ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

BRIANCHON
PONCELET

Géométrie des courbes. Recherches sur la détermination d'une hyperbole équilatère, au moyen de quatre conditions données

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 11 (1820-1821), p. 205-220
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1820-1821__11__205_0>

GÉOMÉTRIE DES COURBES.

Recherches sur la détermination d'une hyperbole équilatère, au moyen de quatre conditions données;

Par MM. Brianchon, capitaine d'artillerie, professeur de mathématiques à l'école d'artillerie de la garde royale, et Poncelet, capitaine du génie, employé à Metz.

Théorème I. Dans tout triangle inscrit à une hyperbole équilatère, le point de concours des trois hauteurs est situé sur la courbe.

Démonstration. On sait que, pour tout hexagone ABCDEF (fig. 1) inscrit à une section conique, les trois points de concours H, I, K, des côtés opposés sont en ligne droite (*). Si donc, la courbe ayant des branches infinies, on suppose que l'hexagone ait deux de ses sommets, comme E, F, situés à l'infini, le point I, concours des deux côtés opposés EF, BC, se trouvera à l'infini; ce qui revient à dire que BC et HK seront parallèles.

Maintenant, la courbe étant une hyperbole, il est clair que les deux côtés DE, FA, adjacens à EF qui est à l'infini, seront respectivement parallèles aux deux asymptotes, et, partant, seront

(*) Voyez, pour les démonstrations géométrique et algébrique de cette propriété, les pages 78 et 381 du IV.e volume du présent recueil.

J. D. G.

rectangulaires, pour le cas de l'hyperbole équilatère, qui est celui dont il s'agit ici.

Les deux derniers sommets E, F de l'hexagone inscrit à cette courbe étant ainsi portés à l'infini, les quatre autres resteront arbitraires. Soient donc pris à volonté les trois premiers A, B, C (fig. 2), et soit marqué le quatrième D tel que les deux côtés AB, CD, respectivement opposés à DE, FA, soient rectangulaires entre eux. Il résulte de ceci que AH est perpendiculaire sur DK. D'ailleurs AK est perpendiculaire sur DH, par la propriété des asymptotes; donc le point A est le croisement des trois hauteurs du triangle DHK; donc AD est perpendiculaire sur HK, et conséquemment aussi sur BC, parallèle à HK. Mais, par construction, CD est perpendiculaire sur AB; donc le point D est le croisement des trois hauteurs du triangle ABC. Or, le triangle ABC a été inscrit à volonté à la courbe; donc généralement « dans tout triangle » ABC, inscrit à une hyperbole équilatère, le point de croisement » D des trois hauteurs est un point de la courbe »; *ce qu'il fallait démontrer*.

Si l'un A des angles du triangle inscrit varie de grandeur, en tendant vers l'angle droit, le point D se déplacera sur la courbe en s'approchant continuellement du sommet A; ce qui revient à dire que la sécante AD, perpendiculaire sur BC, tendra sans cesse à toucher la courbe en A, et qu'enfin elle sera tangente quand l'angle A sera droit. Donc.

THÉORÈME II. Dans tout triangle rectangle inscrit à une hyperbole équilatère, la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit sur l'hypothénuse est tangente à la courbe.

Il suit de là que, si l'angle droit occille sur son sommet, l'hypothénuse se déplacera parallèlement à elle-même et à la normale menée à ce sommet; ce qui est un cas particulier du beau théorème démontré par M. Frégier dans le présent recueil (*).

(*) Voyez tom. VI, pag. 229 et 321, et tom. VII, pag. 95. *J. D. G.*

Au moyen de ce qui précède, si on connaissait deux points A, B (fig. 3) de la courbe, et la tangente AP en l'un A de ces points, on pourrait en construire un troisième C en cette manière : du point B abaissez une perpendiculaire BC sur la tangente donnée, elle ira couper au point cherché C la perpendiculaire AC à AB.

On sait donc résoudre ces trois problèmes :

Décrire une hyperbole équilatère dont on a trois points et la tangente en l'un d'eux ?

Décrire une hyperbole équilatère dont on a deux points et les tangentes en ces points ?

Décrire une hyperbole équilatère dont on a deux points, la tangente en l'un de ces points et une autre tangente quelconque ?

