ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

Questions proposées

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 9 (1818-1819), p. 289-292

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1818-1819__9__289_0>

QUESTIONS PROPOSEES.

Théorèmes appartenant à la géométrie de la règle.

I. Soient pris arbitrairement, soit sur un plan, soit dans l'espace, n points que l'on numérotera et désignera par (1), (2), (3)....(n).

Soit joint chacun de ces points à celui qui porte le numéro immédiatement supérieur par $n-1$ droites indéfinies, dont chacune soit désignée par les deux points qui la déterminent en cette manière : $\overline{(1)(2)}$, $\overline{(2)(3)}$, $\overline{(3)(4)}$, ... $\overline{(n-1)(n)}$.

Sur la direction de chacune de ces droites, soit pris arbitrairement un point; et soit désigné chacun des $n-1$ points ainsi choisis par les numéros qui désignent la droite sur laquelle il se trouve situé; ainsi qu'il suit : (12), (23), (34), ...($n-1$, n).

Soient joints deux à deux, par des droites, ceux de ces points et des premiers dont les indices ne portent ni la répétition d'un même nombre ni interruption dans les nombres, du plus petit au plus grand; et soient désignées ces droites par l'ensemble des indices des deux points qui les déterminent, en cette manière $\overline{(1)(23)}$, $\overline{(12)(3)}$, $\overline{(2)(34)}$, $\overline{(23)(4)}$.....; les droites dont les indices renfermeront les mêmes nombres se couperont en un certain point que l'on pourra simplement désigner par l'ensemble de ces nombres; ainsi, par exemple, l'intersection de $\overline{(1)(23)}$ avec $\overline{(12)(3)}$ sera désignée par (123); celle de $\overline{(2)(34)}$ avec $\overline{(23)(4)}$ le sera par (234); et ainsi de suite; et ces nouveaux points seront un nombre de $n-2$.

Soient de même joints deux à deux, par des droites, ceux des points de ces trois séries dont les indices ne portent ni la répétition d'un même nombre, ni interruption dans les nombres, du plus petit au plus grand; et soient désignées ces nouvelles droites par l'ensemble des indices des deux points qui auront servi à les déterminer en cette manière $\overline{(1)(234)}$, $\overline{(12)(34)}$, $\overline{(123)(4)}$, $\overline{(2)(345)}$, $\overline{(23)(45)}$, $\overline{(234)(5)}$, ...; il arrivera que les droites dont les indices renfermeront les mêmes nombres, lesquelles seront au nombre de trois, pour chaque série de nombres, se couperont en un même point, que l'on pourra simplement désigner par l'ensemble de ces nombres; ainsi, par exemple, l'intersection des trois droites $\overline{(1)(234)}$, $\overline{(12)(34)}$, $\overline{(123)(4)}$ sera simplement désignée par (1234), et ainsi des autres; ils seront au nombre de $n-3$.

En continuant le même procédé, on obtiendra des points, au nombre de $n-4$, dont l'indice portera cinq nombres, et qui seront les points de concours de quatre droites; puis des points au nombre de $n-5$, dont l'indice portera six nombres, et qui seront des points de concours de cinq droites, et ainsi de suite; et enfin, un point unique qui sera le point de concours de $n-1$ droites, et sera désigné par $(123.....n)$.

II. Soient n droites arbitraires indéfinies numérotées dans un ordre quelconque et désignées par $\overline{1}$, $\overline{2}$, $\overline{3}$, ...$\overline{n}$, se coupant consécutivement. Désignons l'intersection de chaque droite avec celle qui porte le numéro immédiatement supérieur par l'ensemble de leurs indices, en cette manière $(\overline{1}, \overline{2})$, $(\overline{2}, \overline{3})$, $(\overline{3}, \overline{4})$, ... $(\overline{n-1}, \overline{n})$.

