
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

Solutions des trois autres problèmes

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 4 (1813-1814), p. 345-348

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1813-1814__4__345_1

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1813-1814, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Solutions des trois autres problèmes ;

Par un A B O N N É.

LEMME. *De tous les troncs de prisme triangulaires dans lesquels une face latérale, l'arête opposée et la section perpendiculaire aux arêtes latérales sont les mêmes, celui dans lequel la somme des aires des bases est la plus petite, est celui où les plans de ces bases sont également inclinés sur celui de la face latérale donnée.*

Démonstration. Soient (fig. 3) AGHB la face latérale donnée, MN l'arête opposée et CKF la section perpendiculaire aux arêtes, aussi données.

Soient P, Q les projections respectives de M, N sur AGHB; menons MP, NQ et PQ, rencontrant respectivement GA, FC, HB en S, L, T; soit menée KL=MP=NQ; des points P, Q soient abaissées respectivement sur AG, BH les perpendiculaires PD,

QE, et soient menées MD, NE, lesquelles seront aussi respectivement perpendiculaires sur GA, HB.

Faisons

$$\begin{aligned} AG=a, \text{ Ang. GAC}=\alpha, PS=x, \\ BH=b, \text{ Ang. HBC}=\beta, QT=y, \end{aligned} \quad KL=MP=NQ=k.$$

Nous aurons.

$$\text{Aire AMG} = \frac{1}{2} AG \cdot MD = \frac{1}{2} AG \sqrt{MP^2 + PD^2} = \frac{1}{2} a \sqrt{k^2 + x^2 \text{Sin.}^2 \alpha},$$

$$\text{Aire BNH} = \frac{1}{2} BH \cdot NE = \frac{1}{2} BH \sqrt{NQ^2 + QE^2} = \frac{1}{2} b \sqrt{k^2 + y^2 \text{Sin.}^2 \beta};$$

si donc on a

$$\text{Aire AMG} + \text{Aire BNH} = \text{minimum};$$

on devra avoir

$$a \sqrt{k^2 + x^2 \text{Sin.}^2 \alpha} + b \sqrt{k^2 + y^2 \text{Sin.}^2 \beta} = \text{minimum},$$

et par conséquent

$$\frac{ax \delta x \text{Sin.}^2 \alpha}{\sqrt{k^2 + x^2 \text{Sin.}^2 \alpha}} + \frac{by \delta y \text{Sin.}^2 \beta}{\sqrt{k^2 + y^2 \text{Sin.}^2 \beta}} = 0; \quad (1)$$

mais, d'un autre côté, on a

$$x+y=SP+QT=ST-PQ=ST-MN=\text{Constante};$$

d'où

$$\delta x + \delta y = 0. \quad (2)$$

Par la combinaison de ces deux équations, on aura

$$\frac{ax \text{Sin.}^2 \alpha}{\sqrt{k^2 + x^2 \text{Sin.}^2 \alpha}} = \frac{by \text{Sin.}^2 \beta}{\sqrt{k^2 + y^2 \text{Sin.}^2 \beta}}; \quad (3)$$

mais, CF pouvant être également exprimé par $a \text{Sin.} \alpha$ et par $b \text{Sin.} \beta$; on doit avoir

$$b \text{Sin.} \beta = a \text{Sin.} \alpha; \quad (4)$$

l'équation qui, multipliant la précédente, donne

$$\frac{x \text{Sin.} \alpha}{\sqrt{k^2 + x^2 \text{Sin.}^2 \alpha}} = \frac{y \text{Sin.} \beta}{\sqrt{k^2 + y^2 \text{Sin.}^2 \beta}}; \quad (5)$$

ou

$$\frac{PD}{MD} = \frac{QE}{NE},$$

ou encore $\cos.MDP = \cos.NEQ$, d'où $\text{Ang.}MDP = \text{Ang.}NEQ$,
comme nous l'avions annoncée.

THÉORÈME. De tous les troncs de prismes triangulaires qui ont les trois mêmes arêtes latérales et la même section perpendiculaire à ces arêtes, celui de moindre surface est le tronc de prisme triangulaire dans lequel les milieux des arêtes latérales sont dans un plan perpendiculaire à leur direction commune.

Démonstration. Ceci revient évidemment à dire qu'il faut que l'inclinaison du plan de l'une des bases sur celui de chacune des faces latérales soit égale à l'inclinaison du plan de l'autre base sur celui de la même face.

Supposons, en effet, qu'il n'en soit pas ainsi et qu'il y ait au moins une des faces latérales sur laquelle les deux bases soient inégalement inclinées; en faisant mouvoir l'arête latérale opposée suivant sa propre direction, on pourrait toujours amener les inclinaisons à être égales; et comme, par cette transformation la surface du tronc se trouverait diminuée (*Lemme*), on devrait en conclure qu'elle n'était pas d'abord un *minimum*.

Corollaire. Et, comme tous les troncs de prismes triangulaires qui ont les mêmes arêtes latérales et la même section perpendiculaire à ces arêtes ont aussi la même surface latérale, il en faut conclure que celui dans lequel le plan qui contient les milieux des arêtes latérales est perpendiculaire à leur direction commune, est aussi celui dont la somme des aires des deux bases est la moindre possible.

THÉORÈME. De tous les troncs de parallélipèdes qui ont les mêmes arêtes latérales et la même section perpendiculaire à ces arêtes, celui de moindre surface est le tronc de parallélipède dans lequel le plan qui contient les milieux des arêtes latérales, est perpendiculaire à leur direction commune.

Démonstration. En effet, tous les parallélipèdes formés avec

les mêmes arêtes latérales et la même section perpendiculaire à ces arêtes ayant la même surface latérale, il suffit, pour remplir la condition prescrite, que la somme des aires des bases ou, ce qui revient au même, la somme de leurs moitiés soit la moindre possible; ce qui ramène la question au précédent corollaire, et prouve la vérité de la proposition.

Corollaire. Donc aussi de tous les troncs de parallélipèdes qui ont les mêmes arêtes latérales et la même section perpendiculaire à ces arêtes, celui dans lequel la somme des aires des bases est la plus petite, est le tronc de parallélipède dans lequel le plan qui contient les milieux des arêtes latérales, est perpendiculaire à leur direction commune.

THÉORÈME. De tous les troncs de parallélipèdes qui ont les deux mêmes faces latérales opposées et la même section perpendiculaire aux arêtes latérales, celui de moindre surface est le tronc de parallélipède dans lequel les plans des deux bases ont des inclinaisons égales sur les faces latérales données.

Démonstration. En effet, dans tous les troncs de parallélipèdes de cette nature, la surface latérale étant constante; pour que la surface totale soit un *minimum*, il est nécessaire et il suffit que la somme des aires des bases ou, ce qui revient au même, la somme des moitiés de ces aires soit la moindre possible, ce qui ramène la question au cas du lemme ci-dessus, et démontre conséquemment la vérité de la proposition.

Corollaire. Il est facile de conclure de là que, si les deux faces latérales opposées que l'on suppose être données sont des trapèzes isocèles, les deux autres faces latérales opposées devront être aussi des trapèzes isocèles. (*)

(*) La théorie développée dans le précédent article étant très-claire, il serait à désirer, afin de rendre cette théorie tout à fait élémentaire, qu'on pût trouver, pour les trois derniers problèmes, ou tout au moins pour le second, quelque solution aussi simple que celle que M. Castelnau a donnée du premier.