
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

TH. BARROIS

**Trigonométrie. Essai sur diverses expressions approchées
de la circonférence du cercle**

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 4 (1813-1814), p. 360-364

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1813-1814__4__360_0

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1813-1814, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

TRIGONOMÉTRIE.

*Essai sur diverses expressions approchées de la
circonférence du cercle.*

Par M. TH. BARROIS.



Soient m et n deux nombres entiers positifs quelconques, et soient p et P respectivement les périmètres des polygones réguliers de 2^{m+n} côtés inscrit et circonscrit au cercle dont le rayon est l'unité, et dont conséquemment la circonférence est 2π ; on aura évidemment.

$$p = 2^{m+1}n \operatorname{Sin.} \frac{\pi}{2^{m+n}}, \quad P = 2^{m+1}n \operatorname{Tang.} \frac{\pi}{2^{m+n}} = 2^{m+1}n \frac{\operatorname{Sin.} \frac{\pi}{2^{m+n}}}{\operatorname{Cos.} \frac{\pi}{2^{m+n}}};$$

En second lieu, les équations des deux cônes C, C' étant respectivement

$$(ax+by)+cz)^2=(x^2+y^2+z^2)\operatorname{Cos.}^2r,$$

$$z^2=(x^2+y^2+z^2)\operatorname{Cos.}^2r'';$$

en les multipliant en croix et extrayant la racine carrée de l'équation-produit, l'équation résultante du premier degré, ayant lieu en même temps que ces deux-là, sera celle d'un plan contenant les droites suivant lesquelles ces deux cônes se coupent; or cette équation est

$$(ax+by)\operatorname{Cos.}r''=z(\operatorname{Cos.}r-c\operatorname{Cos.}r''),$$

c'est-à-dire la première des équations (11).

$$P - p = 2^{m+1}n \left\{ \text{Tang. } \frac{x}{2^m n} - \text{Sin. } \frac{x}{2^m n} \right\}.$$

Mais on sait que, x étant un arc quelconque, on a

$$\begin{aligned} \text{Sin. } x &= 2 \text{Cos. } \frac{x}{2} \text{Sin. } \frac{x}{2} \\ &= 4 \text{Cos. } \frac{x}{2} \text{Cos. } \frac{x}{4} \text{Sin. } \frac{x}{4} \\ &= 8 \text{Cos. } \frac{x}{2} \text{Cos. } \frac{x}{4} \text{Cos. } \frac{x}{8} \text{Sin. } \frac{x}{8} \\ &= \dots\dots\dots \\ &= 2^m \text{Cos. } \frac{x}{2} \text{Cos. } \frac{x}{4} \text{Cos. } \frac{x}{8} \text{Cos. } \frac{x}{16} \dots\dots\dots \text{Cos. } \frac{x}{2^m} \text{Sin. } \frac{x}{2^m}; \end{aligned}$$

D'où

$$2^m \text{Sin. } \frac{x}{2^m} = \frac{\text{Sin. } x}{\text{Cos. } \frac{x}{2} \text{Cos. } \frac{x}{4} \text{Cos. } \frac{x}{8} \dots \text{Cos. } \frac{x}{2^m}};$$

En faisant dans cette formule $x = \frac{\pi}{n}$, elle deviendra

$$2^m \text{Sin. } \frac{\pi}{2^m n} = \frac{\text{Sin. } \frac{\pi}{n}}{\text{Cos. } \frac{\pi}{2n} \text{Cos. } \frac{\pi}{4n} \text{Cos. } \frac{\pi}{8n} \dots \text{Cos. } \frac{\pi}{2^m n}};$$

valeur qui, substituée dans celles de p et P , les change en celles-ci

$$p = \frac{2n \sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{2n} \cos \frac{\pi}{4n} \cos \frac{\pi}{8n} \dots \cos \frac{\pi}{2^m n}}, \quad (1)$$

$$P = \frac{2n \sin \frac{\pi}{n}}{\cos^2 \frac{\pi}{2n} \cos^2 \frac{\pi}{4n} \cos^2 \frac{\pi}{8n} \dots \cos^2 \frac{\pi}{2^m n}}. \quad (2)$$

Et tels sont les périmètres des deux polygones dont il s'agit ; on voit que leurs expressions ne diffèrent que par le facteur $\cos \frac{\pi}{2^m n}$ qui n'est qu'à la première puissance dans le dénominateur de la première , tandis qu'il se trouve au carré dans le dénominateur de la seconde.