En effet, par la construction qui vient d'être indiquée, on obtiendra un nouveau point de la courbe; après quoi, pour achever, on aura recours aux solutions connues de ces questions : (*)

Décrire une section conique dont on a quatre points et la tangente en l'un d'eux ?

Décrire une section conique dont on a trois points et les tangentes en deux de ces points ?

Décrire une section conique dont on a trois points, une tangente quelconque et la tangente en l'un de ces points ?

Il résulte encore du théorème I que, lorsqu'on connaît trois points A, B, C (fig. 2) d'une hyperbole équilatère, on en a un quatrième D qui est le croisement des trois hauteurs du triangle ABC; en sorte qu'on sait aussi résoudre ces deux problèmes :

Décrire une hyperbole équilatère dont on a quatre points ?

Décrire une hyperbole équilatère dont on a trois points et une tangente ?

Car, au moyen de la construction indiquée, on obtiendra un

(*) *Mémoire sur les lignes du second ordre, etc.*, par C. J. BRIANCHON, Paris, 1817.

nouveau point de la courbe ; après quoi, pour achever, on aura recours aux solutions connues de ces questions : (*)

Décrire une section conique dont on a cinq points ?

Décrire une section conique dont on a quatre points et une tangente ?

THÉORÈME III. Si deux points, situés sur le plan d'une hyperbole équilatère, sont les milieux ou les pôles respectifs de deux cordes ou de deux droites quelconques également situées sur ce plan ; et que, par chacun d'eux, on mène une parallèle à la corde ou à la polaire qui correspond à l'autre, le cercle qui passera par ces deux points et par celui où se coupent les parallèles passera aussi par le centre de la courbe.

Démonstration. Soient, en premier lieu, CE, CF (fig. 4) les directions indéfinies des deux cordes en question, I, K leurs milieux respectifs, O le centre de l'hyperbole équilatère et EF l'une de ses asymptotes, rencontrant en E, F les deux cordes CI, CK prolongées ; les droites OK, OI seront les diamètres de la courbe, conjugués à la direction de ces cordes.

Cela posé, puisque l'angle des asymptotes est droit et que le point K est le milieu de la partie interceptée par ces asymptotes sur la direction de CF, la distance KO=KF et par conséquent l'angle KFO=KOF. Par la même raison, l'angle IEO=IOE ; mais, à cause du triangle CEF, l'angle C est supplément de la somme des angles E, F, est par conséquent supplément de celle des angles KOF, IOE ; donc il est égal à l'angle IOK, formé de l'autre côté de IK par les diamètres IK, IO. D'ailleurs, on prouverait, de la même manière que, si le point O était supposé du côté du sommet de l'angle C, l'angle IOK, formé par ces mêmes diamètres, serait égal au supplément de l'angle C ; donc il est sur la circonférence du cercle qui passe par les points K, I et par

(*) Même ouvrage.

celui L où se coupent les parallèles KL, IL menées par chacun d'eux à la corde qui passe par l'autre : c'est-à-dire que,

1.° « Si par chacun des points milieux de deux cordes quel-
» conques d'une hyperbole équilatère, on mène une parallèle à la
» corde qui correspond à l'autre, le cercle qui passera par ces deux
» points et par celui où se coupent les parallèles passera aussi par
» le centre de la courbe. »

En second lieu, soient PG, PH (fig. 5) deux droites quelconques, situées sur le plan d'une hyperbole équilatère, R, Q leurs pôles respectifs, par rapport à cette courbe. Concevons, par le point Q, la parallèle QC à la polaire PH de ce point ; la corde correspondante sera évidemment partagée en deux parties égales en Q ; car, d'après la théorie généralement connue des pôles, « le
» diamètre d'une section conique qui renferme les milieux de toutes
» les cordes parallèles à une même droite, située sur le plan de
» la courbe, passe aussi par le pôle de cette droite ».

Par la même raison, si par le point R, pôle de la droite PG, on mène la parallèle CR à cette droite, rencontrant la première au point C, la corde qui lui correspond, dans l'hyperbole équilatère, sera divisée en deux parties égales en R; ainsi, les points R, Q seront les milieux des droites ou cordes indéfinies RC, QC, qui passent respectivement par ces points, et sont parallèles aux deux droites PG, PH.

