorte que tout se réduit à trouver les diverses valeurs de t qui satisfont à cette condition ; après quoi on aura

$$\nabla^{-1}p=u+t\ .$$

Nous appellerons *fonctions complémentaires* celles qui, comme devront être ajoutées à une valeur particulière d'une dérivée d'ordre négatif, pour en déduire les autres valeurs de la même dérivée.

Soit maintenant

$$\nabla^{-1}p+\nabla^{-1}q=u\ ;$$

prenant la dérivée ∇ des deux membres, on aura

$$p+q=\nabla u \; ,$$

d'où l'on tirera

$$\nabla^{-1}(p+q)=u+t=\nabla^{-1}p+\nabla^{-1}q+t \; ;$$

t étant une fonction complémentaire qu'il faudra déterminer de manière que cette équation ait lieu. Au reste, quelque dérivée particulière que l'on veuille choisir pour $\nabla^{-1}(p+q)$, et pour l'une des dérivées $\nabla^{-1}p$, $\nabla^{-1}q$, il sera toujours possible de prendre celle de l'autre, de telle sorte qu'il faille poser $t=0$, et que par conséquent on ait

$$\nabla^{-1}(p+q)=\nabla^{-1}p+\Delta^{-1}q \; ;$$

de sorte qu'au moyen de cette restriction on pourra regarder les caractéristiques ∇^{-1}, ∇^{-2}, ... comme étant de nature distributive; du moins si, comme nous le supposons ici, la caractéristique ∇ l'est elle même; ce qui résout la question que nous nous étions proposée.

Dans tout ce qui va suivre, nous supposerons constamment que les fonctions complémentaires sont prises de manière que les caractéristiques de dérivation inverse soient distributives.

Nous remarquerons enfin sur ce sujet que si ∇, Γ, Λ, ... sont des caractéristiques de nature distributive, on aura

$$\nabla(t+u)=\Delta t+\nabla u \; ,$$

$$\Gamma\nabla(t+u)=\Gamma(\nabla t+\nabla u)=\Gamma\nabla t+\Gamma\nabla u \; ,$$

$$\Lambda\Gamma\nabla(t+u)=\Lambda(\Gamma\nabla t+\Gamma\nabla u)=\Lambda\Gamma\nabla t+\Lambda\Gamma\nabla u \; ,$$

et ainsi de suite, quels que soient d'ailleurs la nature des fonctions t, u, et le nombre des caractéristiques ∇, Γ, Λ, ...

Ces notions préliminaires ainsi posées, soient ∇, ∇_1, ∇_2, ... Γ, Γ_1, Γ_2, ... des caractéristiques quelconques de nature distributive, et u, u_1, u_2, ...p, p_1, p_2, ... des fonctions d'une ou de plusieurs variables indépendantes, liées entre elles par les équations

$$\nabla u = p + \Gamma u_1 ,$$

$$\nabla_1 u_1 = p_1 + \Gamma_1 u_2 ,$$

$$\nabla_2 u_2 = p_2 + \Gamma_2 u_3 ,$$

et, en général,

$$\nabla_i u_i = p_i + \Gamma_i u_{i+1} ;$$

on en conclura

$$\left.\begin{array}{l} u = \nabla^{-1} p + \nabla^{-1} \Gamma u_1 , \\ u_1 = \nabla_1{}^{-1} p_1 + \nabla_1{}^{-1} \Gamma_1 u^2 , \\ u_2 = \nabla_2{}^{-1} p_2 + \nabla_2{}^{-1} \Gamma_2 u_3 , \\ \text{et, en général,} \\ u_1 = \nabla_i{}^{-1} p_i + \nabla_i{}^{-1} \Gamma_i u_{i+1} . \end{array}\right\} \quad (1)$$

pourvu que l'on prenne d'une manière convenable les dérivées négatives de leurs seconds membres.

