ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

TÉDENAT

Deuxième solution

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 3 (1812-1813), p. 37-40

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1812-1813__3__37_1>

Deuxième solution ;

Par M. Tédenat, correspondant de la première classe de l'Institut, recteur de l'académie de Nismes.

Soient après z opérations, X_z la quantité d'eau qui se trouve dans le vase A, et Y_z la quantité d'eau qui se trouve dans le vase B. A la fin de l'opération suivante, ces deux quantités seront devenues respectivement X_{z+1} et Y_{z+1} ; or, il est clair que la quantité d'eau qui se trouvera alors dans le vase A sera égale à celle qui s'y trouvait après la z^{me} opération, moins celle que la $(z+1)^{me}$ en a soustraite, plus celle qu'elle y a introduite ; ce qui donne sur-le-champ l'équation

$$X_{z+1}=X_z-\frac{c}{a}X_z+\frac{c}{b}Y_z=\left(1-\frac{c}{a}\right)X_z+\frac{c}{b}Y_z\ .$$

Mais, d'un autre côté, si l'on désigne par α et β les quantités d'eau qui se trouvaient respectivement dans les deux vases A et B, avant la première opération, on aura

$$X_z+Y_z=\alpha+\beta\ ,\quad \text{d'où}\quad Y_z=\alpha+\beta-X_z\ ;$$

substituant donc dans l'équation ci-dessus, elle deviendra

$$X_{z+1}=\left(1-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right)X_z+\frac{c(\alpha+\beta)}{b}\ ;$$

équation du premier ordre aux différences, entre les deux variables X et z, dont les coefficiens sont constans, et dont l'intégrale est

$$X_z=a\frac{\alpha+\beta}{a+b}+C\left(1-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right)^z\ ;\quad (*)$$

C étant une constante arbitraire.

(*) Voyez le *Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral* de M. Lacroix, deuxième édition, page 573.

De l'équation

$$X_{z+1}=\left(1-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right)X_z+\frac{c(\alpha+\beta)}{b}\ ,$$

on déduit

$$X_{z+2}=\left(1-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right)X_{z+1}+\frac{c(\alpha+\beta)}{b}\ ;$$

d'où, en retranchant et transposant,

$$X_{z+2}=\left(2-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right)X_{z+1}-\left(1-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right)X_z\ ;$$

équation du second ordre qui rentre dans celle de M. Lhuilier.

Pour l'intégrer, on posera $X_z=p^z$ d'où $X_{z+1}=p^{z+1}$, $X_{z+2}=p^{z+2}$ ce qui donnera, en substituant et divisant par p^z,

$$p^2-\left(2-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right)p+\left(1-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right)=0\ ;$$

d'où

$$p=1\quad\text{et}\quad p=1-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\ ;$$

donc

Or, à $z=0$ doit répondre $X_z=\alpha$; donc

$$\alpha=a.\frac{\alpha+\beta}{a+b}+C\ ,\quad \text{d'où}\quad C=\frac{\alpha b-\beta a}{a+b}\ ;$$

et par conséquent

$$X_z=a.\frac{\alpha+\beta}{a+b}+\frac{\alpha b-\beta a}{a+b}\left(1-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right)^z.$$

D'après cela, si l'on dénote simplement par X, Y les quantités d'eau, et par X', Y' les quantités de vin contenues respectivement dans les deux vases A et B, après la n^{me} opération; et si en outre α' et β' sont les quantités de vin que renfermaient ces deux vases, avant la première opération; en observant que

$$X'+X'=\alpha+\alpha'=a\quad ,\qquad X+Y=\alpha+\beta\ ,$$
$$Y+Y'=\beta+\beta'=b\quad ,\qquad X'+Y'=\alpha'+\beta'\ ,$$

on trouvera

$$X=a.\frac{\alpha+\beta}{a+b}+\frac{\alpha b-\beta a}{a+b}\left(1-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right)^n,$$
$$X'=a.\frac{\alpha'+\beta'}{a+b}+\frac{\alpha' b-\beta' a}{a+b}\left(1-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right)^n;$$
$$Y=b.\frac{\alpha+\beta}{a+b}-\frac{\alpha b-\beta a}{a+b}\left(1-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right)^n;$$
$$Y'=b.\frac{\alpha'+\beta'}{a+b}-\frac{\alpha' b-\beta' a}{a+b}\left(1-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right)^n.$$

Parmi une multitude de remarques auxquelles ces formules peuvent donner lieu, nous nous arrêterons aux suivantes.

$\frac{c}{a}$ et $\frac{c}{b}$ étant, dans les cas, deux fractions positives, il en résulte que $\frac{c}{a}+\frac{c}{b}$ est toujours compris entre 0 et 2, et que conséquemment $1-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}$ est toujours fractionnaire et compris entre $+1$ et -1.

$$X_z=M+N\left(1-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right)^z.$$

Les constantes M et N se détermineront tant par l'équation du premier ordre que par l'état initial du mélange.

J. D. C.

Donc 1.° les valeurs de X, X', Y, Y' tendent constamment à se réduire à leurs premiers termes, à mesure que n devient plus grand; et elles y tendent de manière à rester toujours au-dessus ou toujours au-dessous, si l'on a $\frac{c}{a}+\frac{c}{b}<1$ ou $c<\frac{ab}{a+b}$; tandis qu'au contraire elles se trouvent alternativement au-dessus et au-dessous de cette limite, si l'on a $c>\frac{ab}{a+b}$.

2.° Si l'on avait exactement $c=\frac{ab}{a+b}$, d'où $1-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}=0$, les valeurs de X, X', Y, Y' atteindraient leurs limites respectives dès la première opération; de manière que les opérations subséquentes n'y changeraient rien, et qu'alors le mélange se trouverait homogène dans les deux vases. Ainsi, en prenant la mesure $c=\frac{ab}{a+b}$, on sera assuré, sans même connaître l'état initial du mélange dans chacun des deux vases, que ce mélange est exactement le même dans l'un et dans l'autre après une seule opération. Et il est de plus aisé de voir que la chose aurait lieu également, lors même que les liquides mêlés dans chacun s'y trouveraient au nombre de plus de deux.