GERGONNE

Réflexions sur le précédent article

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 12 (1821-1822), p. 249-253
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1821-1822__12__249_0>

Réflexions sur le précédent article ;

Par M. GERGONNE.

ON voit, par le précédent article, que c'est inconsidérément que nous avons affirmé, à la page 393 du XI.e volume de ce recueil, que l'équation

$$\{(ay-bx)^2-(a'y-b'x)^2\}^2$$
$$=4\{(bx+ay-ab)-(b'x+a'y-a'b')\}\{(ay-bx)^2(b'x+a'y-a'b')-(a'y-b'x)^2(bx+ay-ab\},$$

» de figurer dans votre recueil ; je sens combien il leur manque, et regrette » vivement que mes occupations ne m'aient pas permis, dans le temps, de » les réunir à celles, sur le même sujet, que vous avez eu la bonté de publier » à la page 109 du présent volume, de manière à en former un tout qui » pût complètement faire le pendant de ce que vous avez vous-même donné » à la page 379 de votre XI.e volume. La chose eût été facile, au moyen » du développement de quelques-unes des propositions concernant le cas par- » ticulier du cercle. Il faut dire aussi qu'il me repugnait de mettre en avant » des principes non encore connus des géomètres, et qui devaient, plus tard, faire » le fond d'un ouvrage que j'avais et que j'ai toujours l'intention de publier. Quoi- » que je sois toujours dans la même situation d'esprit, j'ai cru devoir cependant » vous faire part des moyens à l'aide desquels je suis parvenu depuis long- » temps aux résultats consignés à la fin de l'article sur l'hyperbole équilatère, » inséré à la page 205 de votre XI.e volume ; d'autant que, ces résultats étant » fautifs quant à leur énoncé, qui est trop restreint, et différant d'ailleurs en » quelques points de ceux auxquels vous avez été conduit par l'analise algé- » brique, il etait instant de vous mettre à même de rectifier les uns et de » faire quadrer les vôtres avec les autres. Je vous abandonne donc ces re- » cherches, Monsieur, en vous laissant le soin d'en tirer le parti le plus » convenable ».

Etc., etc., etc.

J. D. G.

n'était point décomposable en deux facteurs du second degré ; et que conséquemment le lieu cherché n'était ni une section conique, ni le système de deux sections coniques. La vérité est que nous nous étions bien assurés que le premier membre de cette équation n'était point décomposable en facteurs proprement rationnels ; mais nous aurions dû songer que, lorsqu'une équation à deux variables n'est point décomposable en facteurs rationnels, elle n'en exprime pas moins le système de plusieurs courbes, toutes les fois que les radicaux de ses facteurs ne portent point sur les variables x, y, mais seulement sur des quantités constantes.

C'est précisément le cas où on se trouve ici. En multipliant l'équation dont il s'agit par la quantité constante

$$(a+a')^2(b+b')^2\{bb'(a+a')^2-aa'(b+b')^2\}\ ,$$

et posant, pour abréger,

$$(ab'-ba')(ab-a'b')=M\ ,$$

on parvient facilement à lui donner cette forme

$$bb'(b+b')^2\{(a-a')^2[(b+b')x-(a+a')y]^2-2Mx[2x-(a+a')]\}^2$$

$$=aa'(a+a')^2\{(b-b')^2[(b+b')x-(a+a')y]^2+2My[2y-(b+b')]\}^2\ ;$$

d'où on tire, en extrayant les racines, cette double équation du second degré,

$$(b+b')\{(a-a')^2[(b+b')x-(a+a')y]^2-2Mx[2x-(a+a')]\}\sqrt{bb'}$$

$$=\pm(a+a')\{(b-b')^2[(b+b')x-(a+a')y]^2+2My[2y-(b+b')]\}\sqrt{aa'}\ ,$$

appartenant conséquemment au système de deux sections coniques.

Par la seule inspection de cette double équation, on aperçoit, 1.° Qu'elle est satisfaite en posant, à la fois, $x=0$, $y=0$; d'où il suit que les deux courbes passent également par l'origine ou sommet de l'angle des deux tangentes données.