Si l'on substitue dans la première de ces équations pour u_1 sa valeur donnée par la seconde, on aura

$$u = \nabla^{-1} p + \nabla^{-1} \Gamma \nabla_1{}^{-1} p^1 + \nabla^{-1} \Gamma \nabla_1{}^{-1} \Gamma_1 u_2 ;$$

Mettant de même dans celle-ci pour u_2 sa valeur donnée par la troisième, il viendra

$$u = \nabla^{-1} p + \nabla^{-1} \Gamma \nabla_1{}^{-1} p_1 + \nabla^{-1} \Gamma \nabla_1{}^{-1} \Gamma_1 \nabla_2{}^{-1} \Gamma_2 p_2$$
$$+ \nabla^{-1} \Gamma \nabla_1{}^{-1} \Gamma_1 \nabla_2{}^{-1} \Gamma_2 u_3 .$$

En poursuivant de la même manière, on arrivera finalement à l'équation

$$\left.\begin{aligned}
u=&\nabla^{-1}p\\
&+\nabla^{-1}\Gamma\nabla_1^{-1}p_1\\
&+\nabla^{-1}\Gamma\nabla_1^{-1}\Gamma_1\nabla_2^{-1}p_2\\
&+\nabla^{-1}\Gamma\nabla_1^{-1}\Gamma_1\nabla_2^{-1}\Gamma_2\nabla_3^{-1}p_3\\
&+\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\\
&+\nabla^{-1}\Gamma\nabla_1^{-1}\Gamma_1\nabla_2^{-1}\Gamma_2\ldots\ldots\Gamma_{i-1}\nabla_i^{-1}p_i\\
&+\nabla^{-1}\Gamma\nabla_1^{-1}\Gamma_1\nabla_2^{-1}\Gamma_2\ldots\ldots\Gamma_{i-1}\nabla_i^{-1}\Gamma_i u_{i+1}
\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

laquelle aura lieu quel que soit le nombre entier i. Telle est notre formule fondamentale qui, comme on le voit, est de la plus grande généralité.

Si on la suppose prolongée à l'infini, elle donnera u par une série qui ne dépendra plus que des fonctions p, p_1, p_2, ... Il est de plus évident qu'en choisissant ces fonctions, ainsi que les caractéristiques ∇, ∇_1, ∇_2, ..., Γ, Γ_1, Γ_2, ... d'une manière convenable, cette série pourra toujours être rendue aussi convergente qu'on voudra. On voit enfin que cette série peut être arrêtée à volonté; ce qui serait d'un avantage inappréciable si, dans tous les cas, il était possible d'assigner des limites aussi rapprochées qu'on le désirerait, entre lesquelles tombât la valeur de

$$\nabla^{-1}\Gamma\nabla_1^{-1}\Gamma_1\ldots\ldots\ldots\nabla_i^{-1}\Gamma_i u_{i+1}:$$

Malheureusement la détermination de ces limites paraît offrir d'assez grandes difficultés, et ne se montre d'un abord facile que dans un nombre de cas très-limités, parmi lesquels on doit comprendre celui de la série de Taylor. Mais comme la solution du problème relative à cette série est déjà connue, nous ne nous y arrêterons pas. Nous donnerons seulement une expression assez simple de cette fonction pour la formule ordinaire d'interpolation, par les différences finies; c'est tout ce qu'il nous est possible de faire pour le présent.

Si, dans la formule (2), on suppose que les caractéristiques ∇, ∇_1, ∇_2, ... sont identiquement les mêmes, que l'on fasse la même supposition pour les caractéristiques Γ, Γ_1, Γ_2, ...; et qu'on suppose en outre que les fonctions u, u_1, u_2, ... sont égales, et qu'il en est de même des fonctions p, p_1, p_2, ..., il viendra, suivant les notations que nous avons adoptées,

$$\left.\begin{array}{l} u=\nabla^{-1}p+(\nabla^{-1}\Gamma)\nabla^{-1}p+(\nabla^{-1}\Gamma)^2\nabla^{-1}p+(\nabla^{-1}\Gamma)^3\nabla^{-1}+\ldots \\ \qquad +\ldots(\nabla^{-1}\Gamma)^{i-1}\nabla^{-1}p+(\nabla^{-1}\Gamma)^i u \;, \end{array}\right\} \quad (3)$$

formule qui, bien que moins générale que la précédente, l'est pourtant encore beaucoup, puisque la forme de la fonction p et la nature des caractéristiques ∇, Γ demeurent tout-à-fait indéterminées.

Pour indiquer une application très-intéressante de la théorie précédente, soit

$$\psi(u)=p \;,$$

une équation du premier degré aux différences ou aux différentielles totales ou partielles, ou même aux différenees mêlées, de laquelle il soit question de tirer la valeur de u; en supposant d'ailleurs que ψ soit une caractéristique de fonction de nature distributive. Soit ∇ une autre caractéristique de même genre, on aura l'identité

$$\nabla u=p+\nabla u-\psi u \;;$$

donc, en posant

$$\nabla u - \psi u = \Gamma u \ ,$$

on aura

$$\nabla u = p + \Gamma u \ ,$$

où Γ sera aussi une caractéristique de fonction distributive. On pourra donc obtenir u par la formule (3).