On a évidemment $2\pi > p$ et $2\pi < P$; on aura donc aussi

$$\pi > \frac{n \sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{2n} \cos \frac{\pi}{4n} \cos \frac{\pi}{8n} \dots \cos \frac{\pi}{2^m n}}, \quad (3)$$

$$\pi < \frac{n \sin \frac{\pi}{n}}{\cos^2 \frac{\pi}{2n} \cos^2 \frac{\pi}{4n} \cos^2 \frac{\pi}{8n} \dots \cos^2 \frac{\pi}{2^m n}}. \quad (4)$$

Voilà donc deux limites de la valeur du nombre π ; limites d'autant plus resserrées , toutes choses égales d'ailleurs , que m sera plus grand. En prenant l'une ou l'autre pour valeur approchée de π , la limite de l'erreur sera

$$2^m n \left\{ \text{Tang.} \frac{\pi}{2^m n} - \text{Sin.} \frac{\pi}{2^m n} \right\}.$$

Si donc on suppose $m = \infty$, on aura exactement, quel que soit n

$$\pi = \frac{n \operatorname{Sin.} \frac{\pi}{n}}{\operatorname{Cos.} \frac{\pi}{2n} \operatorname{Cos.} \frac{\pi}{4n} \operatorname{Cos.} \frac{\pi}{8n} \operatorname{Cos.} \frac{\pi}{16n} \dots 1}, \quad (5)$$

le nombre des facteurs du dénominateur devant être infini, et conséquemment le dernier étant l'unité.

On sait que, x étant un arc quelconque, on a

$$\operatorname{Cos.} \frac{1}{2} x = \frac{1}{2} \sqrt{2 + 2 \operatorname{Cos.} x},$$

$$\operatorname{Cos.} \frac{1}{4} x = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + 2 \operatorname{Cos.} x}},$$

$$\operatorname{Cos.} \frac{1}{8} x = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + 2 \operatorname{Cos.} x}}},$$

..... ;

d'où il résulte, pour l'équation (5), cette autre forme

$$\pi = \frac{n \operatorname{Sin.} \frac{\pi}{n}}{\frac{1}{2} \sqrt{2 + 2 \operatorname{Cos.} \frac{\pi}{n}} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + 2 \operatorname{Cos.} \frac{\pi}{n}}} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + 2 \operatorname{Cos.} \frac{\pi}{n}}}} \dots 1}; \quad (6)$$

Ainsi, toutes les fois que n sera l'un des nombres dans lesquels la circonférence peut être géométriquement divisée, c'est-à-dire, quelqu'un des nombres de la suite 2, 3, 5, 17, 257, ..., l'expression de π sera entièrement algébrique.

Si, par exemple, on suppose $n = 2$, d'où $\operatorname{Sin.} \frac{\pi}{n} = \operatorname{Sin.} \frac{\pi}{2} = 1$, et $\operatorname{Cos.} \frac{\pi}{n} = \operatorname{Cos.} \frac{\pi}{2} = 0$, il viendra

$$\omega = \frac{2}{\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \dots}$$

Si, ensuite, on suppose $n=3$, d'où $\text{Sin.} \frac{\pi}{n} = \text{Sin.} \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, et

$\text{Cos.} \frac{\pi}{n} = \text{Cos.} \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, il viendra

$$\omega = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \dots}$$

et ainsi de suite.

Ces diverses expressions semblent propres à mettre en évidence l'incommensurabilité du nombre ω et de toutes les puissances de ce nombre.
