ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

GERGONNE

Analise élémentaire. Démonstration du principe qui sert de fondement au calcul des fonctions symétriques

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 3 (1812-1813), p. 238-241

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1812-1813__3__238_0>

ANALISE ÉLÉMENTAIRE.

Démonstration du principe qui sert de fondement au calcul des fonctions symétriques ;

Par M. Gergonne.

Le théorème dont je vais m'occuper ici, et que Newton a donné le premier, sans démonstration, peut être énoncé en ces termes :

Il y a entre les sommes de puissances semblables de plusieurs quantités et leurs sommes de produits deux à deux, trois à trois, quatre à quatre, etc., des relations soumises à une loi régulière, et telles que les premières peuvent être exprimées en fonctions rationnelles et entières des dernières, et réciproquement.

Ce théorème étant proprement du domaine de la théorie des combinaisons, je vais en donner une démonstration fondée uniquement sur cette théorie, et qui me paraît plus courte et plus simple que celles que l'on déduit de la théorie des équations.

Soit a, b, c,.... des quantités quelconques, au nombre de m. Soient généralement désignées par S_n la somme de leurs n^{mes} puissances, et par P_n la somme de leurs produits n à n ; on aura $S_0=m$, $S_1=P_1$, $P_{m+k}=0$. Soient, en outre, désignées par A_n la somme de ceux de leurs produits n à n où a n'entre pas, par B_n la somme de ceux de ces produits ou b n'entre pas, et ainsi de suite, ce qui donnera $A_m=0$, $B_m=0$, ...

Ces notations admises, il est facile de se convaincre qu'on doit avoir généralement

$$P_n = A_n + aA_{n-1}\ ; \qquad (1)$$

car, en prenant, au hasard, un produit de n des lettres données, s'il renferme a, il se trouvera dans aA_{n-1}, et ne s'y trouvera qu'une fois; et, s'il ne renferme pas a, il se trouvera dans A_n, et ne s'y trouvera également qu'une fois; d'où l'on voit que $A_n + aA_{n-1}$ contient, et ne contient qu'une fois seulement, tous les produits n à n, et est conséquemment égal à P_n.

Je dis, en second lieu, qu'on doit avoir aussi, généralement,

$$A_n + B_n + C_n + \ldots = (m-n)P_n\ ; \qquad (2)$$

en effet, si chacune des quantités A_n, B_n, C_n, ... était précisément la somme des produits des quantités a, b, c, ... prises n à n, leur somme serait égale à m fois la somme de ces produits, c'est-à-dire, à mP_n; mais, parce que ces produits ont n facteurs, chacun d'eux doit manquer, à son tour, dans n des quantités A_n, B_n, C_n, ... La somme $A_n + B_n + C_n + \ldots$ doit donc renfermer m fois la somme des produits n à n, moins n fois cette somme, c'est-à-dire, qu'elle doit être égale à $m-n$ fois la somme de ces produits ou, ce qui revient au même, à $(m-n)P_n$.

Cela posé, soient premièrement écrites les équations que voici, lesquelles sont déduites de l'équation (1); et en nombre moindre que m,

$$\begin{array}{l}
P_1 = A_1 + a\ , \\
P_2 = A_2 + aA_1\ , \\
P_3 = A_3 + aA_2\ , \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
P_n = A_n + aA_{n-1}\ ;
\end{array}$$

on en conclura facilement, en réduisant,

$$a^n - P_1a^{n-1} + P_2a^{n-2} - P_3a^{n-3} + \ldots \pm P_n = \pm A_n\ ;$$

on aurait pareillement

$$b^n - P_1 b^{n-1} + P_2 b^{n-2} - P_3 b^{n-3} + \ldots \pm P_n = \pm B_n \,,$$
$$c^n - P_1 c^{n-1} + P_2 c^{n-2} - P_3 b^{n-3} + \ldots \pm P_n = \pm C_n \,,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ;$$

prenant donc la somme de ces équations, en ayant égard à l'équation (2), il viendra

$$S_n - P_1 S_{n-1} + P_2 S_{n-2} - P_3 S_{n-3} + \ldots \pm m P_n = \pm (m-n) P_n \,,$$

ou, en transposant et réduisant,

$$S_n - P_1 S_{n-1} + P_2 S_{n-2} - P_3 S_{n-3} + \ldots \pm n P_n = 0. \qquad (3)$$

Soit, en second lieu, $n > m$, et soient écrites les équations que voici :

$$P_1 = A_1 + a \quad ;$$
$$P_2 = A_2 + a A_1 \,,$$
$$P_3 = A_3 + a A_2 \,,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$P_m = 0 + a A_{m-1} \,;$$

on en déduira facilement

$$a^n - P_1 a^{n-1} + P_2 a^{n-2} - P_3 a^{n-3} + \ldots \pm P_m a^{n-m} = 0 \,;$$

on aura pareillement

$$b^n - P_1 b^{n-1} + P_2 b^{n-2} - P_3 b^{n-3} + \ldots \pm P_m b^{n-m} = 0 \,,$$
$$c^n - P_1 c^{n-1} + P_2 c^{n-2} - P_3 c^{n-3} + \ldots \pm P_m c^{n-m} = 0 \,,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ;$$

d'où, en ajoutant

$$S_n - P_1 S_{n-1} + P_2 S_{n-2} - P_3 S_{n-3} + \ldots \pm P_m S_{u-m} = 0. \qquad (4)$$

On déduit des équations (3) et (4)

$$S_1 - P_1 = 0 \,,$$
$$S_2 - P_1 S_1 + 2 P_2 = 0 \,;$$

S_3

$$S_3 - P_1 S_2 + P_2 S_1 - 3P_3 = 0 ,$$

. . . .

$$S_{m-1} - P_1 S_{m-2} + P_2 S_{m-3} - P_3 S_{m-4} + \ldots \mp (m-1) P_{m-1} = 0 ,$$

$$S_m - P_1 S_{m-1} + P_2 S_{m-2} - P_3 S_{m-3} + \ldots \ldots \mp P_{m-1} S_1 \pm m P_m = 0 ,$$

$$S_{m+1} - P_1 S_m + P_2 S_{m-1} - P_3 S_{m-2} + \ldots \ldots \ldots \mp P_{m-1} S_2 \pm P_m S_1 = 0 ,$$

$$S_{m+2} - P_1 S_{m+1} + P_2 S_m - P_3 S_{m-1} + \ldots \ldots \ldots \mp P_{m-1} S_3 \pm P_m S_2 = 0 ,$$

. . . . ;

équations qui mettent en évidence la vérité du théorème.