ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

PONCELET

Géométrie des courbes. Recherches diverses sur le lieu des centres des sections coniques, assujetties à moins de conditions que n'en exige leur détermination complète; renfermant, en particulier, la solution des deux problèmes de géométrie proposés à la page 372 du XI. e volume de ce recueil

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 12 (1821-1822), p. 233-248

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1821-1822__12__233_0>

GÉOMÉTRIE DES COURBES.

Recherches diverses sur le lieu des centres des sections coniques, assujetties à moins de conditions que n'en exige leur détermination complète; renfermant, en particulier, la solution des deux problèmes de géométrie proposés à la page 372 du XI.e volume de ce recueil;

Par M. Poncelet, capitaine du génie, ancien élève de l'école polytechnique.

PROBLÈME. *Déterminer le lieu des centres de toutes les sections coniques qui, touchant à la fois deux droites données, passent en outre par deux points donnés?*

Solution. Concevons une droite, par les deux points dont il s'agit; sa direction indéfinie sera celle d'une sécante commune, à la fois, à toutes les sections coniques proposées; ainsi, nous pouvons poser la question d'une manière plus générale, comme il suit:

Quel est le lieu des centres de toutes les sections coniques qui, ayant une corde commune, toucheraient en outre deux droites données?

La corde commune donnée pouvant être aussi bien une *corde idéale* qu'une *corde réelle*, relativement à toutes les sections coniques dont il s'agit (*), et le système de ces dernières devant jouir des mêmes propriétés dans les deux cas; on peut, en général, considérer ce système comme la projection ou perspective d'un autre système composé de circonferences de cercles, pour lesquelles la corde ou sécante commune est passée toute entière à l'infini; mais, dans ce nouveau système, les centres des sections coniques seront évidemment représentés par les pôles de la droite qui, sur le plan des sections coniques, est elle-même à l'infini; car la polaire du centre d'une telle courbe est nécessairement à l'infini; donc, la question est definitivement ramenée à cette autre purement élémentaire :

Quel est le lieu des pôles d'une droite donnée, par rapport à une suite de cercles quelconques tangens, à la fois, à deux droites données sur un plan?

Or, ces cercles présentent deux séries bien distinctes; l'une qui appartient à l'angle même formé par les deux droites données, l'autre qui appartient au supplément de cet angle. Dans l'une et l'autre, les centres des cercles demeurent sur une droite partageant l'angle correspondant en deux parties égales, tandis que les cordes de contact avec les côtés de cet angle se meuvent parallèlement à elles-mêmes et à la ligne des centres de l'autre série, c'est-à-dire, concourent avec elle en un point de la sécante à l'infini, commun, à la fois, à tous les cercles; enfin, il est facile de prouver, soit géométriquement, soit analitiquement, que le lieu des pôles d'une droite quelconque, donnée sur le plan de ces cercles, est, pour chacune des séries dont ils se composent, une section conique passant par le sommet commun des angles que l'on considère, et touchant en ce point la droite des centres qui lui correspond. Si donc on se reporte à la figure primitive, où les

(*) Voyez, sur les *cordes idéales*, le rapport inséré à la page 69 du XI.e volume du présent recueil.

cercles sont remplacés par des sections coniques quelconques, ayant une sécante commune, on en conclura sans peine,

1.° Que ces sections coniques forment deux séries distinctes, dont les cordes de contact avec les deux droites données pivotent séparément sur deux points fixes placés sur la sécante qui leur est à la fois commune (*), et divisant *harmoniquement*, ou en segmens proportionnels, tant la corde correspondante que la portion de la sécante comprise entre les deux droites données.

2.° Que ces deux points fixes sont en outre tels que l'un quelconque d'entre eux est le pôle de la droite qui passe par l'autre et par le sommet de l'angle des droites, relativement à toutes les sections coniques proposées.

3.° Que le lieu des centres de l'une quelconque des séries formées par ces sections coniques est lui-même une autre section conique passant par le sommet de l'angle des deux droites données, et touchant en ce point la polaire du point sur lequel pivotent les cordes de contact appartenant à cette série.