2.° Qu'elle est encore satisfaite en posant, à la fois, $x=\frac{1}{2}(a+a')$, $y=\frac{1}{2}(b+b')$; ce qui nous apprend que les deux courbes passent encore par le milieu de l'intervalle qui sépare les deux points donnés.

3.° Enfin qu'elle est également satisfaite en posant à la fois

$$x=-\frac{ab'-ba'}{2(b-b')}\,,\quad y=+\frac{ab'-ba'}{2(a-a')}\,;$$

ce qui montre que les deux courbes passent aussi par le milieu du segment de la droite qui passe par les points donnés intercepté entre les deux droites données.

4.° Si, dans la vue de déterminer la situation des centres des deux courbes, on égale successivement à zéro les dérivées de leur double équation, prises par rapport à x et y, il viendra

$$(b+b')\{2(a-a')^2(b+b')[(b+b')x-(a+a')y]-2M[4x-(a+a')]\}\sqrt{bb'}$$

$$=\pm2(a+a')(b+b'(b-b')^2[(b+b')x-(a+a')y\sqrt{aa'}\,,$$

$$\pm(a+a')\{2(b-b')^2(a+a')[(b+b')x-(a+a')y]-2M[4y-(b+b')]\}\sqrt{aa'}$$

$$=2(a+a')(b+b')(b-b')^2[(b+b')x-(a+a')y]\sqrt{bb'}\,;$$

Or, ces deux équations sont évidemment satisfaites en posant, à la fois,

$$x=\frac{1}{4}(a+a')\,,\qquad y=\frac{1}{4}(b+b')\,;$$

donc nos deux courbes ont pour centre commun le milieu de la droite qui joint l'intersection des deux droites données au milieu de l'intervalle entre les deux points donnés.

5.° En posant, pour abréger,

$$(b+b')(a-a')^2\sqrt{bb'}\mp(a+a')(b-b')^2\sqrt{aa'}=N\,,$$

on tire encore de notre double équation, par différentiation,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{(b+b')\{N[(b+b')x-(a+a')y]-M[4x-(a+a')]\sqrt{bb'}\}}{(a+a')\{N[(b+b')x-(a+a')y]\pm M[4x-(b+b')]\sqrt{aa'}\}}\,;$$

valeur qui devient à l'origine

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\pm\frac{\sqrt{bb'}}{\sqrt{aa'}}\,,$$

l'équation commune des tangentes aux deux courbes par l'origine est donc

$$\frac{y}{\sqrt{bb'}}=\pm\frac{x}{\sqrt{aa'}}\,.$$

Il est aisé de voir, d'après cela, que si, ayant pris sur les deux droites données, à partir de leurs points d'intersection, et de part et d'autre de ce point, des parties respectivement égales à $\sqrt{aa'}$, $\sqrt{bb'}$, on considère les quatre points déterminés par cette construction comme les quatre sommets d'un parallélogramme ayant conséquemment ces deux droites pour diagonales, les droites qui, dans ce parallélogramme, joindront les milieux des côtés opposés seront les tangentes aux deux courbes par l'origine.

Si l'on demande présentement à quels caractères on peut reconnaître qu'une équation donnée du quatrième degré en x et y

appartient au système de deux lignes du second ordre, la réponse à cette question sera facile. En divisant, en effet, tous les termes de cette équation par son terme tout connu, elle aura alors 14 coefficiens. On égalera alors son premier membre au produit de deux facteurs du second degré en x et y, ayant aussi l'unité pour leur terme tout connu et ayant leurs cinq autres coefficiens indéterminés. En exprimant que ce produit est identiquement égal au polynome proposé, on parviendra à 14 équations entre les 10 coefficiens indéterminés. Eliminant donc ces 10 coefficiens entre elles, on aura 4 équations de condition qui devront se vérifier d'elles-mêmes, si la décomposition est possible; et, chemin faisant, on obtiendra, en outre, les valeurs des coefficiens des deux facteurs.

C'est par un tel procédé qu'on pourra se convaincre que l'équation de la page 394 du XI.^{e} volume n'exprime pas le système de deux sections coniques.