
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

J. F. FRANÇAIS

**Analyse transcendante. Mémoire sur les maxima et minima
des fonctions à un nombre quelconque de variables; présenté
à la I.re classe de l'institut, le 15 avril 1811**

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 3 (1812-1813), p. 197-206

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1812-1813__3__197_0

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1812-1813, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ANALISE TRANSCENDANTE.

Mémoire sur les maxima et minima des fonctions d'un nombre quelconque de variables ;

Présenté à la 1.^{re} classe de l'institut, le 15 avril 1811 ;

Par M. J. F. FRANÇAIS , professeur à l'école impériale de l'artillerie et du génie.



M. Lagrange a fait voir que les conditions assignées par Euler, pour l'existence des *maxima* et *minima* des fonctions à deux variables, étaient insuffisantes, et y a ajouté une nouvelle condition ; de plus, il a étendu cette théorie aux fonctions d'un nombre quelconque de variables. Je me propose de faire voir, dans ce mémoire, 1.^o que la nouvelle condition introduite par M. Lagrange exige trop ; 2.^o qu'outre les *maxima* et *minima* déterminés qu'on a considérés jusqu'à présent, il peut exister une infinité de *maxima* et *minima*, liés entre eux par une ou plusieurs relations entre les variables de la fonction proposée, et que ce cas a précisément lieu, lorsque les nouvelles conditions assignées par M. Lagrange sont en défaut.

1. Si $\phi(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ devient un *maximum* ou un *minimum* ; pour les valeurs $x_1 = a_1, x_2 = a_2, x_3 = a_3, \dots, x_n = a_n$; on pourra représenter un état voisin de cette fonction par

$$V_3 = [(D\xi_4 + \dots)^2 + V_4] : \{ [(C_{1,1}C_{2,2} - C_{1,2}^2)(C_{1,1}C_{3,3} - C_{1,3}^2) - (C_{1,1}C_{2,3} - C_{1,2}C_{1,3})^2] [(C_{1,1}C_{2,2} - C_{1,2}^2)(C_{1,1}C_{4,4} - C_{1,4}^2) - (C_{1,1}C_{2,4} - C_{1,2}C_{1,4})^2] - [C_{1,1}C_{2,2} - C_{1,2}^2](C_{1,1}C_{3,4} - C_{1,3}C_{1,4}) - (C_{1,1}C_{2,3} - C_{1,2}C_{1,3})(C_{1,1}C_{2,4} - C_{1,2}C_{1,4})]^2 \}, \quad (*)$$

$$V_4 = \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots$$

Les coefficients des accroissemens ξ_3, ξ_4, \dots , dans V_3, V_4, \dots , finissent par devenir très-complicqués ; mais , comme ils sont tous très-symétriques , il est aisé d'en assigner la loi , et de les représenter par des symboles indiquant leur génération et pouvant servir à calculer leurs valeurs. En représentant le coefficient de ξ_2 , dans V_1 , par $\alpha_{2,2}$, ceux de $\xi_3, \xi_4, \dots, \xi_n$ deviennent $\alpha_{2,3}, \alpha_{2,4}, \dots, \alpha_{2,n}$, et se déduisent d'une manière très-simple de $\alpha_{2,2} = C_{1,1}C_{2,2} - C_{1,2}^2$; il suffit , pour cela , de changer le 2 , après la virgule , en 3 , 4 , ... n , et de ne faire ce changement dans le second terme $C_{1,n}^2$ que pour un de ses facteurs ; de sorte qu'on aura $\alpha_{2,3} = C_{1,1}C_{2,3} - C_{1,2}C_{1,3}$, $\alpha_{2,4} = C_{1,1}C_{2,4} - C_{1,2}C_{1,4}$, ... $\alpha_{2,n} = C_{1,1}C_{2,n} - C_{1,2}C_{1,n}$. On obtient ainsi

$$V_1 = \frac{1}{\alpha_{2,2}} [(\alpha_{2,2}\xi_2 + \alpha_{2,3}\xi_3 + \alpha_{2,4}\xi_4 + \dots + \alpha_{2,n}\xi_n)^2 + V_2].$$

Au moyen de cette notation , V_2 devient

$$V_2 = \frac{[(\alpha_{2,2}\alpha_{3,3} - \alpha_{2,3}^2)\xi_3 + (\alpha_{2,2}\alpha_{3,4} - \alpha_{2,3}\alpha_{3,4})\xi_4 + \dots + (\alpha_{2,2}\alpha_{3,n} - \alpha_{2,3}\alpha_{3,n})\xi_n]^2 + V_3}{\alpha_{2,2}\alpha_{3,3} - \alpha_{2,3}^2} ;$$

c'est-à-dire , de la même forme que V_1 exprimé en C . On pourra donc représenter les coefficients de cette formule par $\beta_{3,3}, \beta_{3,4}, \beta_{3,5}, \dots, \beta_{3,n}$, et ces quantités se déduiront de $\beta_{3,3}$, comme $\alpha_{2,3}$, $\alpha_{2,4}, \alpha_{2,5}, \dots, \alpha_{2,n}$ se déduisent de $\alpha_{2,2}$, de sorte qu'on aura