La discussion apprend en outre,

4.° Que chacune des deux courbes des centres passe par le milieu de la distance qui sépare entre eux les deux points donnés et par le milieu de la partie interceptée par les droites données sur la direction de la sécante commune qui contient les deux mêmes points.

5.° Qu'enfin le centre commun des deux courbes dont il s'agit est au point milieu de la distance qui sépare le sommet de l'angle des deux droites données et le point milieu, déjà mentionné, de la distance qui sépare les deux points donnés.

D'après cela, on voit que les deux sections coniques, lieux des

---

(*) *Mémoire sur les lignes du second ordre;* par M. BRIANCHON, art. XV et XVI.

centres des proposées ne diffèrent entre elles que par la direction de la tangente au sommet de l'angle des deux droites données.

Comparons maintenant ces résultats avec ceux de la page 395 du XI.e volume de ce recueil.

Soient CX, CY (fig. 1) les deux droites données, prises respectivement, comme à l'endroit cité, pour axes des x et des y; nommons pareillement a, b, a', b' les coordonnées des points donnés A, A'.

Cela posé, on aura d'abord, pour l'équation de la droite AA',

$$y-b=\frac{b-b'}{a-a'}(x-a) .$$

Soient x', y' les coordonnées du milieu k de la partie XY de cette droite interceptée entre les axes; nous aurons

$$x'=-\tfrac{1}{2}\frac{ab'-ba'}{b-b'} , \quad y'=+\tfrac{1}{2}\frac{ab'-ba'}{a-a'} .$$

Soient de plus x'', y'' les coordonnées du milieu I de la distance AA'; nous aurons

$$x''=\frac{a+a'}{2}, \quad y''=\frac{b+b'}{2} .$$

Soient enfin x''', y''' les coordonnées du milieu O de la droite CI, nous aurons

$$x'''=\frac{a+a'}{4} , \quad y'''=\frac{b+b'}{4} ;$$

Reste à déterminer la direction des droites CP, CQ, qui passent par l'origine C, et renferment les points P, Q sur lesquels pivotent les cordes de contact respectives appartenant aux deux séries de sections coniques proposées ; car, d'après ce qui précède, on aura tout ce qu'il faut pour déterminer complètement le lieu des centres de l'une et de l'autre séries.

Soient α, β les coordonnées de l'un P des deux points fixes dont il s'agit; l'équation de la droite correspondante CP sera

$$y=\frac{\beta}{\alpha}x=\lambda x,$$

en faisant, pour abréger, $\beta=\lambda\alpha$; de sorte que tout consiste à déterminer λ.

On pourrait, à cet effet, employer le calcul algébrique; mais il exigerait une suite d'opérations très-pénibles. On parviendra plus simplement au même but, en employant les relations obtenues par la géométrie. En effet, indépendamment de celles déjà signalées ci-dessus, et qui suffisent pour déterminer le point P que l'on considère en particulier, on a encore la suivante, qu'il serait, au surplus, facile d'en déduire, si déjà elle ne se trouvait toute établie,

$$\frac{\overline{PX}^2}{\overline{PY}^2}=\frac{AX}{AY}\cdot\frac{A'X}{A'Y} \text{ (*)};$$

Mais, en abaissant de l'un quelconque A des deux points donnés, les coordonnées Aa, Ab, sur les axes CX, CY, on a, par les triangles semblables AaX, AbY, CXY,

$$\frac{AX}{Aa}=\frac{XY}{CY}, \qquad \frac{AY}{Ab}=\frac{XY}{CX};$$

d'où

$$\frac{AX}{AY}=\frac{CX}{CY}\cdot\frac{Aa}{Ab}=\frac{CX}{CY}\cdot\frac{b}{a};$$

On aurait de même

(*) Voyez l'ouvrage déjà cité, art. XV.

