
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

GERGONNE

Fonctions circulaires. Développemens, en séries, des sinus et cosinus suivant l'arc, et de l'arc suivant sa tangente

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 3 (1812-1813), p. 344-346

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1812-1813__3__344_1

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1812-1813, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

FONCTIONS CIRCULAIRES.

*Développemens , en séries , des sinus et cosinus suivant
l'arc , et de l'arc suivant sa tangente ;*

Par M. GERGONNE.



I. **L**E sinus d'un arc variant de signe avec cet arc , sans varier de grandeur absolue ; on est autorisé à supposer

$$\text{Sin.}x = Ax + Bx^3 + Cx^5 + Dx^7 + \dots ; \quad (1)$$

et conséquemment

$$\text{Sin.}y = Ay + By^3 + Cy^5 + Dy^7 + \dots ; \quad (2)$$

$$\text{Sin.} \frac{1}{2}(x-y) = A[\frac{1}{2}(x-y)] + B[\frac{1}{2}(x-y)]^3 + \dots \quad (3)$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'équation

$$\text{Sin.}x - \text{Sin.}y = 2\text{Cos.} \frac{1}{2}(x+y)\text{Sin.} \frac{1}{2}(x-y) ,$$

les deux membres de l'équation résultante seront divisibles par $\frac{1}{2}(x-y)$,
et , en exécutant la division , il viendra

$$\{A + B[\frac{1}{2}(x-y)]^2 + C[\frac{1}{2}(x-y)]^4 + \dots\} \text{Cos.} \frac{1}{2}(x+y) = \\ A + B(x^2 + xy + y^2) + C(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4) + \dots$$

Si , dans cette dernière équation , on fait $y=x$, elle se réduira à

$$A\text{Cos.}x = A + 3Bx^2 + 5Cx^4 + 7Dx^6 + \dots ; \quad (4)$$

on aura donc aussi

$$A\text{Cos.}y = A + 3By^2 + 5Cy^4 + 7Dy^6 + \dots \quad (5)$$

substituant les valeurs de $\text{Cos.}x$ et $\text{Cos.}y$, données par ces deux équations , ainsi que celle de $\text{Sin.} \frac{1}{2}(x-y)$, donnée par l'équation (3) , dans l'équation

$$\text{Cos.}y - \text{Cos.}x = 2\text{Sin.} \frac{1}{2}(x+y)\text{Sin.} \frac{1}{2}(x-y) ,$$

les deux membres de l'équation résultante seront divisibles par $\frac{1}{2}(x-y)$,
et , en exécutant la division , il viendra

$$A\{A+B[\frac{1}{2}(x-y)]^2+C[\frac{1}{2}(x-y)]^4+\dots\}\text{Sin.}\frac{1}{2}(x+y)=$$

$$-3B(x+y)-5C(x^3+x^2y+xy^2+y^3)-\dots$$

Si, dans cette dernière équation, on fait $y=x$, elle deviendra

$$A^2\text{Sin.}x=-2.3Bx-4.5Cx^3-6.7Dx^5-\dots;$$

mais l'équation (1) donne

$$A^2\text{Sin.}x=A^3x+A^2Bx^3+A^2Cx^5+\dots;$$

on aura donc

$$-2.3B=A^3, \quad -4.5C=A^2B, \quad -6.7D=A^2C, \dots$$

et par conséquent

$$B=-\frac{A^3}{1.2.3}, \quad C=+\frac{A^5}{1.2.3.4.5}, \quad D=-\frac{A^7}{1.2.3.4.5.6.7}, \dots;$$

donc enfin (1 et 4)

$$\text{Sin.}x=\frac{Ax}{1}-\frac{A^3x^3}{1.2.3}+\frac{A^5x^5}{1.2.3.4.5}-\frac{A^7x^7}{1.2.3.4.5.6.7}+\dots$$

$$\text{Cos.}x=1-\frac{A^2x^2}{1.2}+\frac{A^4x^4}{1.2.3.4}-\frac{A^6x^6}{1.2.3.4.5.6}+\dots$$

Il est d'ailleurs facile de prouver que la constante A doit être égale à l'unité. (*)

II. La tangente d'un arc variant aussi de signe avec cet arc, sans varier de grandeur absolue; on est autorisé à supposer —

$$x=ATang.x+BTang.^3x+CTang.^5x+\dots; \quad (6)$$

on aura donc aussi

$$y=ATang.y+BTang.^3y+CTang.^5y+\dots; \quad (7)$$

$$x-y=ATang.(x-y)+BTang.^3(x-y)+\dots \quad (8)$$

Si l'on égale la valeur de $x-y$ donnée par les équations (6 et 7) à celle que donne l'équation (8), en mettant en évidence le facteur $Tang.x-Tang.y$, qui affecte l'un des membres de l'équation résultante, il viendra

$$(Tang.x-Tang.y)\{A+B(Tang.^2x+Tang.xTang.y+Tang.^2y)+\dots\}$$

$$=Tang.(x-y)\{A+BTang.^2(x-y)+CTang.^4(x-y)+\dots\};$$

mais on a

(*) Voyez la *Théorie des fonctions analitiques*.

$\text{Tang } x - \text{Tang } y = (1 + \text{Tang } x \text{Tang } y) \text{Tang } (x - y)$,
 substituant donc, et supprimant le facteur commun $\text{Tang } (x - y)$,
 on aura

$$(1 + \text{Tang } x \text{Tang } y) \{ A + B(\text{Tang}^2 x + \text{Tang } x \text{Tang } y + \text{Tang}^2 y) + \dots \} \\ = A + B \text{Tang}^2 (x - y) + C \text{Tang}^4 (x - y) + \dots ;$$

posant alors $y = x$, cette équation deviendra simplement

$$A = (1 + \text{Tang}^2 x) \{ A + 3B \text{Tang}^2 x + 5C \text{Tang}^4 x + \dots \} ;$$

ou, en développant,

$$A = A + 3B \left| \text{Tang}^2 x + 5C \right| \text{Tang}^4 x + 7D \left| \text{Tang}^6 x + \dots \right| \\ + A \left| \quad \quad + 3B \right| \quad \quad + 5C \left| \quad \quad \right|$$

donc

$$3B + A = 0, \quad 5C + 3B = 0, \quad 7D + 5C = 0, \dots ;$$

d'où

$$B = -\frac{1}{3}A, \quad C = +\frac{1}{5}A, \quad D = -\frac{1}{7}A, \dots ;$$

donc enfin (6)

$$x = A(\text{Tang } x - \frac{1}{3}\text{Tang}^3 x + \frac{1}{5}\text{Tang}^5 x - \dots) ;$$

on parviendra d'ailleurs facilement à s'assurer que la constante A doit être égale à l'unité.
