TÉDENAT

Solution du problème proposé à la page 200 du VIII.e volume de ce recueil

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 9 (1818-1819), p. 106-115
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1818-1819__9__106_1>

Solution du problème proposé à la page 200 du VIII.e volume de ce recueil ;

Par M. TÉDENAT, correspondant de l'académie royale des sciences.

*P*ROBLÈME. *Donner la théorie du mouvement d'une échelle, posant, par son extrémité inférieure, sur un pavé horizontal, et appuyant, par son extrémité supérieure, contre un mur vertical, en ayant égard au frottement?*

Solution. Soit une ligne pesante AB (fig. 11) représentant une échelle, appuyée par son extrémité B sur une ligne horizontale CB, et par son extrémité A sur la verticale CA. A moins que AB ne fût dans une situation horizontale ou dans une situation verticale, elle glisserait nécessairement sans l'effet du frottement qui a lieu en B et en A. Pour estimer cet effet, aux deux lignes CA, CB substituons-en deux autres CA$'$, CB$'$, perpendiculaires entre elles, comme les premières ; et faisant avec elles un angle β tel que la partie de l'effort de la gravité perdue, à raison de sa décomposition dans le sens des deux nouveaux axes CA$'$, CB$'$, soit équivalente à l'effet du frottement dans le sens des premiers CA, CB. L'angle $ACA'=BCB'=\beta$, est ce qu'on appelle, pour cette raison, l'angle du frottement.

Supposons tout le poids de la verge, que nous représenterons par gm, réuni en son centre de gravité O que, pour plus de généralité, nous supposerons différent de son milieu. Soient $OB'=a$, $OA'=b$ et l'angle $A'NC=\varphi$, d'où $A'B'C'=\varphi'=\varphi+\beta$.

L'effort de la pesanteur en O peut être décomposé en deux autres agissant en A$'$, B$'$, lesquels sont respectivement

$$gm\,.\frac{a}{a+b}\,, \qquad gm\,.\frac{b}{a+b}\,.$$

Ce dernier, décomposé parallèlement à B$'$C et A$'$C, donnera pour ses composantes

$$gm\,.\frac{b}{a+b}\,\text{Sin.}\beta\,; \qquad gm\,.\frac{b}{a+b}\,\text{Cos.}\beta\,.$$

Ce dernier effort, perpendiculaire à la ligne ou plan CB$'$; est détruit par la résistance de ce plan ; et on en pourra dire autant de l'effort exercé en A$'$. Cela posé :

L'équation générale de l'équilibre (Voyez la *Mécanique analitique*)

$$Y\delta y+X\delta x=0$$

donnera, en faisant $A'C=u$, $B'C=z$;

$$gm\,.\,\frac{a}{a+b}\,\mathrm{Cos}.\beta.\delta u+gm.\frac{b}{a+b}\,\mathrm{Sin}.\beta\delta z=0\ ;$$

mais

$$u=(a+b)\mathrm{Sin}.\varphi'\ ,z\qquad =(a+b)\mathrm{Cos}.\varphi'\ ;$$

partant

$$\delta u=(a+b)\mathrm{Cos}.(\varphi+\beta)\delta\varphi'\ ,$$

$$\delta z=(a+b)\mathrm{Sin}.(\varphi+\beta)\delta\varphi'\ ;$$

donc

$$a\mathrm{Cos}.\beta\mathrm{Cos}.(\varphi+\beta)=b\mathrm{Sin}.\beta\mathrm{Sin}.(\varphi+\beta)\ ;$$

ce qui donne

$$\frac{a}{b}=\mathrm{Tang}.\beta\mathrm{Tang}.(\varphi+\beta)\ ,$$

comme on l'a trouvé, par une méthode tout-à-fait différente, à la page 199 du précédent volume.

Pour appliquer au mouvement de l'échelle la formule générale de l'équilibre, il suffit d'ajouter aux termes ci-dessus les deux suivans $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, exprimant les forces accélératrices des deux extrémités de l'échelle, dans le sens des axes CA, CB, c'est-à-dire, en n'ayant d'abord aucun égard à l'effet du frottement.

Si l'on fait, dans cette hypothèse,

$$gm\,.\,\frac{a}{a+b}=g'\ ,\quad \mathrm{Cos}.\beta=1\ ,\quad \mathrm{Sin}.\beta=0\ ;$$

on aura

$$\left(\frac{d^2y}{dt^2}-g'\right)\delta y+\frac{d^2x}{dt^2}\delta x=0\,;$$

ou

$$\left(\frac{d^2y}{dt^2}-g'\right)\text{Cos.}\varphi-\frac{d^2x}{dt^2}\text{Sin.}\varphi=0\,; \qquad \text{(A)}$$

Mais, la ligne $AB=a+b=r$ étant constante, l'équation de condition donnera, dans un instant quelconque

$$(y-d^2y)^2+(x+d^2x)^2=0\;,$$

ou

$$y\frac{d^2y}{dt^2}+x\frac{d^2x}{dt^2}=0\,;$$

Cette équation, combinée avec l'équation (A), donne

$$\frac{d^2y}{dt^2}=g'\text{Cos.}^2\varphi \qquad\qquad \frac{d^2x'}{dt^2}=-g'\text{Sin.}\varphi\text{Cos.}\varphi\,;$$

Ainsi, la force accélératrice des deux points extrêmes sera variable; ils parcourront respectivement les deux droites CA, CB. Le milieu de AB décrira un arc de cercle dont le diamètre sera égal à cette même droite. Les autres points décriront des arcs d'ellipses qui auront leur grand axe suivant CB, pour la moitié inférieure, et suivant CA pour la moitié supérieure.