(*) La lettre D est employée ici , par abréviation , pour représenter le dénominateur de la valeur de V_3 ; c'est-à-dire , la quantité qui suit le signe (:) dans cette valeur.

$$\beta_{3,4} = \alpha_{2,2}\alpha_{3,4} - \alpha_{2,3}\alpha_{2,4}, \quad \beta_{3,5} = \alpha_{2,2}\alpha_{3,5} - \alpha_{2,3}\alpha_{2,5}, \quad \dots, \beta_{3,n} \\ = \alpha_{2,2}\alpha_{3,n} - \alpha_{2,3}\alpha_{2,n}.$$

En continuant ce raisonnement de la même manière, on démontrera aisément que les termes V , V_1 , V_2 , V_3 , \dots , V_{n-2} , V_{n-1} , peuvent être mis sous la forme suivante

$$V = \frac{1}{C_{1,1}} \{ (C_{1,1}\xi_1 + C_{1,2}\xi_2 + C_{1,3}\xi_3 + \dots + C_{1,n}\xi_n)^2 + V_1 \}, \\ V_1 = \frac{1}{\alpha_{2,1}} \{ (\alpha_{2,2}\xi_2 + \alpha_{2,3}\xi_3 + \alpha_{2,4}\xi_4 + \dots + \alpha_{2,n}\xi_n)^2 + V_2 \}, \\ V_2 = \frac{1}{\beta_{3,1}} \{ (\beta_{3,2}\xi_3 + \beta_{3,4}\xi_4 + \beta_{3,5}\xi_5 + \dots + \beta_{3,n}\xi_n)^2 + V_3 \}, \\ V_3 = \frac{1}{\gamma_{4,1}} \{ (\gamma_{4,4}\xi_4 + \gamma_{4,5}\xi_5 + \gamma_{4,6}\xi_6 + \dots + \gamma_{4,n}\xi_n)^2 + V_4 \}, \\ \dots, \\ V_{n-2} = \frac{1}{\psi_{n-1,n-1}} \{ (\psi_{n-1,n-1}\xi_{n-1} + \psi_{n-1,n}\xi_n)^2 + V_{n-1} \}, \\ V_{n-1} = \frac{1}{\omega_{n,n}} (\omega_{n,n}\xi_n)^2 = \omega_{n,n}\xi_n^2;$$

où chaque espèce de symbole dérive de la précédente, comme les β dérivent des α , et ceux-ci des C .

En faisant les substitutions successives de ces quantités dans V , on obtient

$$V = \frac{1}{C_{1,1}} (C_{1,1}\xi_1 + C_{1,2}\xi_2 + C_{1,3}\xi_3 + \dots + C_{1,n}\xi_n)^2 \\ + \frac{1}{C_{1,1}\alpha_{2,1}} (\alpha_{2,2}\xi_2 + \alpha_{2,3}\xi_3 + \alpha_{2,4}\xi_4 + \dots + \alpha_{2,n}\xi_n)^2$$

+

Examinons, d'après cela, les différentes circonstances qui peuvent avoir lieu, dans ces deux séries de conditions.

5. Jusqu'à présent, on n'avait considéré les équations (4) que comme ayant lieu indépendamment les unes des autres, de manière que les valeurs des variables correspondant au *maximum* ou *minimum* étaient entièrement déterminées; mais il s'en faut de beaucoup que cet état déterminé des variables soit nécessaire pour l'existence du *maximum* ou *minimum*; nous allons voir, au contraire, qu'il peut avoir lieu, avec la plus grande indétermination possible entre les variables; et nous examinerons comment le plus ou le moins d'indétermination entre elles influe sur les conditions (5).

6. Les équations (4) sont évidemment satisfaites par chacun des systèmes suivans

$$\lambda=0; B_1=l_1\lambda, B_2=l_2\lambda, B_3=l_3\lambda, \dots B_n=l_n\lambda; \quad (6)$$

$$\lambda=0, \mu=0; B_1=l_1\lambda+m_1\mu, B_2=l_2\lambda+m_2\mu, \dots B_n=l_n\lambda+m_n\mu; \quad (7)$$

$$\lambda=0, \mu=0, \varpi=0; B_1=l_1\lambda+m_1\mu+p_1\varpi, B_2=l_2\lambda+m_2\mu+p_2\varpi, \dots B_n=l_n\lambda+m_n\mu+p_n\varpi; \quad (8)$$

.....

où $\lambda, \mu, \varpi, \dots, l_1, m_1, p_1, \dots, l_2, m_2, p_2, \dots$ peuvent être des fonctions quelconques des variables qui entrent dans la fonction proposée.