$$\frac{A'X}{A'Y}=\frac{CX}{CY}\cdot\frac{b'}{a'};$$

et de plus

$$\frac{PX}{PY}=\frac{CX}{CY}\cdot\frac{\beta}{\alpha}=\frac{CX}{CY}\cdot\lambda\ ;$$

donc

$$\frac{AX}{AY}\cdot\frac{A'X}{A'Y}=\left(\frac{CX}{CY}\right)^2\cdot\frac{bb'}{aa'}=\left(\frac{CX}{CY}\right)^2\lambda^2\ ,$$

et par conséquent

$$\lambda=\pm\sqrt{\frac{bb'}{aa'}}\ .$$

De ces deux valeurs, l'une appartient évidemment au point P que l'on considère et l'autre au point Q, puisque ces deux points doivent jouir des mêmes propriétés. D'après cela, on a tout ce qu'il faut pour déterminer tous les élémens de l'une et de l'autre courbes, lieux des centres des coniques proposées ; car, en ne considérant que l'une d'entre elles, puisqu'elle passe par l'origine, son équation sera de la forme

$$Ax^2+By^2+2Cxy+2A'x+2B'y=0\ ;$$

On exprimera qu'elle touche la droite CP (*) en écrivant

$$A'+\lambda B'=0\ ;$$

devant ensuite passer par le point K, milieu de XY, et devant en outre avoir son centre au milieu O de CI, on aura encore

(*) *Annales*, tom. IX, pag. 131.

$$Ax'^2+By'^2+2Cx'y'+2A'x'+2B'y'=0 \ ,$$

$$Ax'''+Cy'''+A'=0 \ , \qquad By'''+Cx'''+B'=0 \ .$$

Remplaçant donc x', y', x''', y''' par leurs valeurs trouvées ci-dessus, ces trois dernières équations deviendront

$$\left.\begin{array}{l}(a-a')^2(ab'-ba')A-4(b-b')(a-a')^2A' \\ +(b-b')^2(ab'-ba')B+4(a-a')(b-b')^2B'\end{array}\right\} -2(a-a')(b-b')(ab'-ba')C=0 \ ,$$

$$(a+a')A+(b+b')C+4A'=0 \ ,$$

$$(b+b')B+(a+a')C+4B'=0 \ ;$$

en y joignant donc l'équation $A'+\lambda B'=0$, on en tirera

$$B=\frac{(a-a')^2}{(b-b')^2}A \ ,$$

$$C=-\frac{(a+a')(b-b')^2+(b+b')(a-a')^2\lambda}{(b-b')^2[(b+b')+\lambda(a+a')]}A \ ;$$

$$A'=\frac{(a-a')^2(b+b')^2-(a+a')^2(b-b')^2}{4(b-b')^2[(b+b')+\lambda(a+a')]}\lambda A \ ,$$

$$B'=-\frac{(a-a')^2(b+b')^2-(a+a')^2(b-b')^2}{4(b-b')^2[(b+b')+\lambda(a+a')]}A \ ;$$

substituant donc ces valeurs dans l'équation

$$Ax^2+By^2+2Cxy+2A'x+2B'y=0 \ ,$$

divisant par A, remettant successivement pour λ ses deux valeurs $+\sqrt{\frac{bb'}{aa'}}$, $-\sqrt{\frac{bb'}{aa'}}$, et chassant les dénominateurs, on aura, pour les équations des deux courbes, lieux des centres,

$$4(b-b')^2\left\{(b+b')+(a+a')\sqrt{\frac{bb'}{aa'}}\right\}x^2+4(a-a')^2\left\{(b+b')+(a+a')\sqrt{\frac{bb'}{aa'}}\right\}y^2$$

$$-8\left\{(a+a')(b-b')^2+(b+b')(a-a')^2\sqrt{\frac{bb'}{aa'}}\right\}xy$$

$$+2\{(a-a')^2(b+b')^2-(a+a')^2(b-b')^2\}\sqrt{\frac{bb'}{aa'}}\,x-2\{(a-a')^2(b+b')^2-(a+a')^2(b-b')^2\}y=0\ ;$$