Il suit de là et de ce qui précède que

2.° « La circonférence qui passe par deux points quelconques
» R, Q, situés sur le plan d'une hyperbole équilatère, et par le
» point L où se coupent les parallèles menées par chacun d'eux
» à la polaire PG ou PH de l'autre passe aussi par le centre de
» la courbe ».

Il est d'ailleurs évident que les mêmes choses auraient encore lieu si, à la place de l'une des deux droites et de son pôle, on substituait une corde et son point milieu ; ce qui complète la démonstration du théorème énoncé.

S'il arrivait, dans le cas où l'on considère deux droites PG, PH et leurs pôles R, Q, que chacun de ces derniers fût situé sur la droite qui correspond à l'autre; c'est-à-dire, si le point Q se trouvait sur PG et le point R sur PH, les parallèles RL, QL se confondraient évidemment avec ces droites; donc la circonférence qui renferme le centre de l'hyperbole équilatère correspondante passerait alors par le point P où se rencontrent ces mêmes droites; mais, d'après la théorie des pôles, ce point a évidemment pour polaire la droite qui passe par les points Q, R; de sorte que ces trois points sont tels que chacun d'eux est le pôle de la droite qui contient les deux autres; on peut donc énoncer la proposition suivante :

THÉORÈME IV. Lorsque trois points situés sur le plan d'une hyperbole équilatère sont tels que chacun d'eux est le pôle de la droite qui contient les deux autres, le cercle qui passe par ces trois points passe aussi par le centre de la courbe.

Quatre tangentes AB, BC, CD, DE (fig. 6) à une même section conique, forment, par leur pénétration mutuelle, un quadrilatère complet TABCSD, dont les trois diagonales AC, BD, ST sont, comme l'on sait, telles que « chacune d'elles est la po- » laire de l'intersection des deux autres »; de sorte que, si la courbe est une hyperbole équilatère, la circonférence qui passera par les trois points P, Q, R, intersection des diagonales, passera aussi, d'après ce qui précède, par le centre de la courbe; d'où résulte ce nouveau théorème:

THÉORÈME V. Si l'on mène quatre tangentes quelconques à une hyperbole équilatère, le centre de la courbe sera situé sur la circonférence qui passe par les trois points d'intersection des diagonales du quadrilatère complet formé par ces tangentes.

Ou, ce qui revient au même,

Les centres de toutes les hyperboles équilatères tangentes à quatre droites quelconques, tracées sur un plan, sont situés sur la circonférence d'un cercle unique qui passe par les trois points *d'intersection des diagonales du quadrilatère complet formé par ces droites.*

D'un autre côté, il résulte d'un théorème découvert par Newton (*Principes mathématiques*, *etc.*, livre I, Lemme XXV, Corollaire 3) que

« Dans tout quadrilatère circonscrit à une conique quelconque,
» les trois points milieux des diagonales sont sur une droite unique
» qui passe par le centre de la courbe »,

Ou, ce qui revient encore au même,

« Les centres de toutes les sections coniques tangentes à quatre
» droites quelconques, tracées sur un même plan, sont situés sur
» la droite unique qui passe par les trois points milieux des dia-
» gonales du quadrilatère complet formé par ces droites ».

Donc, dans le cas de l'hyperbole équilatère, le centre de la courbe se trouve à la fois sur la droite unique dont il s'agit et sur la circonférence du cercle qui passe par les trois points P, Q, R, où se croisent les diagonales; en sorte qu'on peut aussi résoudre ce nouveau problème :

Décrire une hyperbole équilatère dont on a quatre tangentes ?

En effet, ayant déterminé, au moyen de ce qui précède, le centre de la courbe (et il y en a évidemment deux, en général, qui résolvent la question), on le joindra par une droite avec l'un quelconque P des points d'intersection des diagonales, laquelle ira rencontrer la diagonale opposée BD, polaire de P en un point X qui, d'après la théorie des pôles, sera nécessairement le milieu de la corde correspondante, et par conséquent aussi le milieu de la partie interceptée par les asymptotes sur cette diagonale; portant donc, à partir du point X, deux distances égales à OX, sur la direction de la droite indéfinie BDX, leurs extrémités appartiendront aux deux asymptotes de la courbe, qui ainsi sera parfaitement déterminée de grandeur et de situation : car le point qui divisera en deux parties égales la distance interceptée par les asymptotes sur l'une quelconque des quatre tangentes données sera le point de contact de cette tangente.

