ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

GUÉNEAU D'AUMONT

Trigonométrie sphérique. Recherches sur les quadrilatères, tant rectilignes que sphériques, inscrits au cercle

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 12 (1821-1822), p. 269-280

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1821-1822__12__269_0>

TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE.

Recherches sur les quadrilatères, tant rectilignes que sphériques, inscrits au cercle;

Par M. GUÉNEAU D'AUMONT, professeur, secrétaire et conservateur de l'observatoire de la faculté des sciences de Dijon.

§. I. *Quadrilatère rectiligne.*

SOIENT a, b, c, d les côtés consécutifs d'un quadrilatère rectiligne inscrit au cercle; soient x, y les deux diagonales, la première se terminant aux sommets des angles (a, b), (c, d), et l'autre aux sommets des angles (b, c), (a, d).

Par la nature du quadrilatère inscrit, on aura

$$\text{Cos.}(a,d)=-\text{Cos.}(b,c)=\frac{a^2+d^2-x^2}{2ad}=-\frac{b^2+c^2-x^2}{2bc},$$

$$\text{Cos.}(a,b)=-\text{Cos.}(c,d)=\frac{a^2+b^2-y^2}{2ab}=-\frac{c^2+d^2-y^2}{2cd};$$

donc

$$\frac{a^2+d^2-x^2}{ad}+\frac{b^2+c^2-x^2}{bc}=0,$$

$$\frac{a^2+b^2-y^2}{ab}+\frac{c^2+d^2-y^2}{cd}=0;$$

équations d'où on tire

$$\left.\begin{aligned} x^2&=\frac{bc(a^2+d^2)+ad(b^2+c^2)}{bc+ad}=\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{bc+ad}\,, \\ y^2&=\frac{ab(c^2+d^2)+cd(a^2+b^2)}{ab+cd}=\frac{(ac+bd)(bc+ad)}{ab+cd}\,; \end{aligned}\right\}\quad(1)$$

et par suite

$$xy=ac+bd\,,\qquad \frac{x}{y}=\frac{ab+cd}{bc+ad}\,. \qquad (2)$$

Si, dans l'expression

$$\text{Cos.}(a\,,\,d)=\frac{a^2+d^2-x^2}{2ad}\,,$$

on met pour x^2 la valeur que nous venons d'obtenir, il viendra, toutes réductions faites,

$$\text{Cos.}(a\,,\,d)=\frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(bc+ad)}\,;$$

or, on a

$$2\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}(a\,,\,d)=1-\text{Cos.}(a\,,\,d)\,,\quad 2\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}(a\,,\,d)=1+\text{Cos.}(a\,,\,d)\,;$$

donc, en substituant et divisant par 2,

$$\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}(a\,,\,d)=\frac{(b+c)^2-(a-d)^2}{4(bc+ad)}=\frac{(b+c+d-a)(a+b+c-d)}{4(bc+ad)}\,,$$

$$\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}(a\,,\,d)=\frac{(a+d)^2-(b-c)^2}{4(bc+ad)}=\frac{(a+c+d-b)(d+a+b-c)}{4(bc+ad)}\,;$$

mais on a d'ailleurs

$$\text{Sin.}(a\,,\,d)=2\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(a\,,\,d)\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(a\,,\,d)\,;$$

substituant donc et posant, pour abréger,

$$b+c+d-a=A\ ,$$

$$c+d+a-b=B\ ,$$

$$d+a+b-c=C\ ,$$

$$a+b+c-d=D\ ,$$

il viendra finalement

$$\text{Sin.}(a\,,d)=\text{Sin.}(b\,,c)=\frac{\sqrt{ABCD}}{2(bc+ad)}\ . \qquad (3)$$