Comme la caractéristique ∇ est entièrement arbitraire, il faudra la choisir de telle sorte que non seulement on sache trouver la dérivée inverse $\nabla^{-1}p$, quelle que soit la composition de p en variables indépendantes, mais en outre de manière que la série (3) soit convergente.

Dans tout ce qui précède, nous avons tacitement supposé que, dans les fonctions affectées des diverses caractéristiques, toutes les variables étaient considérées comme telles; mais on conçoit que l'on peut fort bien ne faire porter la dérivation que sur une ou plusieurs d'entre elles, en considérant les autres comme constantes. Pour indiquer cette circonstance, nous écrirons, à l'exemple de M. Servois, la variable que nous considérons seule comme telle au-dessous de la caractéristique de dérivation; de sorte que, par exemple, si u est fonction des variables indépendantes x, y, nous indiquerons ses dérivées partielles relatives à x et y par les symboles $\frac{\nabla}{x}u$, $\frac{\nabla}{y}u$.

Cela posé, proposons-nous de déterminer la nature des caractéristiques $\frac{\mathrm{E}}{x}$, $\frac{\mathrm{E}}{y}$, $\frac{\Delta}{x}$, $\frac{\Delta}{y}$ définies par les équations suivantes

$$\frac{\mathrm{E}}{x}u = \psi(x+1\,,y)\ , \qquad \frac{\Delta}{x}u = \frac{\mathrm{E}}{x}u - u\ ,$$

$$\frac{\mathrm{E}}{y}u = \psi(x\,,y+1)\ , \qquad \frac{\Delta}{y}u = \frac{\mathrm{E}}{y}u - u\ ,$$

dans lesquelles nous supposons $u = \psi(x\,,y)$.

Il est d'abord aisé de voir qu'elles sont toutes commutatives, tant entre elles qu'avec le facteur constant; et il n'est pas plus difficile d'apercevoir que $\frac{\mathrm{E}}{y}$, $\frac{\Delta}{y}$ sont commutatives avec toute fonction de x sans y, tandis que $\frac{\mathrm{E}}{x}$, $\frac{\Delta}{x}$ le sont avec toute fonction de y sans x; enfin, il n'est pas moins évident qu'elles sont toutes distributives.

En représentant donc par p une fonction quelconque de y et de constantes, nous aurons

$$\frac{\mathrm{E}}{x}(up)=p\frac{\mathrm{E}}{x}u, \qquad \frac{\Delta}{x}(up)=p\frac{\Delta}{x}u,$$

$$\frac{\mathrm{E}}{x}p=p; \qquad \frac{\Delta}{y}p=0.$$

Si, au contraire, p était supposé fonction de x et de constantes, nous aurions

$$\frac{\mathrm{E}}{y}(up)=p\frac{\mathrm{E}}{y}u, \qquad \frac{\Delta}{y}(up)=p\frac{\Delta}{y}u,$$

$$\frac{\mathrm{E}}{y}p=p, \qquad \frac{\Delta}{y}p=0.$$

On voit, d'après cela, qu'il est toujours possible de prendre les dérivées $\left(\frac{\Delta}{x}\right)^{-1}u$, $\left(\frac{\Delta}{y}\right)^{-1}u$ de manière qu'elles s'évanouissent, la première en même temps que x, et la seconde en même temps que y; et c'est ce que nous supposerons désormais.

Dans ce cas, $\left(\frac{\Delta}{x}\right)^{-1}$ est commutative avec $\frac{\mathrm{E}}{y}$, $\frac{\Delta}{y}$, $\left(\frac{\Delta}{y}\right)^{-1}$ et avec toute fonction qui ne renferme pas x; de même

$\left(\frac{\Delta}{y}\right)^{-1}$ est commutative avec $\frac{E}{x}$, $\frac{\Delta}{x}$, $\left(\frac{\Delta}{x}\right)^{-1}$, et avec toute fonction qui ne renferme pas y; mais on ne saurait avoir, en général,

$$\frac{E}{y}\left(\frac{\Delta}{y}\right)^{-1}u=\left(\frac{\Delta}{y}\right)^{-1}u, \quad \frac{E}{x}\left(\frac{\Delta}{x}\right)^{-1}u=\left(\frac{\Delta}{x}\right)^{-1}\frac{E}{x}u;$$

car, supposons $u=1$, nous aurons $\left(\frac{\Delta}{y}\right)^{-1}1=y$, et par conséquent $\frac{E}{y}\left(\frac{\Delta}{y}\right)^{-1}1=y+1$; tandis que l'on a $\frac{E}{y}1=1$, et conséquemment $\left(\frac{\Delta}{y}\right)^{-1}\frac{E}{y}1=y$. Il en serait de même pour $\frac{E}{x}$, $\left(\frac{\Delta}{x}\right)^{-1}$.