Si l'on veut connaître les vitesses des points extrêmes, on les trouvera en intégrant les équations suivantes

$$dy\frac{d^2y}{dt^2}=g'\text{Cos.}^2\varphi.rd\varphi\text{Cos.}\varphi=g'rd\varphi\text{Cos.}^3\varphi\;,$$

$$\mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-g'r\mathrm{d}\phi\,\mathrm{Cos.}\phi\,\mathrm{Sin.}^2\phi\ .$$

La première donne

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2=k-\frac{g'r}{3}(2+\mathrm{Cos.}^2\phi)\mathrm{Sin.}\phi\ ;$$

et on tire de la seconde

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2=k'-\frac{g'r}{3}\mathrm{Sin.}^3\phi\ ;$$

ce qui s'accorde avec le principe des forces vives

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2=C-2g'y\ .$$

Pour avoir égard au frottement, il suffit de rapporter le mouvement aux axes CA′, CB′. Conservons les deux lettres y, x, pour les deux axes CA, CB, et prenons u, z pour CA′, CB′; en posant, pour abréger,

$$gm\,.\frac{b}{a+b}=g''\ ,$$

nous aurons

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}-g'\mathrm{Cos.}\beta\right)\mathrm{Cos.}\phi'-\left(\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}+g''\mathrm{Sin.}\beta\right)\mathrm{Sin.}\phi'=0\ ;$$

mais

$$u=\frac{y}{\mathrm{Cos.}\beta}\ ,\qquad z=\frac{x}{\mathrm{Cos.}\beta}\ ;$$

donc, l'équation, ramenée aux premiers axes, deviendra

$$\left(\frac{d^2y}{dt^2}-g'\text{Cos}^2\beta\right)\text{Cos}.(\phi+\beta)-\left(\frac{d^2x}{dt^2}+g''\text{Sin}.\beta\text{Cos}.\beta\right)\text{Sin}.\phi+\beta)=0\,.$$

faisant, pour abréger,

$$g'\text{Cos}.^2\beta=\xi\,,\qquad g''\text{Sin}.\beta\text{Cos}.\beta=\xi'\,;$$

et conservant l'angle φ', on aura

$$\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\xi\right)\text{Cos}.\varphi'-\left(\frac{d^2x}{dt^2}-\xi'\right)\text{Sin}.\phi=0\,.$$

Cette équation a la même forme que l'équation (A) déjà traitée: elle donnera

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\xi\text{Cos}.^2\varphi'-\xi'\text{Sin}.\varphi'\text{Cos}.\varphi'\,,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\xi'\text{Sin}.^2\varphi'-\xi\text{Sin}.\varphi'\text{Cos}.\varphi'\,.$$

On déduit de la première

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=k-\frac{\xi}{3}(2+\text{Cos}.^2\phi')\text{Sin}.\varphi'+\frac{\xi'}{3}\text{Sin}.^3\phi',$$

et de la seconde

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=k'+\frac{\xi}{3}\text{Sin}.^3\phi'+\frac{\xi'}{3}(2-\text{Sin}.^2\phi')\text{Cos}.\varphi'\,.$$

En faisant $\beta=0$, ces deux dernières formules deviennent celles qu'on a déjà trouvées ci-dessus; lorsqu'on n'a pas égard au frottement.

On déterminera d'ailleurs les constantes k, k' par les conditions qu'au commencement du mouvement on a $\frac{dy}{dt}=0$, $\frac{dx}{dt}=0$.

On doit avoir aussi, au commencement du mouvement $\frac{d^2y}{dt^2}=0$, $\frac{d^2x}{dt^2}=0$. Cette dernière condition donne

$$\frac{a}{b}=\text{Tang.}\beta\,\text{Tang.}(\varphi+\beta)\ ;$$

ou

$$\text{Tang.}\varphi=\frac{a\,\text{Tang.}^2\beta-b}{(a+b)\text{Tang.}\beta}\ ,$$

comme cela doit être ; parce que, lorsque l'angle φ est tel, l'effet du frottement détruit l'effort de la pesanteur, ou la force accélératrice, comme on l'a vu ci-dessus et en l'endroit déjà cité de ce recueil.