L'aire du quadrilatère dont il s'agit étant la somme des aires de deux triangles, dont l'un a pour ses trois côtés a, d, x, et l'autre pour les siens b, c, x; en représentant ce quadrilatère par Q, on aura

$$Q=\tfrac{1}{2}bc\text{Sin.}(b\,,c)+\tfrac{1}{2}ad\text{Sin.}(a\,,d)=\tfrac{1}{2}(bc+ad)\text{Sin.}(a\,,d)\ ;$$

c'est-à-dire, en substituant,

$$Q=\tfrac{1}{4}\sqrt{ABCD}\ . \qquad (4)$$

Si, dans cette expression, on suppose $d=0$, elle devient

$$\tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}\ ,$$

qui est précisément celle de l'aire d'un triangle, en fonction de ses trois côtés (*).

(*) Sans connaître encore l'expression de l'aire d'un triangle en fonction de ses trois côtés, on peut prononcer, à l'avance, qu'elle en est une fonction symétrique ; attendu qu'avec les trois mêmes côtés donnés, on ne saurait former qu'un triangle donné. Mais, bien qu'avec les quatre mêmes côtés

Le cercle auquel est inscrit le quadrilatère dont il s'agit se trouvant en même temps circonscrit au triangle dont les trois côtés sont a, d, x; en représentant par R le rayon de ce cercle, il est aisé de voir qu'on aura

$$R=\frac{x}{2\mathrm{Sin}.(a,d)}\ ;$$

mettant donc pour x et $\mathrm{Sin}.(a,d)$ les valeurs déterminées ci-dessus, et posant, pour abréger,

$$(ab+cd)(ac+bd)(bc+ad)=K\ ,$$

il viendra

$$R=\sqrt{\frac{K}{ABCD}}=\frac{\sqrt{K}}{4Q}\,.\ (*) \qquad (5)$$

Si ensuite, dans cette formule, on suppose $d=0$, on retombe

---

donnés on puisse former trois quadrilatères inscriptibles au cercle, non superposables, on peut néanmoins reconnaître, à l'avance, que l'expression de l'aire du quadrilatère inscrit, comme celle de l'aire du triangle est une fonction symétrique de ses côtés; attendu que les trois quadrilatères résultant de la permutation des quatre mêmes côtés donnés, bien que non superposables, en général, sont néanmoins équivalens. Cela est d'abord évident pour le cas où l'on échange entre eux deux côtés consécutifs, puisqu'alors un des deux triangles dont se compose le quadrilatère reste le même, tandis que l'autre est seulement tourné en sens inverse; et, quant à l'échange de deux côtés opposés, il doit encore en être de même, puisqu'on peut y parvenir par une suite d'échanges de deux côtés consécutifs. Ces mêmes considérations prouvent, en outre, que les trois quadrilatères sont tous inscriptibles à un même cercle.

J. D. G.

(*) Daprès ce qui vient d'être dit, dans la précédente note, on ne doit pas être surpris de voir ici reparaître, de nouveau, une fonction symétrique des quatre côtés du quadrilatère.

J. D. G.

sur l'expression connue du rayon du cercle circonscrit à un triangle en fonction de ses trois côtés.

La plupart des résultats auxquels nous venons de parvenir sont connus depuis long-temps. Si donc nous les reproduisons ici, c'est uniquement dans la vue d'en déduire et de leur comparer ceux qui vont faire présentement le sujet de nos recherches.

§. II. *Quadrilatère sphérique.*

Soient a, b, c, d les côtés consécutifs d'un quadrilatère sphérique, inscrit à un cercle de la sphère; soient x, y les deux diagonales de ce quadrilatère; la première étant celle qui se termine aux sommets des angles (a, b), (c, d); et la seconde celle qui se termine aux sommets des angles (b, c), (a, d).