Enfin, nous trouverons que $\left(\frac{\Delta}{x}\right)^{-1}$, $\left(\frac{\Delta}{y}\right)^{-1}$ sont de nature distributive, tout aussi bien que $\frac{E}{x}$, $\frac{\Delta}{x}$, $\frac{E}{y}$, $\frac{\Delta}{y}$.

Supposant maintenant que u est une fonction $x+y$, on aura

$$\frac{\Delta}{y}u=\frac{\Delta}{x}u;$$

d'où on conclura, en représentant par u_0 ce que devient u lorsqu'on y fait $y=0$,

$$u=u_0+\left(\frac{\Delta}{y}\right)^{-1}\frac{\Delta}{x}u;$$

et par suite, en observant la même marche qui nous a conduit à l'équation (3),

$u=u_0$

$$u=u_0+\left(\frac{\Delta}{y}\right)^{-1}\frac{\Delta}{x}u_0+\left(\frac{\Delta}{y}\right)^{-2}\left(\frac{\Delta}{x}\right)^2u_0+\left(\frac{\Delta}{y}\right)^{-3}\left(\frac{\Delta}{x}\right)^3u_0+\ldots$$

$$+\left(\frac{\Delta}{y}\right)^{-(n-1)}\left(\frac{\Delta}{x}\right)^{n-1}u_0+\left(\frac{\Delta}{y}\right)^{-n}\left(\frac{\Delta}{x}\right)^{n}u\,;$$

ou encore, en effectuant les opérations qui ne sont qu'indiquées;

$$u=u_0+\frac{y}{1}\frac{\Delta}{x}u_0+\frac{y}{1}\cdot\frac{y-1}{2}\left(\frac{\Delta}{x}\right)^2u_0+\frac{y}{1}\cdot\frac{y-1}{2}\cdot\frac{y-2}{3}\left(\frac{\Delta}{x}\right)^3u_0+\ldots$$

$$\ldots+\frac{y}{1}\cdot\frac{y-1}{2}\ldots\ldots\frac{y-n+2}{n-1}\left(\frac{\Delta}{x}\right)^{n-1}u_0+\left(\frac{\Delta}{y}\right)^{-n}\left(\frac{\Delta}{x}\right)^{n}u\,,$$

dont le dernier terme $\left(\frac{\Delta}{y}\right)^{-n}\left(\frac{\Delta}{x}\right)^{n}u$ pourrait se mettre sous une forme plus traitable au moyen de l'intégration par parties ; mais voici, pour le même objet, une méthode moins laborieuse.

Soit

$$\frac{\Delta}{y}z+az=\left(\frac{\Delta}{x}\right)^{n}u\,; \qquad (g)$$

et soit z_0 ce qui devient z lorsqu'on y fait $y=0$; on aura, par les méthodes connues,

$$z=z_0(1-a)^y+(1-a)^{y-1}\left(\frac{\Delta}{y}\right)^{-1}(1-a)^{-y}\left(\frac{\Delta}{x}\right)^{n}u\,,$$

ou encore

$$z=z_0(1-a)^y+\left(\frac{\Delta}{y}\right)^{-1}(1-a)^{-(y-k)}\left(\frac{\Delta}{x}\right)^{n}u\,; \qquad (h)$$

pourvu qu'après l'intégration on fasse $k=y-1$.

