
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

GERGONNE

Géométrie analytique. Propriétés des diamètres conjugués de l'ellipsoïde

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 5 (1814-1815), p. 29-32

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1814-1815__5__29_0

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1814-1815, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

GÉOMÉTRIE ANALITIQUE.

Propriétés des diamètres conjugués de l'ellipsoïde ;

Par M. GERGONNE.



SOIENT a, b, c les trois demi-diamètres principaux d'un ellipsoïde, pris pour axe des coordonnées. Soient ensuite (x, y, z) , (x', y', z') , (x'', y'', z'') les extrémités de trois autres demi-diamètres quelconques ; on aura

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= 1, \\ \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} &= 1, \\ \frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} + \frac{z''^2}{c^2} &= 1, \end{aligned} \right\} (1)$$

Si l'on veut, en outre, que les nouveaux demi-diamètres soient conjugués les uns aux autres, il faudra exprimer de plus que le plan tangent à l'extrémité de chacun est, à la fois, parallèle à chacun des deux autres ; ce qui donnera encore

$$\left. \begin{aligned} \frac{x'x''}{a^2} + \frac{y'y''}{b^2} + \frac{z'z''}{c^2} &= 0, \\ \frac{x''x}{a^2} + \frac{y''y}{b^2} + \frac{z''z}{c^2} &= 0, \\ \frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2} &= 0. \end{aligned} \right\} (2)$$

En posant, pour abréger,

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{a} &= X, & \frac{y}{b} &= Y, & \frac{z}{c} &= Z, \\ \frac{x'}{a} &= X', & \frac{y'}{b} &= Y', & \frac{z'}{c} &= Z', \\ \frac{x''}{a} &= X'', & \frac{y''}{b} &= Y'', & \frac{z''}{c} &= Z'', \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ces équations deviendront

$$\left. \begin{aligned} X^2 + Y^2 + Z^2 &= 1, \\ X'^2 + Y'^2 + Z'^2 &= 1, \\ X''^2 + Y''^2 + Z''^2 &= 1; \end{aligned} \right\} \quad (4) \quad \left. \begin{aligned} X'X'' + Y'Y'' + Z'Z'' &= 0, \\ X''X + Y''Y + Z''Z &= 0, \\ X X' + Y Y' + Z Z' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Or, il est connu, par la théorie de la transformation des coordonnées dans l'espace (*), que, lorsqu'on a de telles relations entre des quantités, on a aussi entre elles les relations suivantes

$$\left. \begin{aligned} X^2 + X'^2 + X''^2 &= 1, \\ Y^2 + Y'^2 + Y''^2 &= 1, \\ Z^2 + Z'^2 + Z''^2 &= 1; \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} (YZ' - ZY')^2 + (Y'Z'' - Z'Y'')^2 + (Y''Z - Z''Y)^2 &= 1, \\ (ZX' - XZ')^2 + (Z'X'' - X'Z'')^2 + (Z''X - X''Z)^2 &= 1, \\ (XY' - YX')^2 + (Y'X'' - X'Y'')^2 + (X''Y - Y''X)^2 &= 1; \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$XY'Z'' - XZ'Y'' + ZX'Y'' - YX'Z'' + YZ'X'' - ZY'X'' = 1. \quad (8)$$

En remettant, dans ces relations, les valeurs des symboles qu'elles

(*) Voyez entre autres le tome 1.^{er} du *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral* de M. Lacroix; page 450 de la 1.^{re} édition, et page 528 de la 2.^e

renferment, données par les équations (3), et chassant les dénominateurs, il viendra

$$\left. \begin{aligned} x^2 + x'^2 + x''^2 &= a^2, \\ y^2 + y'^2 + y''^2 &= b^2, \\ z^2 + z'^2 + z''^2 &= c^2; \end{aligned} \right\} (9)$$

$$\left. \begin{aligned} (yz' - zy')^2 + (y'z'' - z'y'')^2 + (y''z - z'y'')^2 &= b^2 c^2, \\ (zx' - xz')^2 + (z'x'' - x'z'')^2 + (z''x - x''z)^2 &= c^2 a^2, \\ (xy' - yx')^2 + (x'y'' - y'x'')^2 + (x''y - y''x)^2 &= a^2 b^2; \end{aligned} \right\} (10)$$

$$xy'z'' - xz'y'' + zx'y'' - yx'z'' + yz'x'' - zy'x'' = abc. \quad (11)$$

Si maintenant on désigne par a' , b' , c' les trois demi-diamètres conjugués dont il s'agit, et par α , β , γ les angles qu'ils forment deux à deux respectivement; il est aisé de voir qu'on aura

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= a'^2, \\ x'^2 + y'^2 + z'^2 &= b'^2, \\ x''^2 + y''^2 + z''^2 &= c'^2; \end{aligned} \right\} (12)$$

$$\left. \begin{aligned} (yz' - zy')^2 + (zx' - xz')^2 + (xy' - yx')^2 &= a'^2 b'^2 \text{Sin.}^2 \gamma, \\ (y'z'' - z'y'')^2 + (z'x'' - x'z'')^2 + (x'y'' - y'x'')^2 &= b'^2 c'^2 \text{Sin.}^2 \alpha, \\ (y''z - z'y'')^2 + (z''x - x''z)^2 + (x''y - y''x)^2 &= c'^2 a'^2 \text{Sin.}^2 \beta; \end{aligned} \right\} (13)$$

$$\begin{aligned} &xy'z'' - xz'y'' + zx'y'' - yx'z'' + yz'x'' - zy'x'' \\ &= abc \sqrt{1 - \text{Cos.}^2 \alpha - \text{Cos.}^2 \beta - \text{Cos.}^2 \gamma + 2 \text{Cos.} \alpha \text{Cos.} \beta \text{Cos.} \gamma}. \end{aligned} \quad (14)$$

Comparant alors la somme des équations (12) à la somme des équations (9), puis la somme des équations (13) à celle des équations (10) et enfin l'équation (14) à l'équation (11), il viendra

$$a^{1/2} + b^{1/2} + c^{1/2} = a^2 + b^2 + c^2 ,$$

$$b^{1/2}c^{1/2}\text{Sin.}^2\alpha + c^{1/2}a^{1/2}\text{Sin.}^2\beta + a^{1/2}b^{1/2}\text{Sin.}^2\gamma = b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 ,$$

$$a^{1/2}b^{1/2}c^{1/2}(1 - \text{Cos.}^2\alpha - \text{Cos.}^2\beta - \text{Cos.}^2\gamma + 2\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\beta\text{Cos.}\gamma) = a^2b^2c^2.$$

Ces relations sont connues (*) ; mais je ne sache pas qu'on y soit parvenu jusqu'ici d'une manière si simple et si directe.

Le même procédé, qui peut être facilement appliqué à toutes les surfaces du second ordre qui ont un centre, s'applique avec la plus grande facilité aux courbes planes du même ordre.

(*) Voyez la page 113 du 3.^e volume de ce recueil.