Les cordes de ces quatre côtés et de ces deux diagonales, qui sont

$$2\text{Sin.}\tfrac{1}{2}a,\ 2\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b,\ 2\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c,\ 2\text{Sin.}\tfrac{1}{2}d,\ 2\text{Sin.}\tfrac{1}{2}x,\ 2\text{Sin.}\tfrac{1}{2}y,$$

sont les quatre côtés et les deux diagonales d'un quadrilatère rectiligne inscrit au même cercle; d'où il suit qu'on pourra les substituer à la place de a, b, c, d, x, y, respectivement, dans les formules (1) précédemment obtenues. On aura ainsi, toutes réductions faites,

$$\left.\begin{aligned}
\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}x&=\frac{(\text{Sin.}\tfrac{1}{2}a\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c+\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b\text{Sin.}\tfrac{1}{2}d)(\text{Sin.}\tfrac{1}{2}a\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b+\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c\text{Sin.}\tfrac{1}{2}d)}{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c+\text{Sin.}\tfrac{1}{2}a\text{Sin.}\tfrac{1}{2}d},\\
\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}y&=\frac{(\text{Sin.}\tfrac{1}{2}a\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c+\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b\text{Sin.}\tfrac{1}{2}d)(\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c+\text{Sin.}\tfrac{1}{2}a\text{Sin.}\tfrac{1}{2}d)}{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}a\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b+\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c\text{Sin.}\tfrac{1}{2}d};
\end{aligned}\right\}\ (\text{I})$$

d'où ensuite

$$\left.\begin{array}{l}\text{Sin.}\tfrac{1}{2}x\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}y=\text{Sin.}\tfrac{1}{2}a\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c+\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}d\,, \\[2mm] \dfrac{\text{Sin.}\frac{1}{2}x}{\text{Sin.}\frac{1}{2}y}=\dfrac{\text{Sin.}\frac{1}{2}a\,\text{Sin.}\frac{1}{2}b\,\text{Sin.}\frac{1}{2}c\,\text{Sin.}\frac{1}{2}d}{\text{Sin.}\frac{1}{2}b\,\text{Sin.}\frac{1}{2}c\,\text{Sin.}\frac{1}{2}a\,\text{Sin.}\frac{1}{2}d}\,,\end{array}\right\}\ \text{(II)}$$

Dans le triangle sphérique dont les trois côtés sont a, d, x, on a

$$\text{Cos.}(a\,,\,d)=\frac{\text{Cos.}x-\text{Cos.}a\,\text{Cos.}d}{\text{Sin.}a\,\text{Sin.}d}\,,$$

d'où

$$2\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}(a\,,\,d)=1-\text{Cos.}(a\,,\,d)=\frac{\text{Cos.}(a-d)-\text{Cos.}x}{\text{Sin.}a\,\text{Sin.}d}\,,$$

$$2\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}(a\,,\,d)=1+\text{Cos.}(a\,,\,d)=\frac{\text{Cos.}x-\text{Cos.}(a+d)}{\text{Sin.}a\,\text{Sin.}d}\,;$$

mais, on a généralement

$$\text{Cos.}k=1-2\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}k\,;$$

donc

$$\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}(a\,,\,d)=\frac{\text{Sin.}^2\frac{1}{2}x-\text{Sin.}^2\frac{1}{2}(a-d)}{\text{Sin.}a\,\text{Sin.}d}\,,$$

$$\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}(a\,,\,d)=\frac{\text{Sin.}^2\frac{1}{2}(a+d)-\text{Sin.}^2\frac{1}{2}x}{\text{Sin.}a\,\text{Sin.}d}\,.$$