Supposons maintenant que ABCD soit un quadrilatère inscrit à une section conique quelconque ; les points de concours S, T de ses côtés opposés et le point d'intersection Q de ses deux diagonales simples seront encore, d'après la théorie des pôles, trois points tels que « chacun d'entre eux sera le pôle de la droite qui passe par » les deux autres » ; donc, si la courbe est une hyperbole équilatère, son centre se trouvera situé, d'après le Théorème IV démontré ci-dessus, sur la circonférence du cercle qui passe par les trois points Q, S, T, et par conséquent :

THÉORÈME VI. Dans tout quadrilatère simple, inscrit à une hyperbole équilatère quelconque, le cercle passant par les deux points de concours des côtés opposés et par le point d'intersection des diagonales passe aussi par le centre de la courbe.

Il suit de là que, quand quatre points A, B, C, D sont donnés sur un plan, on connaît aussi la circonférence qui passe par le centre de l'hyperbole équilatère passant par ces quatre points (*) ; d'ailleurs le Théorème III indique d'autres circonférences qui renferment également ce centre ; donc il est entièrement déterminé de position sur le plan des quatre points donnés, et il en est par conséquent de même des asymptotes de la courbe ; car, si l'on prend le milieu K de l'une quelconque CD des distances qui séparent deux à deux les points donnés, puisque l'on porte, à partir de K, sur la direction infinie de CD, deux longueurs égales à la distance de ce même point au centre de la courbe ; leurs extrémités appartiendront aux asymptotes de cette courbe. Voilà donc

(*) On peut remarquer qu'à quatre mêmes points donnés sur un plan correspondent toujours trois quadrilatères simples différens, mais qui tous redonnent les mêmes points Q, S, T ; en sorte que la circonférence en question est unique.

une

une nouvelle solution, très-directe et très-simple, du problème déjà résolu plus haut, dans lequel il s'agit de *décrire une hyperbole équilatère passant par quatre points donnés sur un plan*.

On peut tirer du Théorème III d'autres conséquences également remarquables.

Que A, B, C (fig. 7) soient trois points quelconques, appartenant à une hyperbole équilatère ; si l'on divise les côtés CA, CB du triangle ABC, formé par ces points, en deux parties égales, aux nouveaux points I, K, et que, par ces derniers, on mène les parallèles IL, KL aux côtés CB, CA, elles viendront se couper en un point L qui, d'après le théorème cité, appartiendra au cercle qui, passant par I, K, passe en outre par le centre de l'hyperbole équilatère ; mais le point L se confond évidemment avec le milieu du troisième côté AB du triangle ABC ; donc

THÉORÈME VII. Dans tout triangle inscrit à une hyperbole équilatère, le cercle qui passe par les trois points milieux des côtés passe aussi par le centre de la courbe.

Ou, ce qui revient au même,

Les centres de toutes les hyperboles équilatères circonscrites à un même triangle quelconque sont sur la circonférence d'un cercle qui renferme les trois points milieux des côtés de ce triangle.

On peut conclure de là et de ce qui précède que, quand un quadrilatère quelconque ABCD (fig. 6) est inscrit à une hyperbole équilatère, le centre de la courbe doit se trouver, à la fois, sur les circonférences de huit cercles différens.

En effet, si l'on trace les diagonales AC, BD de ce quadrilatère, on obtiendra quatre triangles inscrits à la courbe, dont les points milieux G, H, I, K, L, M, qui sont aussi ceux des diagonales et des côtés du quadrilatère détermineront un égal nombre de circonférences, passant par le centre de cette courbe ; d'ailleurs, ce centre devra aussi se trouver sur la circonférence qui renferme les trois points Q, S, T, où se coupent les diagonales et les côtés opposés du quadrilatère (Théorème VI) ; et il en sera de même encore de chacune des trois circonférences qui, passant par les points milieux de deux côtés opposés ou des deux diagonales de ce quadrilatère, renfermerait aussi le point où le coupent les deux parallèles menées par chacun d'eux (Théorème III) au côté ou à la diagonale qui renferme l'autre.