et

$$4(b-b')^2\left\{(b+b')-(a+a')\sqrt{\frac{bb'}{aa'}}\right\}x^2+4(a-a')^2\left\{(b+b')-(a+a')\sqrt{\frac{bb'}{aa'}}\right\}y^2$$

$$-8\left\{(a+a')(b-b')^2-(b+b')(a-a')^2\sqrt{\frac{bb'}{aa'}}\right\}xy$$

$$-2\{(a-a')^2(b+b')^2-(a+a')^2(b-b')^2\}\sqrt{\frac{bb'}{aa'}}\,x-2\{(a-a')^2(b+b')^2-(a+a')^2(b-b')^2\}y=0\ ;$$

Pour rapprocher ces résultats de ceux obtenus à l'endroit déjà cité, il ne s'agit plus que de multiplier entre elles les deux équations qui précèdent ; car, si tout est exact de part et d'autre, on devra obtenir une équation du quatrième degré qui ne pourra différer au plus que par un facteur fonction des données de celle à laquelle on est parvenu au même endroit. Cette opération est nécessairement très-longue et très-laborieuse ; néanmoins nous avons eu le courage de l'entreprendre, et le plaisir d'en voir ressortir une vérification complète des raisonnemens géométriques qui précèdent, et qui s'étendent, comme on le voit, au cas où les points donnés sont imaginaires, et où la droite XY, qui passe par ces points, est par conséquent une sécante idéale, commune à toutes les sections coniques proposées.

En multipliant, en effet, nos deux équations entre elles, développant et observant que les diverses fonctions

aa'

$$aa'(b+b')^2-bb'(a+a')^2\ ,$$

$$aa'(b-b')^2-bb'(a-a')^2\ ;$$

$$aa'(b^2+b'^2)-bb'(a^2+a'^2)\ ,$$

$$\frac{(a+a')^2(b-b')^2-(b+b')^2(a-a')^2}{4}\ ,$$

$$-(ab-a'b')(ab'-ba')\ ,$$

sont toutes équivalentes, on trouvera que tous les termes de l'équation produit sont exactement divisibles par la quantité constante

$$\frac{4\left\{(a+a')^2(b-b')^2-(b+b')^2(a-a')^2\right\}}{aa'}\ ;$$

en supprimant donc ce facteur, on parviendra à l'équation du quatrième degré

$$\left.\begin{array}{l}(b-b')^4x^4-4(a+a')(b+b')^2(b-b')x^3y \\ +(a-a')^4y^4-4(a+a')(b+b')^2(a-a')xy^3\end{array}\right\} +\left\{3(a-a)^2(b-b')^2+8aa'(b-b')^2+8bb'(a-a')^2\right\}x^2y^2$$
$$\left.\begin{array}{l}+4(a+a')(b-b')^2x^3-4(a+a')\left\{2aa'(b-b')^2-bb'(a-a')^2\right\}xy^2+4bb'\left\{bb'(a-a')^2-aa'(b-b')^2\right\}x^2 \\ +4(b+b')(a-a')^2y^3-4(b+b')\left\{2bb'(a-a')^2-aa'(b-b')^2\right\}x^2y+4aa'\left\{aa'(a-a')^2-bb'(b-b')^2\right\}y^2\end{array}\right\}=0;$$

or, c'est à cela que revient exactement l'équation de la page 393 du tom. XI.^{e}, en la développant et l'ordonnant comme celle-ci ; ainsi, cette équation est décomposable en deux facteurs représentant chacun une section conique, conformément à ce qui avait été annoncé.

Supposons qu'il s'agisse de rechercher, parmi toutes les sections coniques qui, passant par les points A, A′, touchent les droites données CX, CY, celles d'entre elles qui sont en même temps des hyperboles équilatères ; ces hyperboles pouvant faire partie de l'une ou de l'autre séries de sections coniques proposées. Supposons, pour plus de simplicité, qu'on ne considère que celles dont les cordes de contact avec la droite donnée passent toutes par le point fixe P. D'après ce qui précède, ces hyperboles devront avoir leur centre quelque part, sur une section conique, passant par C, I, K, ayant la droite CI pour diamètre et CQ pour tangente à l'extrémité C de ce diamètre ; de telle sorte que la parallèle IL à CQ est la tangente à l'autre extrémité I de ce diamètre. Pour résoudre entièrement la question, il ne s'agit donc plus que de trouver une autre ligne qui renferme également les centres des hyperboles équilatères ; car on aura tout ce qu'il faut pour les déterminer d'une manière complète (*).