En mettant, dans ces deux formules, pour $\text{Sin.}^2\frac{1}{2}x$, la valeur (I) que nous avons trouvée tout à l'heure, elles deviennent, en rassemblant d'une part tous les termes multipliés par $\text{Sin.}\frac{1}{2}b\,\text{Sin.}\frac{1}{2}c$, et de l'autre tous les termes multipliés par $\text{Sin.}\frac{1}{2}a\,\text{Sin.}\frac{1}{2}d$,

$$\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}(a\,,\,d)=\frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}a\,\text{Sin.}\frac{1}{2}d\left\{\text{Sin.}^2\frac{1}{2}b+\text{Sin.}^2\frac{1}{2}c-\text{Sin.}^2\frac{1}{2}(a-d)\right\}+\text{Sin.}\frac{1}{2}b\,\text{Sin.}\frac{1}{2}c\left\{\text{Sin.}^2\frac{1}{2}a+\text{Sin.}^2\frac{1}{2}d-\text{Sin.}^2\frac{1}{2}(a-d)\right\}}{(\text{Sin.}\frac{1}{2}b\,\text{Sin.}\frac{1}{2}c+\text{Sin.}\frac{1}{2}a\,\text{Sin.}\frac{1}{2}d)\text{Sin.}a\,\text{Sin.}d}\,,$$

$$\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}(a\,,\,d)=\frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}a\,\text{Sin.}\frac{1}{2}d\left\{\text{Sin.}^2\frac{1}{2}(a+d)-\text{Sin.}^2\frac{1}{2}b-\text{Sin.}^2\frac{1}{2}c\right\}+\text{Sin.}\frac{1}{2}b\,\text{Sin.}\frac{1}{2}c\left\{\text{Sin.}^2\frac{1}{2}(a+d)-\text{Sin.}^2\frac{1}{2}a-\text{Sin.}^2\frac{1}{2}d)\right\}}{(\text{Sin.}\frac{1}{2}b\,\text{Sin.}\frac{1}{2}c+\text{Sin.}\frac{1}{2}a\,\text{Sin.}\frac{1}{2}d)\text{Sin.}a\,\text{Sin.}d}\,;$$

mais on trouve facilement

$$\mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}a+\mathrm{Sin.}^2\tfrac{1}{2}d-\mathrm{Sin.}^2\tfrac{1}{2}(a-d)=2\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}a\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}d\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}(a-d)\ ,$$

$$\mathrm{Sin.}^2\tfrac{1}{2}(a+d)-\mathrm{Sin.}^2\tfrac{1}{2}a-\mathrm{Sin.}^2\tfrac{1}{2}d=2\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}a\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}d\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}(a+d)\ ;$$

en substituant donc, mettant dans les dénominateurs pour Sin a et Sin.d, $2\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}a\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}a$ et $2\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}d\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}d$ et supprimant, haut et bas, le facteur $\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}a\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}d$, il viendra

$$\mathrm{Sin.}^2\tfrac{1}{2}(a,d)=\frac{\mathrm{Sin.}^2\tfrac{1}{2}b+\mathrm{Sin.}^2\tfrac{1}{2}c-\mathrm{Sin.}^2\tfrac{1}{2}(a-d)+2\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}b\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}c\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}(a-d)}{4(\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}b\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}c+\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}a\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}d)\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}a\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}d}\ ,$$

$$\mathrm{Cos.}^2\tfrac{1}{2}(a,d)=\frac{\mathrm{Sin.}^2\tfrac{1}{2}(a+d)-\mathrm{Sin.}^2\tfrac{1}{2}b-\mathrm{Sin.}^2\tfrac{1}{2}c+2\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}b\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}c\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}(a+d)}{4(\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}b\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}c+\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}a\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}d)\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}a\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}d}\ ;$$

ou, en changeant respectivement, dans les numérateurs, $\mathrm{Sin.}^2\tfrac{1}{2}(a-d)$ et $\mathrm{Sin.}^2\tfrac{1}{2}(a+d)$ en $1-\mathrm{Cos.}^2\tfrac{1}{2}(a-d)$ et $1-\mathrm{Cos.}^2\tfrac{1}{2}(a+d)$,