Le point où se coupent les huit circonférences dont il vient d'être question est nécessairement unique; car, s'il était possible qu'il y en eût un second, toutes les circonférences devraient y passer à la fois, comme par le premier; or, toutes ces circonférences, excepté celle qui renferme les points Q, S, T, et pourvu qu'on ne combine pas entre elles celles qui passent par les milieux des deux côtés opposés ou des diagonales du quadrilatère, sont évidemment telles que, prises deux à deux, elles ont pour intersection commune l'un des points milieux de ces côtés et de ces diagonales; donc il faudrait que tous ces points milieux fussent confondus en un seul, ce qui est absurde; donc enfin le centre de l'hyperbole équilatère qui passe par quatre points donnés sur un plan est unique.

Si l'on fait attention à la manière particulière dont se trouve déterminé le point dont il s'agit, relativement aux côtés et diagonales du quadrilatère ABCD, il sera permis d'en déduire la conséquence générale qui suit :

THÉORÈME VIII. Quatre points étant pris à volonté sur un plan, il existe un autre point, et un seul point, tel qu'en le joignant par des droites avec les milieux des six distances qui séparent les quatre premiers deux à deux, l'angle formé par deux quelconques de ces droites est égal à celui des deux distances qui leur correspondent, ou en est le supplément. Ce point unique est, en outre, le centre de l'hyperbole équilatère passant par les quatre points dont il s'agit.

Ce théorème souffre pourtant une exception qu'il est nécessaire de signaler : c'est lorsque l'un D (fig. 7) des quatre points que l'on considère est le croisement des hauteurs du triangle ABC, formé par les trois autres ; car alors (Théorème I), il y a une infinité d'hyperboles équilatères passant par les quatre points A, B, C, D ; et par conséquent la position du centre de la courbe ne saurait être unique ; elle est nécessairement indéterminée. Or, il résulte de là que les huit circonférences de cercles dont il vient d'être question, et qui renferment simultanément le centre ; doivent se confondre en un seul et même cercle ; ce qui donne lieu à la proposition suivante qui offre un nouveau principe à la géométrie élémentaire :

THÉORÈME IX. Le cercle qui passe par les pieds des perpendiculaires abaissées des sommets d'un triangle quelconque sur les côtés qui leur sont opposés, passe aussi par les milieux de ces trois côtés, ainsi que par les milieux des distances qui séparent les sommets du point de croisement des perpendiculaires.

Démonstration. Soient P, Q, R les pieds des perpendiculaires abaissées des sommets du triangle ABC sur les côtés opposés ; et soient K, I, L les points milieux de ces côtés.

Les triangles rectangles CBQ et ABR étant semblables, on aura

$$BC : BQ :: AB : BR ;$$

d'où, à cause que K et L sont les points milieux de BC et AB,

$$BK \, . \, BR = BL \, . \, BQ ;$$

c'est-à-dire que les quatre points K, R, L, Q appartiennent à une même circonférence.

On prouverait semblablement que les quatre points K, R, I, P sont sur un cercle, aussi bien que les quatre points P, I, Q, L.

Cela posé, s'il était possible que les trois cercles en question ne fussent pas un seul et même cercle, il faudrait que les directions des cordes qui leur sont deux à deux communes concourussent en un point unique ; or, ces cordes sont précisément les côtés du triangle ABC, lesquels ne sauraient concourir en un même point ; donc il est également impossible de supposer que les trois cercles diffèrent entre eux ; donc ils se confondent en un seul et même cercle.

Soient maintenant C', A', B' les points milieux des distances DC, DA, DB qui séparent le point de croisement D des hauteurs du triangle ABC de chacun de ses sommets respectifs. Les triangles rectangles CDR et CQB étant semblables, on aura

$$CD:CR::CB:CQ\ ;$$

d'où, à cause que les points C' et K sont les milieux des distances CD et CB,

$$CC'.CQ=CR.CK\ ;$$

c'est-à dire que le cercle qui passe par K, R, Q passe aussi par C'.