Si l'on différentie les équations (6), pour en tirer les valeurs de $C_{1,1}, C_{1,2}, C_{1,3}, \dots, C_{1,n}, C_{2,2}, C_{2,3}, C_{2,4}, \dots, C_{2,n}, C_{3,3}, \dots, C_{n,n}$, on trouve, entre ces quantités, les relations $\alpha_{2,2}=0, \alpha_{2,3}=0, \alpha_{2,4}=0, \dots, \alpha_{2,n}=0$, et par conséquent tous les $\beta, \gamma, \dots, \psi, \omega$, s'évanouissent aussi. L'équation (2) se réduit donc à son premier terme, et les conditions (5) à $C_{1,1} \gtrless 0$. Les conditions du *minimum* ou *maximum* seront donc, dans ce cas,

$$\lambda=0, C_{1,1} \gtrless 0; \quad (9)$$

et toutes les valeurs des variables satisfaisant à l'équation $\lambda=0$, donnent un *maximum* ou un *minimum*, selon que $C_{1,1}$ est *négatif* ou *positif*.

Cependant, dans ce cas, la valeur de V peut devenir nulle, en supposant entre les accroissemens $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ la relation

$$C_{1,1}\xi_1 + C_{1,2}\xi_2 + C_{1,3}\xi_3 + \dots + C_{1,n}\xi_n = 0. \quad (10)$$

On pourrait donc croire que la condition du *maximum* ou *minimum* n'est pas satisfaite généralement. Mais il est aisé de voir que l'équation (10) n'est autre chose que l'équation différentielle $I_1 d\lambda = 0$, dans laquelle on a substitué pour $dx_1, dx_2, dx_3, \dots, dx_n$ les accroissemens $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$; elle est donc une suite nécessaire de la supposition que nous avons faite, et fait voir que, pour toute autre relation entre les accroissemens $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$, la quantité V devient positive pour le *minimum* et négative pour le *maximum*. Le *maximum* ou *minimum* a donc réellement lieu pour toutes les valeurs des variables satisfaisant à la relation $\lambda = 0$.

En différentiant de même les équations (7), pour en tirer les valeurs de $C_{1,1}, C_{1,2}, \dots, C_{2,n}, C_{2,2}, C_{2,3}, \dots, C_{2,n}, C_{3,3}, \dots, C_{n,n}$, on trouvera, entre ces quantités, les relations $\beta_{3,3} = 0, \beta_{3,4} = 0, \beta_{3,5} = 0, \dots, \beta_{3,n} = 0$, et tous les $\gamma, \delta, \dots, \psi, \omega$, s'évanouiront en même temps. L'équation (2) se réduira à ses deux premiers termes, et les conditions du *minimum* ou *maximum* deviendront

$$\lambda = 0, \mu = 0, C_{1,1} > 0, a_{2,2} > 0. \quad (11)$$

Toutes les valeurs des variables, satisfaisant aux relations $\lambda = 0, \mu = 0$, donneront donc un *minimum* ou *maximum*, si les deux dernières conditions (11) sont satisfaites.

La valeur de V peut devenir nulle, dans ce cas, et faire présumer que le *minimum* ou *maximum* n'a pas lieu généralement, en supposant entre les accroissemens $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ les relations simultanées

$$\left. \begin{aligned} C_{1,1}\xi_1 + C_{1,2}\xi_2 + C_{1,3}\xi_3 + \dots + C_{1,n}\xi_n &= 0, \\ a_{2,2}\xi_2 + a_{2,3}\xi_3 + a_{2,4}\xi_4 + \dots + a_{2,n}\xi_n &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

mais il n'est pas difficile de se convaincre que le système de ces deux équations équivaut à celui des deux équations différentielles $d\lambda = 0, d\mu = 0$, dans lesquelles on aurait substitué les accroissemens $\xi_1, \xi_2,$

ξ_1, \dots, ξ_n à la place de $dx_1, dx_2, dx_3, \dots, dx_n$; il est donc encore une suite nécessaire de notre supposition, et fait voir que le *minimum* ou *maximum* a lieu pour toutes les valeurs des variables satisfaisant aux relations (11).

On trouverait, de la même manière, que les conditions du *minimum* ou *maximum*, pour le système (8) deviennent

$$\lambda=0, \mu=0, \pi=0; C_{1,1} > 0, a_{2,2} > 0, \beta_{3,3} > 0. \quad (13)$$

Il n'est pas difficile maintenant d'étendre ces conclusions à un nombre quelconque de facteurs qui affecteraient les valeurs de $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$.