$$\mathrm{Sin.}^2\tfrac{1}{2}(a,d)=\frac{\mathrm{Cos.}^2\tfrac{1}{2}(a-d)+2\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}b\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}c\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}(a-d)-(1-\mathrm{Sin.}^2\tfrac{1}{2}b-\mathrm{Sin.}^2\tfrac{1}{2}c)}{4(\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}b\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}c+\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}a\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}d)\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}a\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}d}\ ,$$

$$\mathrm{Cos.}^2\tfrac{1}{2}(a,d)=\frac{(1-\mathrm{Sin.}^2\tfrac{1}{2}b-\mathrm{Sin.}^2\tfrac{1}{2}c)-\{\mathrm{Cos.}^2\tfrac{1}{2}(a+d)-2\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}b\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}c\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}(a+d)\}}{4(\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}b\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}c+\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}a\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}d)\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}a\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}d}\ ;$$

mais

$$1-\mathrm{Sin.}^2\tfrac{1}{2}b-\mathrm{Sin.}^2\tfrac{1}{2}c=(1-\mathrm{Sin.}^2\tfrac{1}{2}b)(1-\mathrm{Sin.}^2\tfrac{1}{2}b)-\mathrm{Sin.}^2\tfrac{1}{2}b\mathrm{Sin.}^2\tfrac{1}{2}c$$

$$=\mathrm{Cos.}^2\tfrac{1}{2}b\mathrm{Cos.}^2\tfrac{1}{2}c-\mathrm{Sin.}^2\tfrac{1}{2}b\mathrm{Sin.}^2\tfrac{1}{2}c\ ;$$

donc, en substituant

$$\mathrm{Sin.}^2\tfrac{1}{2}(a,d)=\frac{\{\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}(a-d)+\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}b\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}c\}^2-\mathrm{Cos.}^2\tfrac{1}{2}b\mathrm{Cos.}^2\tfrac{1}{2}c}{4(\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}b\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}c+\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}a\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}d)\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}a\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}d}\ ,$$

$$\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}(a,d)=\frac{\text{Cos}^2\tfrac{1}{2}b\,\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}c-\{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(a+d)-\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c\}^2}{4(\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c+\text{Sin.}\tfrac{1}{2}a\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}d)\text{Cos.}\tfrac{1}{2}a\,\text{Cos.}\tfrac{1}{2}d}.$$

Le numérateur de la première fraction se décompose en ces deux facteurs

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(a-d)+\text{Cos.}\tfrac{1}{2}b\,\text{Cos.}\tfrac{1}{2}c+\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c=\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(a-d)+\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(b+c)\ ,$$

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(a-d)-\text{Cos.}\tfrac{1}{2}b\,\text{Cos.}\tfrac{1}{2}c+\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c=\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(a-d)-\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(b+c)\ ,$$

et le numérateur de la seconde en ces deux-ci :

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}b\,\text{Cos.}\tfrac{1}{2}c-\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c+\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(a+d)=\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(b+c)+\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(a+d)\ ,$$

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}b\,\text{Cos.}\tfrac{1}{2}c+\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c-\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(a+d)=\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(b-c)-\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(a+d)\ ;$$

de sorte qu'on a

$$\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}(a,d)=\frac{\{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(a-d)+\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(b-c)\}\{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(a-d)-\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(b+c)\}}{4(\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c+\text{Sin.}\tfrac{1}{2}a\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}d)\text{Cos.}\tfrac{1}{2}a\,\text{Cos.}\tfrac{1}{2}d}\,,$$

$$\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}(a,d)=\frac{\{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(b+c)+\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(a+d)\}\{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(b-c)-\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(a+d)\}}{4(\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c+\text{Sin.}\tfrac{1}{2}a\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}d)\text{Cos.}\tfrac{1}{2}a\,\text{Cos.}d}\,;$$

or, on a

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(a-d)+\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(b-c)=2\text{Cos.}\tfrac{1}{4}(a+b-c-d)\text{Cos.}\tfrac{1}{4}(a+c-b-d)\ ,$$