On prouverait de la même manière que ce cercle passe par les deux autres points A', B' ; donc il passe à la fois par les neuf points P, Q, R, I, K, L, A', B', C'; *ce qu'il fallait démontrer.*

Les théorèmes qui précèdent subsistent, en tout ou en partie, et avec des modifications convenables, dans les diverses circonstances particulières que peut présenter le système des trois ou quatre points que l'on considère, et qu'on suppose appartenir à une hyperbole équilatère.

Par exemple, si l'un A des sommets du triangle ABC s'éloigne à l'infini des deux autres, et que, par conséquent, les côtés CA, AB deviennent parallèles, comme l'exprime la figure 8 ; le pied R de la perpendiculaire AR s'écartera à l'infini sur BC ; et il en sera de même des milieux I, L des côtés AC, AB du triangle et des points A', B', C' ; par conséquent, une portion toute entière du cercle qui passe par ces points sera elle-même passée à l'infini, c'est-à-dire qu'elle se sera confondue avec la droite qui contient tous les points à l'infini du plan de la figure.

Il suit de là que l'autre partie de ce cercle sera, de son côté, devenue une ligne droite ; et c'est ce qui a lieu en effet ; car, si des sommets B, C on abaisse des perpendiculaires sur les côtés opposés du triangle, leurs pieds respectifs R, Q seront en ligne droite avec le milieu K du côté BC. Dans le cas particulier qui nous occupe donc, la suite des centres des hyperboles équilatères appartenant aux points A, B, C doit se trouver sur la droite indéfinie PKQ, comme cela a lieu en effet.

Dans la même hypothése, où le point A s'éloigne à l'infini et où les côtés CA, BA deviennent par conséquent parallèles, le point de croisement D des trois hauteurs du triangle ABC étant aussi passé à l'infini, il est, dans ce cas particulier, bien évident que c'est, avec les trois autres, un quatrième point de l'hyperbole équilatère.

Il y a ici une remarque essentielle à faire; c'est que, bien que par quatre points donnés à volonté sur un plan, on puisse toujours faire passer une hyperbole équilatère; cependant, quand deux de ces points doivent être situés à l'infini, il n'est pas possible de se les donner arbitrairement, par le système de deux droites quelconques concourant respectivement en ces points; il faut nécessairement que les droites dont il s'agit soient perpendiculaires entre elles, puisqu'elles doivent être parallèles aux asymptotes de la courbe.

Si le sommet A du triangle ABC (fig. 7), au lieu de s'écarter indéfiniment des deux autres B, C, se rapprochait, au contraire, de l'un d'eux C, jusqu'à ce que le côté AC devînt infiniment petit ou nul, en conservant toujours sa direction primitive; les points L, K se trouveraient eux-mêmes rapprochés à une distance infiniment petite l'un de l'autre, sur une parallèle à AC, passant par le milieu du côté AB ou CB; quant au point milieu I du côté AC, il serait confondu avec le sommet A.

Soit donc AP (fig. 9) la direction indéfinie de la droite qui renferme les deux points ou sommets confondus en un seul au point A, et soit B le troisième point ou le troisième sommet que l'on considère; divisons le double côté BA en deux parties égales au point L par la parallèle LK à AP, le cercle qui passera par A et touchera la parallèle KL en L réprésentera évidemment celui qui, dans le cas général, passe par les milieux des côtés du triangle ABC; par conséquent, il renfermera la suite des centres des hyperboles équilatères qui passent par les points A, B et touchent la droite AP en A. Du reste, il serait facile de reconnaître ce que sont devenues les autres propriétés du cercle dont il s'agit, et d'en déduire divers théorèmes analogues à ceux exposés dans ce qui précède, et qui n'en seraient que des cas particuliers.

Ainsi, le moyen que nous avons indiqué ci-dessus, pour trouver le centre et finalement les asymptotes d'une hyperbole équilatère assujettie à passer par quatre points donnés sur un plan, s'applique très-bien au cas particulier où l'on suppose ces points, en tout ou en partie, réunis deux à deux en un seul, sur des droites ou tangentes dont la direction est assignée, ainsi que le point de contact; comme il s'applique aussi très-bien à celui où un ou deux de ces mêmes points passent à l'infini sur des droites dont la direction est également assignée.