Nous avons vu ci-dessus que la droite CQ n'était autre chose que la polaire du point P, par rapport à toutes les sections coniques passant par A, A′ et touchant les deux droites données ; donc elle est aussi la polaire de ce point par rapport à chacune des hyperboles que l'on cherche ; mais, d'un autre côté, I est le point milieu de la corde AA′, commune à ces hyperboles ; donc

« Si, par chacun des points I, P, on mène une parallèle à
» la polaire ou à la corde qui passe par l'autre, le cercle qui
» passera par ces deux points et par celui où se coupent les pa-
» rallèles, passera aussi par le centre des hyperboles cherchées (**) »

Il résulte évidemment de là que le cercle qui passe par I et P et touche la parallèle IL à la polaire CQ de P doit renfermer les centres des hyperboles équilatères cherchées ; de sorte que ces centres doivent se trouver à l'intersection de ce cercle et de la section conique déjà construite, et qui a IL pour tangente commune avec lui au point I.

(*) Voyez le tome XI du présent recueil, page 212, Théorème VI.

(**) *Ibid.* pag. 208, Théor. III.

Le point I ne pouvant être évidemment le centre d'une hyperbole équilatère satisfaisant aux conditions du problème, il s'ensuit que, relativement à la série de sections coniques que l'on considère, et dont les cordes de contact passent par P, le problème ne peut avoir que deux solutions au plus, et par conséquent quatre solutions seulement, quand on le considère dans toute sa généralité. On peut d'ailleurs éviter entièremeut le tracé de la section conique auxiliaire lieu des centres, en observant que tout consiste à rechercher les points d'intersection du cercle correspondant avec la sécante qui est commune à ce cercle et à la section conique auxiliaire.

Dans un ouvrage que nous ferons paraître incessamment, nous donnerons le moyen de construire directement la sécante commune au système de deux sections coniques qui se touchent sur un plan, sans recourir au tracé des deux courbes. Il serait trop long de développer ici le principe de cette construction ; c'est pourquoi nous nous contenterons d'indiquer la solution appliquée au cas particulier qui nous occupe ; on sait d'ailleurs construire les deux points P, Q : tout consiste, en effet (*), à faire passer un cercle quelconque par les points donnés A, A' ; menant ensuite des points X, Y deux paires de tangentes à ce cercle, et joignant deux à deux, par des droites, les points de contact qui n'appartiennent pas à une même paire de tangente ; ces quatre droites donneront évidemment, par leur croisement mutuel, les deux points P, Q dont il s'agit.

Cela posé, soit G le second point d'intersection de CI et du cercle qui renferme les centres des hyperboles équilatères que l'on considère en particulier, en menant PG, cette droite ira rencontrer la droite CK en un premier point x de la sécante commune ; menant ensuite la tangente au point G du cercle, cette dernière

---

(*) *Mémoire sur les lignes du second ordre ;* par M. BRIANCHON, pag. 21.

droite ira rencontrer CQ en un second point y de la sécante commune, qui se trouvera ainsi complètement déterminée, et coupera, en général, notre cercle en deux points qui seront les centres des hyperboles demandées.

On voit, d'après cela, en quoi consiste l'inadvertance commise dans l'énoncé du *Théorème X* de la page 218 du tome XI des *Annales*; on n'y a considéré qu'un seul cercle, au lieu de deux qu'il fallait envisager; et l'on a appliqué à ce cercle unique les propriétés qui lui appartenaient en commun avec l'autre. Voici donc le nouvel énoncé qu'il faut substituer au premier :

Les centres de toutes les hyperboles équilatères, au nombre de quatre au plus, tangentes à deux droites et passant par deux points donnés, sont situés sur deux circonférences de cercles distinctes, aux intersections respectives de ces circonférences et de deux droites faciles à déterminer.