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(a-d)-\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(b+c)=2\text{Sin.}\tfrac{1}{4}(a+b+c-d)\text{Sin.}\tfrac{1}{4}(b+c+d-a)\ ,$$

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(b+c)+\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(a+d)=2\text{Cos.}\tfrac{1}{4}(a+b+c+d)\text{Cos.}\tfrac{1}{4}(b+c-a-d)\ ,$$

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(b-c)-\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(a+d)=2\text{Sin.}\tfrac{1}{4}(d+a+b-c)\,\text{Sin.}\tfrac{1}{4}(c+d+a-b)\ ;$$

donc finalement

Sin.²

$$\mathrm{Sin.}^2\tfrac{1}{2}(a,d)=\frac{\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{4}(a+b+c+d)\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{4}(a+c-b-d)\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{4}(a+b+c-d)\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{4}(b+c+d-a)}{(\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}b\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}c+\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}a\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}d)\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}a\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}d}\,;$$

$$\mathrm{Cos.}^2\tfrac{1}{2}(a,d)=\frac{\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{4}(a+b-c-d)\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{4}(b+c-a-d)\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{4}(d+a+b-c)\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{4}(c+d+a-b)}{(\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}b\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}c+\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}a\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}d)\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}a\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}d}\,.$$

En faisant, pour abréger,

$$\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{4}(a+b+c+d)\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{4}(a+b-c-d)\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{4}(a+c-b-d)\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{4}(b+c-a-d)=M\,;$$

$$\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{4}(b+c+d-a)\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{4}(c+d+a-b)\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{4}(d+a+b-c)\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{4}(a+b+c-d)=N\,;$$

auquel cas M et N seront des fonctions symétriques des quatre côtés a, b, c, d, et en se rappelant que

$$\mathrm{Sin.}(a\,,\,d)=2\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}(a\,,\,d)\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}(a\,,\,d)\,,$$

on aura

$$\mathrm{Sin.}(a,d)=\frac{2\sqrt{MN}}{(\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}b\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}c+\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}a\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}d)\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}a\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}d}\,; \qquad \text{(III)}$$

d'où l'on voit qu'ici les angles opposés ne sont pas supplément l'un de l'autre, comme dans le quadrilatère rectiligne inscrit.

En changeant respectivement a, b, c, d en c, d, a, b, il vient

$$\mathrm{Sin.}^2\tfrac{1}{2}(b,c)=\frac{\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{4}(a+b-c-d)\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{4}(a+c-b-d)\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{4}(c+d+a-b)\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{4}(d+a+b-c)}{(\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}b\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}c+\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}a\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}d)\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}b\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}c}\,,$$

$$\mathrm{Cos.}^2\tfrac{1}{2}(b,c)=\frac{\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{4}(a+b+c+d)\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{4}(b+c-a-d)\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{4}(b+c+d-a)\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{4}(a+b+c-d)}{(\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}b\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}c+\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}a\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}d)\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}b\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}c}\,;$$

mais on a

$$\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}\{(a\,,\,d)+(b\,,\,c)\}=\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(a\,,d)\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(b\,,\,c)+\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(a\,,d)\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(b,c)\,,$$

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}\{(a\,,d)+(b\,,c)\}=\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(a\,,d)\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(b\,,c)-\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(a\,,d)\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(b\,,c)\,;$$

en substituant donc, et posant, pour abréger,

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}a\text{Cos.}\tfrac{1}{2}b\text{Cos.}\tfrac{1}{2}c\text{Cos.}\tfrac{1}{2}d=P\,,$$

il viendra

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}\{(a,d)+(b,c)\}=\frac{\text{Sin.}\tfrac{1}{4}(b+c+d-a)\text{Sin.}\tfrac{1}{4}(a+b+c-d)+\text{Sin.}\tfrac{1}{4}(c+d-a-b)\text{Sin.}\tfrac{1}{4}(d+a+b-c)}{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c+\text{Sin.}\tfrac{1}{2}a\text{Sin.}\tfrac{1}{2}d}\sqrt{\frac{M}{P}}\,,$$