Mais, quand l'on ne se donne que trois points de l'hyperbole équilatère, avec une tangente quelconque, il n'est plus possible de déterminer de la même manière le centre de la courbe; car alors on n'obtient qu'un seul cercle, dont la circonférence renferme ce centre; il faut donc avoir recours au procédé indiqué plus haut, au moyen duquel on peut obtenir directement un quatrième point de la courbe; ce qui ramène le problème à celui où il s'agit de *décrire une section conique dont on a quatre points et une tangente.*

Enfin, quand on se donne deux points et deux tangentes quelconques de l'hyperbole équilatère, ou seulement un point et trois tangentes quelconques, les deux procédés dont il s'agit sont également en défaut. Néanmoins, dans le premier de ces deux cas, on trouve encore un cercle dont la circonférence renferme le centre de la courbe; ce qui donne lieu à ce nouveau théorème:

THÉORÈME X. Les centres de toutes les hyperboles équilatères tangentes à deux droites et passant par deux points donnés sur un plan sont situés sur une circonférence de cercle unique.

Dans le même cas, on parvient à déterminer, d'une manière très-simple, un système de deux droites dont l'intersection avec le cercle en question donne encore la position des centres des quatre hyperboles équilatères qui résolvent le problème; mais la démonstration de ces diverses propositions exige l'emploi des principes qui sont, jusqu'à un certain point, étrangers à l'objet actuel de cet article.

On a vu, dans ce qui précède, le rôle qu'on peut faire jouer aux différens lieux des centres des sections coniques assujetties à certaines conditions, pour fixer entièrement la position du centre de la courbe, et par conséquent celle de cette courbe elle-même, quand le nombre de ces conditions ne laisse plus rien d'arbitraire ni d'indéterminé. Il se présente, à ce sujet, une question fort intéressante, et qui nous semble n'avoir pas encore été résolue d'une manière complète, et dans toute sa généralité; en voici l'énoncé:

Déterminer quelle est la nature de la courbe qui renferme les centres de toutes les sections coniques assujetties à quatre conditions telles que de passer par des points ou de toucher des droites données sur un plan?

Aux divers cas particuliers dont il a déjà été question dans le présent article, et dont le plus remarquable est, sans contredit, celui qui résulte du théorème cité de Newton sur le quadrilatère circonscrit à une section conique, nous ajouterons les suivans qui, si nous ne nous trompons, n'ont pas encore été démontrés ou résolus:

Les centres de toutes les sections coniques assujetties à passer par quatre points donnés sur un plan sont situés sur une autre section conique passant par les points où se coupent les deux diagonales et les côtés opposés du quadrilatère correspondant aux quatre points donnés.

Les centres de toutes les sections coniques assujetties à toucher deux droites et à passer par deux points donnés sur un plan sont situés sur une autre section conique passant par le point d'inter-

section des deux droites, par le milieu de la distance qui sépare entre eux les deux points et par le milieu de la partie interceptée par ces droites sur la direction indéfinie de celle qui renferme les deux mêmes points (*).

(*) Nous croyons devoir rappeler au lecteur qu'à la page 261 du VIII.e volume de ce recueil, M. Coste a résolu, pour la parabole, les questions analogues à celles qui font l'objet du présent mémoire, qui forme ainsi, avec le sien, un complément nécessaire à l'ouvrage de M. Brianchon sur les lignes du second ordre.

Quel que soit le mérite de ces diverses recherches; on ne doit pas désespérer toutefois de parvenir un jour à les faire dépendre comme cas particulier d'un problème unique : celui où il s'agit de décrire une conique qui en touche cinq autres données sur un plan; problème que nous avons proposé (Tom. VIII, pag. 284) et qui est peut-être susceptible d'une construction élégante et d'un facile énoncé. C'est ainsi que nous sommes parvenus à faire dériver la solution des dix problèmes de Viète et des quinze problèmes de Fermat sur les contacts des cercles et des sphères de celle du plus difficile d'entre eux (Voyez tom. IV, pag. 349, tom. VII, pag. 289, et tom. XI, pag. 1).

J. D. G.

GÉOMÉTRIE