D'après ce qui vient d'être dit sur le lieu des centres des sections coniques assujetties à passer par deux points et à toucher deux droites données, on pourrait penser que le lieu des centres des sections coniques assujetties à passer par trois points et à toucher une droite donnée, qui se présente, comme le premier, sous la forme d'une courbe du quatrième degré, doit aussi être le système de deux sections coniques, et que conséquemment le premier membre de l'équation du quatrième degré qui exprime ce lieu doit être décomposable en deux facteurs du second degré; mais si, considérant, comme ci-dessus, une des sécantes communes à toutes les sections coniques proposées qui renferment, deux à deux, les trois points donnés, on suit la figure en projection sur un nouveau plan, de manière que toutes ces sections coniques deviennent des cercles, les centres de ces sections coniques se trouvant toujours représentés, sur le nouveau plan, par les pôles d'une droite quelconque, relatifs aux cercles dont il s'agit, on aura à considérer, dans la projection « Quel est le lieu des pôles d'une droite » donnée, par rapport à une suite de cercles touchant une autre

» droite quelconque , et passant en outre
» aussi donné de position ».

Or, on voit que, tandis que, dans la pr
ci-dessus , la suite des centres des cercle:
droites distinctes ; ici, au contraire , la suite
est sur une parabole ayant le point donné
tangente aux cercles pour directrice ; de so
ne forment qu'une seule et unique série ,
deux autres distinctes, une section conique c
considérée comme représentant le système
non séparables ; il est donc naturel de croire
du cercle variable que l'on considère parc
lieu des pôles de la droite donnée n'est pl
tème de deux sections coniques distinctes ,
tiellement du quatrième degré.

Au reste, quand le point, par lequel p
est sur la tangente commune donnée , c'est
de la parabole est sur la directrice , cett
doublement avec son axe , et la question
« le lieu des pôles d'une droite donnée , s
» de cercles ayant un point de contact com
» ralement , ayant une sécante commune »
prouver , soit géométriquement , soit d'un
qu'alors le lieu des pôles est une section
a été établi, page 395 du volume déjà cité

Il résulte aussi de cette dernière remarqu
des sections coniques assujetties à passer p
sur un plan est également une autre sec
d'ailleurs par les points de concours des
directions des côtés opposés du quadrilatère
les quatre points dont il s'agit ; propositic
la page 219 du tome XI.e des *Annales*, e
ment à la page 396 du même volume.

En réunissant ces considérations sur le lieu des centres des sections coniques variables suivant certaines lois à celles relatives au cas particulier où les sections coniques touchent à la fois quatre droites données, ou n'en touchent que trois seulement, en passant d'ailleurs par un point donné ; lesquels ont été traités à la page 109 du présent volume, on aura, comme l'on voit, une solution complète, et purement géométrique, du problème proposé à la page 228 du tom. XI.[e]. Il serait d'ailleurs inutile d'examiner les moyens de construire les différens lieux des centres par la connaissance des points particuliers par où ils passent, cette tâche se trouvant déjà parfaitement remplie dans l'article déjà cité de la page 379 du XI.[e] volume. On voit, au surplus, que ces différentes questions, relatives au lieu des centres des sections coniques variables, assujetties à quatre conditions données, conduisent immédiatement, au moyen des principes de projection employés dans ce qui précède, à celles où, à la place du lieu des centres, on cherche le lieu des pôles d'une même droite donnée, sur le plan des sections coniques ; de sorte que les solutions doivent être les mêmes de part et d'autre, quant au degré du lieu que l'on considère. Enfin, au moyen de la *Théorie des pôles et polaires réciproques* (*), on est immédiatement conduit à la solution des questions analogues sur les lieux qu'enveloppent les polaires d'un point donné, sur le plan d'une suite de sections coniques, assujetties aux mêmes conditions de passer par des points donnés ou de toucher des droites données. Ainsi, par exemple, il en résulte que

Les polaires d'un point donné sur le plan d'une suite de sections coniques qui passent par les quatre mêmes points donnés vont toutes concourir en un point unique différent du premier, et qui jouit avec lui de la même propriété réciproque.

