TREUIL

Algèbre élémentaire. Démonstration de quelques théorèmes d'algèbre

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 12 (1821-1822), p. 104-108
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1821-1822__12__104_0>

ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE.

Démonstration de quelques théorèmes d'algèbre ;

Par M. Treuil, professeur de mathématiques au collége royal de Versailles, professeur de mathématiques et de physique des Pages du Roi.

Soient les deux expressions

$$a+b+\sqrt{ab}\,, \qquad a'+b'+\sqrt{a'b'}\,;$$

si l'on a $\frac{b}{a}=\frac{b'}{a'}$, on aura

$$(a+b+\sqrt{ab})+(a'+b'+\sqrt{a'b'})=(a+a')+(b+b')+\sqrt{(a+a')(b+b')}\,; \quad \text{(I)}$$

car, soit $\frac{b}{a}=\frac{b'}{a'}=m$, il viendra $b=ma$, $b'=ma'$, et de là

$$a+b+\sqrt{ab}=a(1+m+\sqrt{m})\,,$$

$$a'+b'+\sqrt{a'b'}=a'(1+m+\sqrt{m})\,,$$

d'où, en ajoutant

$$(a+b+\sqrt{ab})+(a'+b'+\sqrt{a'b'})=(a+a')+(ma+ma')+\sqrt{(a+a')(ma+ma')}\,,$$

qui,

qui, en mettant dans le second membre b et b' pour ma et ma' revient au théorème (I). On prouvera d'une manière tout-à-fait semblable que

$$(a+b+\sqrt{ab})-(a'+b'+\sqrt{a'b'})=(a-a')+(b-b')+\sqrt{(a-a')(b-b')}\,. \quad \text{(II)}$$

Si, dans l'équation (I), on suppose que a', b' se changent respectivement en $a'+a''$, $b'+b''$, elle deviendra

$$(a+b+\sqrt{ab})+\{(a'+a'')+(b'+b'')+\sqrt{(a'+a'')(b'+b'')}\}$$

$$=(a+a'+a'')+(b+b'+b'')+\sqrt{(a+a'+a'')(b+b'+b'')}\;;$$

mais, si l'on a $\frac{b''}{a''}=\frac{b'}{a'}=\frac{b}{a}$, on aura, par ce qui précède,

$$(a'+a'')+(b'+b'')+\sqrt{(a'+a'')(b'+b'')}=(a'+b'+\sqrt{a'b'})+(a''+b''+\sqrt{a''b''});$$

donc, en substituant,

$$\left.\begin{array}{l}(a+b+\sqrt{ab})\\ +(a'+b'+\sqrt{a'b'})\\ +(a''+b''+\sqrt{a''b''})\end{array}\right\}=(a+a'+a'')+(b+b'+b'')+\sqrt{(a+a'+a'')(b+b'+b'')}.$$

On pourrait présentement supposer que a'' et b'' se changent respectivement en $a''+a'''$ et $b''+b'''$, et continuer ainsi indéfiniment, en supposant toujours $\frac{b'''}{a'''}=\frac{b''}{a''}=\frac{b'}{a'}=\frac{b}{a}$, et ainsi de suite ; d'où l'on voit qu'en posant, pour abréger,

$$\Sigma(a+b+\sqrt{ab})=(a+b+\sqrt{ab})+(a'+b'+\sqrt{a'b'})+(a''+b''+\sqrt{a''b''})+\ldots$$

$$\Sigma(a)=a+a'+a''+\ldots\ldots, \qquad \Sigma(b)=b+b'+b''+\ldots\ldots;$$

et supposant d'ailleurs

$$\frac{b}{a}=\frac{b'}{a'}=\frac{b''}{a''}=\ldots\ldots,$$

on doit avoir

$$\Sigma(a+b+\sqrt{ab})=\Sigma(a)+\Sigma(b)+\sqrt{\Sigma(a).\Sigma(b)}\,. \tag{III}$$

On démontrerait pareillement que, si l'on fait

$$\Sigma(a+b+c+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}+\sqrt{ab})=\begin{cases}(a+b+c+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}+\sqrt{ab})\\+(a'+b'+c'+\sqrt{b'c'}+\sqrt{c'a'}+\sqrt{a'b'})\\+(a''+b''+c''+\sqrt{b''c''}+\sqrt{c''a''}+\sqrt{a''b''})\\+\ldots\ldots\ldots\ldots\end{cases}$$

$$\Sigma(a)=a+a'+a''+\ldots, \quad \Sigma(b)=b+b'+b''+\ldots, \quad \Sigma(c)=c+c'+c''+\ldots;$$

et qu'on ait à la fois

$$\frac{a}{c}=\frac{a'}{c'}=\frac{a''}{c''}=\ldots, \qquad \frac{b}{c}=\frac{b'}{c'}=\frac{b''}{c''}=\ldots,$$

on aura

$$\Sigma(a+b+c+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}+\sqrt{ab})$$

$$=\Sigma(a)+\Sigma(b)+\Sigma(c)+\sqrt{\Sigma(b).\Sigma(c)}+\sqrt{\Sigma(c).\Sigma(a)}+\sqrt{\Sigma(a).\Sigma(b)}\,. \tag{IV}$$

Le théorème (III) trouve son application en géométrie. Si, en effet, a, a', a'',..... sont les bases inférieures et b, b', b'',.....

les bases supérieures respectives des troncs de pyramides triangulaires résultant de la décomposition d'un tronc de pyramide quelconque à bases parallèles, en représentant par v, v', v'',..... les volumes des premiers et par V le volume du dernier; et si, en outre, on représente par A, B ses deux bases, on aura

$$A=\Sigma(a)\,,\quad B=\Sigma(b)\,,\quad V=\Sigma(v)\,;$$

mais on démontre, par les élémens que h étant la hauteur du tronc

$$v\;=(a+b+\sqrt{ab})\frac{h}{3}\,,$$

$$v'=(a'+b'+\sqrt{a'b'})\frac{h}{3}\,,$$

$$v''=(a''+b''+\sqrt{a''b''})\frac{h}{3}\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

donc

$$V=\{\Sigma(a+b+\sqrt{ab})\}\frac{h}{3}\,;$$

mais on a de plus

$$\frac{b}{a}=\frac{b'}{a'}=\frac{b''}{a''}=\ldots\ldots;$$

donc

$$\Sigma(a+b+\sqrt{ab})=\Sigma(a)+\Sigma(b)+\sqrt{\Sigma(a).\Sigma(b)}=A+B+\sqrt{AB}\,;$$

donc enfin

$$V=(A+B+\sqrt{AB})\frac{h}{3}\,.$$

Versailles, le 11 juin 1821.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problèmes de Géométrie.

I. Quel est le plus grand de tous les quadrilatères inscrits à une même ellipse ?

II. Quel est le plus grand de tous les exaèdres octogones inscrits à une même ellipsoïde ?

III. Quelle est la plus petite de toutes les ellipses circonscrites à un même parallélogramme donné ?

IV. Quel est le plus petit de tous les ellipsoïdes circonscrits à un même parallélipipède donné ?

On demande l'équation la plus générale de la courbe qui jouit de cette propriété que, si par chacun de ses points on lui mène une normale terminée à l'axe des abscisses, cette normale ait même longueur que l'ordonnée qui a son pied au même point de cet axe ?