Par ces points d'intersection, soient menées des droites indéfinies, que nous désignerons simplement par l'ensemble des deux nombres qui forment l'indice de chacun d'eux, en cette manière : $\overline{12}$, $\overline{23}$, $\overline{34}$, ... $\overline{n-1}$, $\overline{n}$.

Considérons les intersections deux à deux, au nombre de $n-2$, de celles de ces droites dont les indices ne présentent ni répétition ni discontinuité de nombres, du plus petit au plus grand; et soient désignés ces points par l'ensemble des indices des deux droites qui les déterminent en cette manière $(\overline{1}, \overline{23})$, $(\overline{12}, \overline{3})$, $(\overline{2}, \overline{34})$, $(\overline{23}, \overline{4})$.....; les points dont les indices renfermeront les mêmes nombres appartiendront à certaines droites, au nombre de $n-2$, que l'on pourra simplement désigner par l'ensemble de ces nombres ; ainsi, par exemple, la droite passant par $(\overline{1},\overline{23})$ et $(\overline{12},\overline{3})$ sera désignée par $\overline{123}$; celle qui passera par $(\overline{2},\overline{34})$ et $(\overline{23},\overline{4})$ sera désignée par $\overline{234}$; et ainsi des autres.

Soient de même considérées les intersections deux à deux de celles des droites de ces trois séries dont les indices ne portent ni répétition ni discontinuité de nombres, du plus petit au plus grand ; et soient désignés ces nouveaux points par l'ensemble des indices des deux droites qui auront servi à les déterminer, en cette manière $(\overline{1},\overline{234})$, $(\overline{12},\overline{34})$, $(\overline{1},\overline{234})$, ...; il arrivera que les points dont les indices renfermeront les mêmes nombres, lesquels seront au nombre de trois, pour chaque série de nombres, appartiendront à une même droite, que l'on pourra simplement désigner par l'ensemble de ces nombres ; ainsi, par exemple, la droite qui contiendra les trois points $(\overline{1},\overline{224})$, $(\overline{12},\overline{34})$, $(\overline{123},\overline{4})$ sera simplement désignée par $\overline{1234}$; les droites de cette série seront d'ailleurs au nombre de $n-3$.

En continuant le même procédé, on obtiendra des droites, au nombre de $n-4$, dont l'indice portera cinq nombres, et sur chacune desquelles quatre points se trouveront situés ; puis des droites, au nombre de $n-5$, dont l'indice portera six nombres, et sur chacune desquelles cinq points se trouveront situés, et ainsi de suite; et enfin, une droite unique, sur laquelle $n-1$ points se trouveront situés; et qui sera désignée par $\overline{123......n}$.

Ces deux théorèmes ont également lieu sur la sphère, pourvu qu'on substitue aux droites des arcs de grands cercles, il arrive seulement que les points y sont, dans les mêmes circonstances, en nombre deux fois plus grand que sur un plan.

Problème d'analise algébrique.

Soit $X=0$ une équation numérique d'un degré quelconque, dont x soit l'inconnue.

Soit l la limite inférieure des racines positives de cette équation; soit changé x en $x+l$, ce qui donnera une nouvelle équation $X'=0$.

Soit l' la limite inférieure des racines positives de cette équation; en y changeant x en $x+l'$, on aura une nouvelle équation $X''=0$.

Soit l'' la limite inférieure des racines positives de cette équation; en y changeant x en $x+l''$, on aura une quatrième équation $X'''=0$, et ainsi de suite.

Cela posé,

1.° On demande de démontrer que, si la proposée $X=0$ a une ou plusieurs racines positives, la série $l+l'+l''+.....$ sera convergente, et aura pour limite de la somme de ses termes la plus petite de ces racines?

2.° On demande ce que deviendrait cette même série, dans le cas où la proposée, n'ayant aucune racine positive, aurait néanmoins des variations (*).

(*) La résolution de ces questions est nécessaire pour compléter la théorie de la méthode publiée récemment par M. Bérard, pour la résolution des équations numériques.