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}\{(a,d)+(b,c)\}=\frac{\text{Cos.}\tfrac{1}{4}(a+b+c+d)\text{Cos.}\tfrac{1}{4}(b+c-a-d)-\text{Cos.}\tfrac{1}{4}(a+b-c-d)\text{Cos.}\tfrac{1}{4}(a+c-b-d)}{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c+\text{Sin.}\tfrac{1}{2}a\text{Sin.}\tfrac{1}{2}d}\sqrt{\frac{N}{P}}\,;$$

cela revient à

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}\{(a,d)+(b,c)\}=\frac{\{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(a-d)-\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(b+c)\}+\{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(b-c)-\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(a+d)\}}{2(\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c+\text{Sin.}\tfrac{1}{2}a\text{Sin.}\tfrac{1}{2}d)}\sqrt{\frac{M}{P}}\,,$$

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}\{(a,d)+(b,c)\}=\frac{\{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(a+d)+\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(b+c)\}-\{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(a-d)+\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(b-c)\}}{2(\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c+\text{Sin.}\tfrac{1}{2}a\text{Sin.}\tfrac{1}{2}d)}\sqrt{\frac{N}{R}}\,;$$

d'où, par un développement ultérieur,

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}\{(a\,,\,d)+(b\,,\,c)\}=+\sqrt{\frac{M}{P}},\quad \text{Cos.}\tfrac{1}{2}\{(a,d)+(b,c)\}=-\sqrt{\frac{N}{P}}\,.$$

Ces deux fonctions étant symétriques, il en résulte que

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}\{(a,\,d)+(b\,,c)\}=\text{Sin.}\tfrac{1}{2}\{(a,\,b)+(c\,,\,d)\}=+\sqrt{\frac{M}{P}}\,,$$

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}\{(a,d)+(b,c)\}=\text{Cos.}\tfrac{1}{2}\{(a,b)+(c,d)\}=-\sqrt{\frac{N}{P}}\ ;$$

et, par conséquent

$$(a,d)+(b,c)=(a,b)+(c,d)\ ;$$

c'est-à-dire que, *dans tout quadrilatère sphérique inscrit, la somme de deux angles opposés est égale à la somme des deux autres angles*; propriété que le quadrilatère rectiligne inscrit partage, au surplus, avec le quadrilatère sphérique, avec cette différence seulement que, dans le premier, ces deux sommes sont constantes, tandis que, dans ce dernier, au contraire, elles sont variables.

Si l'on désigne par Q l'aire du quadrilatère, l'aire du triangle sphérique trirectangle étant prise pour unité, on aura, comme l'on sait,

$$Q=(a,b)+(b,c)+(c,d)+(a,d)-2\varpi\ ,$$

ou bien, par ce qui vient d'être dit,

$$Q=2\{(a,d)+(b,c)-\varpi\}\ ;$$

donc

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{4}Q=-\text{Cos}\ \tfrac{1}{2}\{(a,d)+(b,c)\}=\sqrt{\frac{N}{P}}\ ,$$

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{4}Q=+\text{Sin.}\tfrac{1}{2}\{(a,d)+(b,c)\}=\sqrt{\frac{M}{P}}\ ,$$

et de là encore

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}Q=2\text{Sin.}\tfrac{1}{4}Q\text{Cos.}\tfrac{1}{4}Q=\frac{2\sqrt{MN}}{P}\ ,$$

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{4}Q=\frac{\text{Sin.}\tfrac{1}{4}Q}{\text{Cos}\ \tfrac{1}{4}Q}=\sqrt{\frac{N}{M}}\ ; \qquad \text{(IV)}$$

fonctions qui sont toutes symétriques.