D'un autre côté, notre formule (3), appliquée à l'intégration de l'équation (g), donne, en posant $\nabla z=\frac{\Delta}{y}z$, $\Gamma z=-az$,

$$z=z_0\left[1-a\left(\frac{\Delta}{y}\right)^{-1}1+a^2\left(\frac{\Delta}{y}\right)^{-2}1-a^3\left(\frac{\Delta}{y}\right)^{-3}1+\ldots\ldots\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\Delta}{y}\right)^{-1}\left(\frac{\Delta}{x}\right)^{n}u-a\left(\frac{\Delta}{y}\right)^{-2}\left(\frac{\Delta}{x}\right)^{n}u+a^2\left(\frac{\Delta}{y}\right)^{-3}\left(\frac{\Delta}{x}\right)^{n}u-\ldots\right];$$

d'où, en comparant avec le développement de l'équation (h), ordonné suivant les puissances de a, on conclura

$$(-1)^{n-1}\left(\frac{\Delta}{y}\right)^{-n}\left(\frac{\Delta}{x}\right)^{n}u=\left(\frac{\Delta}{y}\right)^{-1}\left\{\frac{y-k}{1}\cdot\frac{y-k+1}{2}\cdots\cdots\frac{y-k+n-2}{n-1}\left(\frac{\Delta}{x}\right)^{n}u\right\};$$

d'où, enfin,

$$u=u_0+\frac{y}{1}\cdot\frac{\Delta}{x}u_0+\frac{y}{1}\cdot\frac{y-1}{2}\left(\frac{\Delta}{x}\right)^{2}u_0+\frac{y}{1}\cdot\frac{y-1}{2}\cdot\frac{y-2}{3}\left(\frac{\Delta}{x}\right)^{3}u_0+\ldots\ldots$$

$$+\frac{y}{1}\cdot\frac{y-1}{2}\cdots\cdots\frac{y-n+2}{n-1}\left(\frac{\Delta}{x}\right)^{n-1}u_0+\left(\frac{\Delta}{y}\right)^{-1}\left\{\frac{y-k}{1}\cdot\frac{y-k+1}{2}\cdots\cdots\frac{y-k+n-2}{n-1}\left(\frac{\Delta}{x}\right)^{n}u\right\}(-1)^{n-1}$$

ce qui achève de compléter l'analogie qu'on avait déjà remarquée entre la formule ordinaire d'interpolation et le théorème de Taylor.

Reprenons l'équation

$$u=u_0+\left(\frac{\Delta}{y}\right)^{-1}\frac{\Delta}{x}u;$$

l'on en déduira

$$\left(\frac{E}{y}\right)^{r}\left(\frac{E}{x}\right)^{-r}u=\left(\frac{E}{y}\right)^{r}\left(\frac{E}{x}\right)^{-r}u_0+\left(\frac{E}{y}\right)^{-r}\left(\frac{\Delta}{y}\right)^{-1}\frac{\Delta}{x}\left(\frac{E}{x}\right)^{-r}u;$$

ou encore, en observant que, dans le cas actuel, on a $\left(\frac{E}{y}\right)^{r}\left(\frac{E}{x}\right)^{-r}u=u$ et $\left(\frac{E}{y}\right)^{r}\left(\frac{E}{x}\right)^{-r}u_0=\left(\frac{E}{x}\right)^{-r}u_0$,

$$u=\left(\frac{\mathrm{E}}{x}\right)^{-r}u_0+\left(\frac{\mathrm{E}}{y}\right)^{r}\left(\frac{\Delta}{y}\right)^{-1}\frac{\Delta}{x}\left(\frac{\mathrm{E}}{x}\right)^{-r}u\ldots$$

On trouverait absolument de la même manière

$$u=\left(\frac{\mathrm{E}}{x}\right)^{-r'}u_0+\left(\frac{\mathrm{E}}{y}\right)^{r'}\left(\frac{\Delta}{y}\right)^{-1}\frac{\Delta}{x}\left(\frac{\mathrm{E}}{x}\right)^{-r'}u,$$

$$u=\left(\frac{\mathrm{E}}{x}\right)^{-r''}u_0+\left(\frac{\mathrm{E}}{y}\right)^{r''}\left(\frac{\Delta}{y}\right)^{-1}\frac{\Delta}{x}\left(\frac{\mathrm{E}}{x}\right)^{-r''}u,$$

. . . .

En suivant donc la marche qui, des équations (1), nous a déjà conduit à la formule (2), nous déduirons de celles-ci

$$u=\left(\frac{\mathrm{E}}{x}\right)^{-r}u_0+\left(\frac{\mathrm{E}}{y}\right)^{r}\left(\frac{\Delta}{y}\right)^{-1}\frac{\Delta}{x}\left(\frac{\mathrm{E}}{x}\right)^{-(r+r')}u$$

$$+\left(\frac{\mathrm{E}}{y}\right)^{r}\left(\frac{\Delta}{y}\right)^{-1}\left(\frac{\mathrm{E}}{y}\right)^{r'}\left(\frac{\Delta}{y}\right)^{-1}\left(\frac{\Delta}{x}\right)^{2}\left(\frac{\mathrm{E}}{x}\right)^{-(r+r'+r'')}u+\ldots\ldots;$$

en ayant du moins égard aux propriétés commentatives des caractéri tiques qu'elles renferment.

