ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

J. B. DURRANDE

Démonstration du théorème de géométrie énoncé à la page 100 du X.e volume de ce recueil, et d'un autre théorème analogue

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 11 (1820-1821), p. 122-125

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1820-1821__11__122_0>

Démonstration du théorème de géométrie énoncé à la page 100 du X.e volume de ce recueil, et d'un autre théorème analogue;

Par M. J. B. Durrande, professeur de mathématiques spéciales et de physique au collége royal de Cahors.

Théorème. *Le lieu des milieux des cordes menées à une section conique quelconque, par l'un quelconque des points de son plan, est une autre section conique, semblable à la première et semblablement située, passant par le centre de celle-ci et par le point donné.*

Démonstration. Soient pris le diamètre passant par le point donné pour axe des x et la parallèle menée par le même point à son conjugué pour axe des y; l'équation de la courbe sera de cette forme

$$y^2=ax^2+2bx+c.$$

Celle d'une droite menée d'une manière quelconque par le point donné sera de la forme

$$y=mx\,,$$

où m est indéterminé. En la combinant avec celle de la courbe, pour éliminer y, on trouvera que les abscisses des deux extrémités de la corde interceptée sont données par l'équation

$$(a-m^2)x^2+2bx+c=0\ .$$

Mais l'abscisse du milieu d'une droite est la demi-somme des abscisses de ses extrémités ; et il est connu d'ailleurs que, dans une équation du second degré, dont le premier terme est dégagé de son coefficient, le coefficient du second terme, pris avec un signe contraire, est la somme des racines de l'équation ; d'où il suit que l'abscisse du milieu de la corde sera donnée par l'équation

$$x=-\frac{b}{a-m^2} \qquad \text{ou} \qquad (a-m^2)x+b=0\ ;$$

mettant donc pour l'arbitraire m, dans cette dernière, la valeur $\frac{y}{x}$ tirée de l'équation de la corde, on obtiendra, toutes réductions faites, pour l'équation de la courbe cherchée

$$y^2=ax^2+bx\ ,$$

ce qui démontre la proposition annoncée.

On peut facilement démontrer d'une manière analogue cet autre théorème :

THÉORÈME. Le lieu des milieux des cordes menées à une surface quelconque du second ordre, par un quelconque des points de l'espace, est une autre surface du second ordre, semblable à la première *et semblablement située, passant par le centre de celle-ci et par le point donné.*

Démonstration. Par le centre de la surface et par le point donné faisons passer un plan diamétral quelconque, que nous prendrons pour plan des xy, en prenant pour axe des z la parallèle au conjugué de ce plan diamétral. Par le même point, traçons, sur le plan des xy, des parallèles à deux diamètres conjugués quelconques de la section de la surface par ce plan, et prenons ces parallèles pour axes des x et des y; l'équation de la surface sera de la forme

$$z^2=ax^2+by^2+2a'x+2b'y+c\ .$$

Une droite menée d'une manière quelconque par le point donné aura des équations de cette forme

$$x=mz\ , \qquad y=nz\ ;$$

où m et n sont indéterminés. En les combinant avec celle de la surface, pour en eliminer x, y, on trouvera que les valeurs de z qui répondent aux deux extrémités de la corde interceptée sont données par l'équation

$$(am^2+bn^2-1)z^2+2(a'm+b'n)z+c=0\ ;$$

donc, pour les mêmes raisons que ci-dessus, la valeur de z qui répond au milieu de cette corde sera donnée par l'équation

$$z=-\frac{a'm+b'n}{am^2+bn^2-1} \qquad \text{ou} \qquad (am^2+bn^2-1)z+(a'm+b'n)=0\ ;$$

mettant donc, pour les deux arbitraires m, n, dans cette dernière, leurs valeurs $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ tirées des équations de la corde, on obtiendra, toutes réductions faites, pour l'équation de la surface cherchée,

$$z^2=ax^2+by^2+a'x+b'y\ ;$$

ce qui démontre la proposition annoncée.

Nous aurions pu facilement, au surplus, par des considérations purement géométriques, déduire le second théorème du premier; mais nous ne voyons pas trop ce qu'on peut gagner à remplacer quelques lignes de calcul par un grand nombre de mots.