Si l'on suppose $d=0$, le quadrilatère devient un triangle; de sorte qu'en représentant par T l'aire du triangle sphérique dont les trois côtés sont a, b, c, on a

$$\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{4}T=\sqrt{\frac{\mathrm{Sin.}\frac{1}{4}(a+b+c)\mathrm{Sin.}\frac{1}{4}(b+c-a)\mathrm{Sin.}\frac{1}{4}(c+a-b)\mathrm{Sin.}\frac{1}{4}(a+b-c)}{\mathrm{Cos.}\frac{1}{2}a\mathrm{Cos.}\frac{1}{2}b\mathrm{Cos.}\frac{1}{2}c}}\,,$$

$$\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{4}T=\sqrt{\frac{\mathrm{Cos.}\frac{1}{4}(a+b+c)\mathrm{Cos.}\frac{1}{4}(b+c-a)\mathrm{Cos.}\frac{1}{4}(c+a-b)\mathrm{Cos.}\frac{1}{4}(a+b-c)}{\mathrm{Cos.}\frac{1}{2}a\mathrm{Cos.}\frac{1}{2}b\,\mathrm{Cos.}\frac{1}{2}c}}\,,$$

$$\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}T=\sqrt{\frac{\mathrm{Sin.}\frac{1}{2}(a+b+c)\mathrm{Sin.}\frac{1}{2}(b+c-a)\mathrm{Sin.}\frac{1}{2}(c+a-b)\mathrm{Sin.}\frac{1}{2}(a+b-c)}{2\mathrm{Cos.}\frac{1}{2}a\mathrm{Cos.}\frac{1}{2}b\mathrm{Cos.}\frac{1}{2}c}}\,,$$

$$\mathrm{Tang}\tfrac{1}{4}T=\sqrt{\mathrm{Tang}\tfrac{1}{4}(a+b+c)\mathrm{Tang}\tfrac{1}{4}(b+c-a)\mathrm{Tang.}\tfrac{1}{4}(c+a-b)\mathrm{Tang.}\tfrac{1}{4}(a+b-c)}\;;$$

formules connues, dont la dernière est due à M. Lhuilier, de Genève.

Si nous désignons par R l'arc de grand cercle qui joint le pôle du cercle auquel notre quadrilatère est inscrit à l'un quelconque des points de sa circonférence, cet arc aura pour sinus le rayon même de ce cercle, de sorte que, pour obtenir $\mathrm{Sin.}R$, il ne s'agira que de changer, dans la formule (5) précédemment obtenue,

$$a\,,\ b\,,\ c\,,\ d\,,\ R$$

respectivement en

$$2\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}a\,,\ 2\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}b\,,\ 2\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}c\,,\ 2\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}d\,,\ \mathrm{Sin.}R\,.$$

Posant donc, pour abréger,

$$\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}b+\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}c+\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}d-\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}a=\mathrm{Sin.}A\,,$$
$$\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}c+\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}d+\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}a-\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}b=\mathrm{Sin.}B\,,$$
$$\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}d+\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}a+\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}b-\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}c=\mathrm{Sin.}C\,,$$
$$\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}a+\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}b+\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}c-\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}d=\mathrm{Sin.}D\,;$$

$$(\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}a\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}b+\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}c\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}d)(\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}a\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}c+\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}b\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}d)(\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}b\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}c+\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}a\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}d)=\mathrm{Sin.}K\,,$$

il viendra

$$\mathrm{Sin.}R=2\sqrt{\frac{\mathrm{Sin.}K}{\mathrm{Sin.}A\,\mathrm{Sin.}B\,\mathrm{Sin.}C\,\mathrm{Sin.}D}}\,. \qquad \text{(V)}$$

Il est presque superflu d'observer que les résultats que nous venons d'obtenir, en dernier lieu, s'appliquent littéralement à l'angle tétraèdre inscrit au cône droit.

Dijon, le 20 décembre 1821.