En donnant à r, r', r'',..... des valeurs particulières, on parviendrait à une infinité de formules différentes qui, combinées entre elles, conduiraient à une infinité d'autres, dont quelques-unes se trouvent déjà dans les divers traités de calcul aux différences finies.

En général, u étant toujours une fonction de $x+y$, si l'on fait

$$\nabla u=au+a_1\frac{\mathrm{E}}{y}u+a_2\left(\frac{\mathrm{E}}{y}\right)^2u+\ldots\ldots+a_m\left(\frac{\mathrm{E}}{y}\right)^m u,$$

$$\Gamma u = au + a_1 \frac{\mathrm{E}}{x} u + a_2 \left(\frac{\mathrm{E}}{x}\right)^2 u + \ldots\ldots + a_m \left(\frac{\mathrm{E}}{x}\right)^m u \,;$$

on aura

$$\nabla u = \Gamma u \;;$$

et, comme les caractéristiques ∇, Γ sont alors de nature distributive, l'on en déduirait un développement de u.

L'on aurait encore

$$\nabla u = \Gamma u \;,$$

et l'on arriverait à un autre développement de la même fonction, en posant

$$\nabla u = au + a_1 \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} + a_2 \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}y^2} + \ldots\ldots + a_m \frac{\mathrm{d}^m u}{\mathrm{d}y^m} \;,$$

$$\Gamma u = au + a_1 \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + a_2 \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} + \ldots\ldots + a_m \frac{\mathrm{d}^m u}{\mathrm{d}x^m} \;.$$

L'on parviendrait encore à un nouveau développement, en posant

$$\begin{aligned}\nabla u = {} & au + a_1 \frac{\mathrm{E}}{y} u + a_2 \left(\frac{\mathrm{E}}{y}\right)^2 u + \ldots\ldots + a_m \left(\frac{\mathrm{E}}{y}\right)^m u \\ & + b \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} + b_1 \frac{\mathrm{E}}{y} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} + b_2 \left(\frac{\mathrm{E}}{y}\right)^2 \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} + \ldots\ldots + b_m \left(\frac{\mathrm{E}}{y}\right)^m \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + p \frac{\mathrm{d}^n u}{\mathrm{d}y^n} + p_1 \frac{\mathrm{E}}{y} \frac{\mathrm{d}^n u}{\mathrm{d}y^n} + p_2 \left(\frac{\mathrm{E}}{y}\right)^2 \frac{\mathrm{d}^n u}{\mathrm{d}y^n} + \ldots\ldots + p_m \left(\frac{\mathrm{E}}{y}\right)^m \frac{\mathrm{d}^n u}{\mathrm{d}y^n} \,,\end{aligned}$$

Γu

$$\Gamma u = au + a_1 \frac{E}{x} u + a_2 \left(\frac{E}{x}\right)^2 u + \ldots\ldots + a_m \left(\frac{E}{x}\right)^m u$$

$$+ b \frac{du}{dx} + b_1 \frac{E}{x} \frac{du}{dx} + b_2 \left(\frac{E}{x}\right)^2 \frac{du}{dx} + \ldots\ldots + b_m \left(\frac{E}{x}\right)^m \frac{du}{dx}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ p \frac{d^n u}{dx^n} + p_1 \frac{E}{x} \frac{d^n u}{dx^n} + p_2 \left(\frac{E}{x}\right)^2 \frac{d^n u}{dx^n} + \ldots\ldots + p_m \left(\frac{E}{x}\right)^m \frac{d^n u}{dx} ;$$

Il est d'ailleurs évident que, dans ces diverses formules, il sera permis de prendre pour a, a_1, a_2, ... b, b_1, b_2, ... p, p_1, p_2, ... des fonctions quelconques de x, y.

On sent que nous n'en finirions jamais, si nous voulions indiquer toutes les applications que l'on peut faire de la théorie que nous avons exposée dans le présent mémoire; et c'est ce qui nous détermine à terminer ici.