Les diverses positions que prend dans son mouvement la ligne pesante AB, se coupent consécutivement en une suite de points formant une courbe continue, dont on peut être curieux de connaître l'équation.

Soient AB, A′B′ (fig. 12) deux positions consécutives infiniment voisines de la droite mobile, dont M soit le point d'intersection; ce point sera l'un de ceux de la courbe cherchee. Faisons $AB=a$, l'angle $CBA=\varphi$, et désignons respectivement par x, y les perpendiculaires MP, MQ abaissées du point M sur les droites CA, CB prises pour axes des coordonnées ; nous aurons

$$a=AB=MA+MB=\frac{x}{\text{Cos.}\varphi}+\frac{y}{\text{Sin}\,\varphi}\ ;$$

c'est-à-dire,

$$x\text{Sin.}\varphi+y\text{Cos.}\varphi=a\text{Sin.}\varphi\text{Cos}\,\varphi\ .$$

Or,

Or, au point d'intersection N, l'équation doit convenir également aux deux droites AB, A'B'; il faut donc qu'elle soit indépendante de l'angle φ, et qu'elle ne soit composée que des seules quantités a, x, y qui sont communes aux deux positions; il faut donc que x et y demeurent constans tandis que φ varie, c'est-à-dire, que la différentielle de l'équation ci-dessus, prise par rapport à φ seulement, doit avoir lieu en même temps qu'elle. Cette différentielle étant

$$x\text{Cos.}\varphi-y\text{Sin.}\varphi=a(\text{Cos.}^2\varphi-\text{Sin.}^2\varphi)\ ;$$

il ne s'agit plus que d'éliminer φ entre elle et l'équation primitive.

Pour y parvenir, regardons x, y comme les deux inconnues de ces équations; nous en tirerons aisément

$$x=a\text{Cos.}^3\varphi\ ,\qquad y=a\text{Sin.}^3\varphi\ ;$$

donc

$$\text{Cos.}^2\varphi=\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}},\quad \text{Sin.}^2\varphi=\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}}\ ;$$

donc enfin l'équation de la courbe cherchée est

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}}=1\ .\quad (*)$$

(*) C'est précisément la courbe de la page 376 du VIII.e volume de ce recueil, si ce n'est que la droite mobile qui y était représentée par $2c$ l'est ici par a.

Si l'on compare cette équation avec celle que nous avons trouvée à la page 288 du V.e volume de ce recueil, et qu'on pourrait mettre sous cette forme

$$\left(\frac{x}{a'}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b'}\right)^{\frac{2}{3}}=1\ ;$$

Il est facile de s'assurer que cette courbe (fig. 13) a quatre points de rebroussement situés sur les deux axes à des distances de l'origine égales à a; et qu'elle est symétrique non seulement par

---

on en pourra conclure que la courbe dont il s'agit est, par rapport à la développée de l'ellipse ce que le cercle est lui-même par rapport à l'ellipse. On ne saurait pourtant en conclure que cette courbe soit la développée d'un cercle, puisqu'une telle développée se réduit à un point.

Mais on est conduit à soupçonner que cette même courbe pourrait bien être la développée d'une ellipse dont les deux axes, infinis l'un et l'autre, auraient néanmoins une différence finie.

Pour vérifier ce soupçon prenons l'équation

$$\left(\frac{ax}{a^2-b^2}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{by}{a^2-b^2}\right)^{\frac{2}{3}}=1$$

de la développée de l'ellipse; équation dans laquelle a, b sont les deux demi-axes; soit fait

$$a-b=c, \qquad \text{d'où} \qquad b=a-c \qquad \text{et} \qquad a^2-b^2=2ac-c^2;$$

l'équation deviendra ainsi

$$\left\{\frac{ax}{2ac-c^2}\right\}^{\frac{2}{3}}+\left\{\frac{(a-c)y}{2ac-c^2}\right\}^{\frac{2}{3}}=1;$$

ou encore

$$\left\{\frac{x}{2c-\frac{c^2}{a}}\right\}^{\frac{2}{3}}+\left\{\frac{\left(1-\frac{c}{a}\right)y}{2c-\frac{c^2}{a}}\right\}^{\frac{2}{3}}=1$$

équation qui se réduit en effet à

$$\left(\frac{x}{2c}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{2c}\right)^{\frac{2}{3}}=1;$$

lorsqu'on suppose a infini.

rapport à ces axes, mais encore par rapport aux deux droites qui divisent en deux parties égales les angles des coordonnées. On en concevra facilement la raison en remarquant (fig. 13) que, théoriquement parlant, les droites CA, CB devant être considérées comme s'étendant indéfiniment de part et d'autre du point C, le mouvement des extrémités A et B de la droite mobile AB n'est pas borné à ce point; mais que l'extrémité B peut passer à gauche et l'extrémité A au-dessous suivant les prolongemens de CB et CA.

Il est d'ailleurs évident que la courbe est à la fois circonscrite à toutes les ellipses décrites par les points de AB; et, en particulier, au cercle décrit par son milieu.