Pareillement :

(*) *Annales*, tom. VIII, pag. 201.

Les polaires d'un point donné sur le plan d'une suite de sections coniques tangentes à quatre droites données, enveloppent une autre section conique touchant à la fois les trois diagonales du quadrilatère complet formé par ces quatre droites.

Et ainsi du reste.

Il résulte encore des considérations qui précèdent une solution très-simple des deux problèmes de géométrie proposés à la page 372 du tome XI.e des *Annales*, et conçus en ces termes :

PROBLÈME I. Étant donnés, sur un plan, trois droites indéfinies et deux points, correspondant respectivement à deux d'entre elles; sur quelle courbe doit être situé un troisième point pour que les trois points puissent être considérés respectivement comme les pôles des trois droites, par rapport à une même section conique?

PROBLÈME II. Étant donnés, sur un plan, trois points et deux droites indéfinies, correspondant respectivement à deux d'entre eux; à quelle courbe une troisième droite doit-elle toujours être tangente pour que les trois droites puissent être considérées respectivement comme les polaires des trois points, par rapport à une même section conique?

Considérons, en effet, deux points donnés et les deux droites qui en doivent être les polaires respectives, par rapport à une même section conique; en joignant ces deux points par une droite indéfinie, elle ira rencontrer leurs polaires en deux nouveaux points tels que la distance comprise entre chacun d'eux et celui des deux premiers qui lui correspond devra être divisée harmoniquement à la fois par toutes les sections coniques que l'on considère; or, quand deux points inconnus P, Q, doivent diviser, à la fois, en segmens proportionnels, deux distances données XY, AA′, situées sur la même droite, ces deux points sont, d'après ce qui a été dit plus haut, entièrement déterminés de situation, à l'égard des quatre autres, et, de plus, ils sont toujours uniques; donc, toutes les sections coniques proposées passent à la fois par ces deux points ; d'un autre côté, les deux points donnés étant respectivement les pôles des deux droites données, la droite qui les renferme aura elle-même pour pôle le point d'intersection des deux droites dont il s'agit ; c'est-à-dire que les sections coniques proposées, en passant par les deux mêmes points trouvés ci-dessus, auront en outre mêmes tangentes en ces points, allant concourir à l'intersection des deux droites données. Ainsi, les deux questions proposées reviennent aux suivantes :

I. *Quel est le lieu des pôles d'une même droite, par rapport à une suite de sections coniques touchant toutes aux mêmes points les deux côtés d'un angle donné ?*

I. *Quelle est l'enveloppe des polaires d'un même point, par rapport à une suite de sections coniques, touchant toutes aux mêmes points les deux côtés d'un angle donné ?*

Ces questions ont évidemment leur réponse dans ce qui précède, ou, plus généralement, dans la théorie des pôles ; et il en résulte que, pour la première, le lieu demandé est une ligne droite qui passe par le sommet de l'angle donné et par le point qui est le quatrième harmonique des deux points de contact et du point où la droite donnée rencontre celle qui renferme ces mêmes points de contact.

Pour la seconde question, l'enveloppe des polaires du point donné est elle-même évidemment un point placé sur la droite indéfinie qui renferme les deux points de contact des sections coniques, et dont la position sur cette droite est telle qu'il divise la distance comprise entre ces points en deux segmens proportionnels à ceux qu'y détermine la droite qui contient le sommet de l'angle donné et le point des polaires duquel on recherche l'enveloppe (*).

(*) Dans la lettre d'envoi de l'article qu'on vient de lire, M. le capitaine Poncelet s'exprime ainsi :

« En vous adressant, Monsieur, ces recherches rédigées à la hâte, je n'ai » nullement la prétention de croire que, telles qu'elles sont, elles soient dignes

Réflexions