7. Dans ce qui précède, nous avons supposé que les facteurs λ, μ, π, \dots affectaient tous les termes de U ; ce qui a fait disparaître plusieurs carrés en entier, dans la valeur de V . Mais, si l'on suppose que ces facteurs n'affectent que quelques termes de U , il ne disparaîtra plus de carrés entiers dans la valeur de V , mais seulement quelques-uns de leurs termes. Ainsi, si l'on a

$$\lambda=0, \mu=0; B_1=l_1\lambda, B_2=l_2\lambda, B_3=m_3\mu, B_4=m_4\mu, \\ B_5=m_5\mu, B_6=0, B_7=0, \dots, B_n=0; \quad (14)$$

on trouvera $a_{2,2}=0, a_{4,4}=0, a_{4,5}=0, \beta_{5,5}=0$.

Il se présente ici une difficulté très-sérieuse, qu'il est nécessaire de lever pour assurer notre théorie. En substituant les valeurs précédentes dans celles de V , tous les termes après le premier deviennent infinis par le facteur commun $\frac{1}{a_{2,2}}$; on ne peut donc plus rien conclure de cette valeur, pour l'existence du *maximum* ou *minimum*. Dans ce cas, il faut avoir recours à l'observation que nous avons faite au n.º 4, et ordonner les accroissemens $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ entre eux, de manière que les premiers termes des carrés qui composeront le nouveau développement de V ne s'évanouissent pas; (ce que l'on démontre aisément être toujours possible); alors il n'y a plus, dans les carrés successifs qui forment le développement de V , que quelques termes qui s'évanouissent. Les conditions (5) que l'on tire de ce nouveau développement de V subsisteront donc

en entier ; la seule différence qu'il y aura , dans ce cas , consiste en ce que $\alpha_{2,2}$, $\beta_{3,3}$, $\gamma_{4,4}$, ne peuvent plus recevoir autant de valeurs différentes que nous leur en avons assignées au n.º 4. La réduction du nombre de ces valeurs dépend de celui des facteurs , et de celui des coefficients de V affectés par chacun d'eux.

Le même raisonnement et des conclusions analogues sont applicables au cas suivant et à tous les autres semblables.

$$\lambda=0, \mu=0, \pi=0; B_1=l_1\lambda+m_1\mu, B_2=l_2\lambda+m_2\mu, B_3=l_3\lambda+m_3\mu, \\ B_4=l_4\lambda+p_4\pi, B_5=m_5\mu+p_5\pi, B_6=0, B_7=0, \dots B_n=0. \quad (15)$$

8. Il résulte de cette théorie , 1.º qu'outre les *maxima* et les *minima* déterminés des fonctions à plusieurs variables , qu'on a considérés jusqu'à présent , il peut exister une infinité de *maxima* et *minima* indéterminés , liés entre eux par une ou plusieurs relations entre les variables de la fonction proposée ; 2.º que , pour l'existence de ces *maxima* ou *minima* indéterminés , il faut que les coefficients de la valeur de U s'évanouissent , soit par un ou plusieurs facteurs communs à tous , soit par un ou plusieurs facteurs affectant seulement quelques-uns d'entre eux , tandis que les coefficients restans peuvent s'évanouir d'eux-mêmes ; 3.º que , pour le premier des deux cas précédens , les conditions (5) se réduisent à la première , quand tous les coefficients de la valeur de U s'évanouissent , par un seul facteur commun ; et qu'elles se réduisent aux deux premières , aux trois premières , etc. , quand tous les coefficients s'évanouissent par deux facteurs , trois facteurs , etc. , communs à tous ; 4.º que , dans le second cas , toutes les conditions (5) ont lieu , mais qu'elles ne peuvent plus alors être remplacées par le nombre de conditions équivalentes que nous avons indiquées au n.º 4 ; 5.º enfin , que cette théorie est nécessaire pour compléter celle des *maxima* et *minima* des fonctions de plusieurs variables.

9. J'ai donné , dans une note précédente , un essai de cette théorie , appliquée aux surfaces courbes (*), et j'y ai fait voir qu'il peut y

(*) Voyez la page 132 de ce volume.

avoir sur les surfaces une infinité de *maxima* et *minima* indéterminés, liés entre eux par une courbe continue. En l'appliquant à la mécanique, on peut trouver des fonctions du temps qui deviennent des *maxima* ou *minima*, pour tous les points d'une surface courbe ou d'une courbe à double courbure, selon que tous les coefficients de U s'évanouiront, par un ou par deux facteurs communs.

Metz, le 2 mai 1810.
