
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

LHUILIER

Géométrie. Recherche de la plus grande des projections orthographiques d'un système de figures planes, données de grandeur sur des plans donnés de position dans l'espace, et de la plus grande des projections orthographiques d'un triangle sphérique

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 2 (1811-1812), p. 49-59

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1811-1812__2__49_1

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1811-1812, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

GÉOMÉTRIE.

Recherche de la plus grande des projections orthographiques d'un système de figures planes, données de grandeur sur des plans donnés de position dans l'espace, et de la plus grande des projections orthographiques d'un triangle sphérique ;

Par M. LHUILIER , professeur de mathématiques à l'académie impériale de Genève.

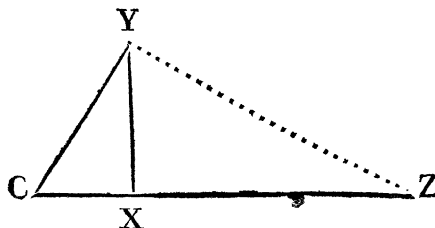


LA doctrine des projections orthographiques est de la plus grande importance , soit dans les mathématiques pures , soit dans les mathématiques mixtes. Elle sert de base aux propositions les plus générales de la polygonométrie et de la polyhédrométrie. Elle trouve des ap-

plications fréquentes et importantes dans l'optique, dans la perspective, dans la géographie, dans la gnomonique et sur-tout dans l'astronomie. Tout ce qui peut contribuer à étendre ou à éclairer cette doctrine est d'une utilité ou immédiate ou indirecte. L'objet de ce mémoire est intéressant et remarquable, soit par la réduction d'une question générale de *maximum* aux simples élémens, soit par l'accord de ses résultats avec les propriétés générales des polyèdres (*).

§. 1.

Lemme. Soient deux droites dont on connaît seulement la somme des quarrés : on demande la plus grande valeur de la somme de leurs rectangles par des droites données de grandeur. Ou, soit un triangle rectangle dont l'hypothénuse seulement est donnée de grandeur, on demande la plus grande valeur de la somme des rectangles de ses côtés par des droites données de grandeur.



Soit XCY un triangle rectangle dont on connaît l'hypothénuse CY. Soient m et n deux droites données de grandeur. On demande la plus grande valeur de la somme $m \times XY + n \times CX$?

(*) Nous saisisons cette occasion pour exprimer le vœu qu'à l'exemple de M. *Francaeur*, ceux qui écrivent des élémens de géometrie y introduisent l'importante notion des *projections*, que par-tout on suppose connue et qui n'est pour ainsi dire présentée nulle part ; cette notion, entre autres avantages, serait très-propre à abrégier, et conséquemment à rendre plus clairs les énoncés d'un grand nombre de théorèmes. On dirait, par exemple : *les quarrés des cordes qui, dans un demi-cercle, partent des extrémités du diamètre sont proportionnels à leurs projections sur ce diamètre. L'inclinaison d'une droite sur un plan, se mesure par l'angle que fait cette droite avec sa projection sur ce plan.* etc., etc.

Que la somme $m \times XY + n \times CX$ soit égale au rectangle de la droite n par une droite CZ dont on doit déterminer le *maximum*. On obtient $m \times XY = n \times XZ$; donc $XY : XZ = n : m$. Dans le triangle XYZ , le rapport des côtés XY et XZ se trouvant ainsi connu, ce triangle est donné d'espèce; et, en particulier, l'angle en Z est connu, et la droite ZY est parallèle à une droite donnée de position. De là, la plus grande valeur de CZ a lieu lorsque la droite ZY est tangente au cercle dont C est le centre et dont CY est le rayon. Dans le cas du *maximum*, $ZX : XY = XY : CX = m : n$; savoir, les droites XY et CX sont entre elles directement comme les droites m et n qui leur correspondent.

Puisque $XY : CX = m : n$, on a $CY^2 : \begin{cases} XY^2 \\ CX^2 \end{cases} = mm + nn : \begin{cases} mm \\ nn \end{cases}$; d'où

$$XY = CY \times \frac{m}{\sqrt{mm+nn}}; \quad CX = CY \times \frac{n}{\sqrt{mm+nn}}; \quad CZ = CY \times \frac{\sqrt{mm+nn}}{n};$$

$$\text{et } n \times CZ = CY \times \sqrt{mm+nn}.$$

Remarque. Ce résultat d'un procédé purement élémentaire, s'accorde avec celui du calcul différentiel.

En effet, soient

$$\left. \begin{array}{l} xx + yy = aa \\ mx + ny = maxim. \end{array} \right\} \text{ on aura } \left\{ \begin{array}{l} x + y \frac{dy}{dx} = 0 \\ m + n \frac{dy}{dx} = 0 \end{array} \right\} \text{ d'où } x : y = m : n$$

En général, soient deux quantités variables dont la somme des carrés est donnée. La somme de leurs produits par des quantités données est la plus grande, lorsque ces premières quantités sont entre elles comme les dernières quantités qui leur correspondent (*).

(*) Ce théorème peut encore être démontré d'une manière assez simple et assez élégante en procédant comme il suit :

Soit proposé de déterminer deux inconnues x et y au moyen des deux équations

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad mx + ny = K;$$

la première pourra être considérée comme appartenant à un cercle ayant son centre

Application. Soient des quantités variables en nombre quelconque dont la somme des carrés est donnée : j'affirme que la somme de leurs produits par des quantités données est la plus grande , lorsque ces variables sont entre elles comme les quantités données qui leur correspondent.

En effet , toutes les variables excepté deux quelconques d'entre elles restant les mêmes , ces dernières doivent être entre elles comme les quantités données qui leur correspondent. Donc toutes les variables doivent être entre elles comme les quantités données qui leur correspondent.

à l'origine des coordonnées rectangulaires et son rayon égal à r , tandis que la seconde sera celle d'une droite. Ainsi les valeurs de x et de y qui résoudront le problème seront les coordonnées des points d'intersection de ces deux lignes , de manière que , généralement parlant , le problème aura deux solutions ; mais , comme la distance du centre du cercle à la droite a pour expression

$$\frac{K}{\sqrt{m^2+n^2}} ,$$

le problème ne sera possible qu'autant que cette quantité ne sera pas plus grande que r .

Si maintenant on suppose K indéterminé et qu'on demande quelles valeurs il faut donner à x et y pour qu'il soit le plus grand possible , comme K est proportionnel à

$$\frac{K}{\sqrt{m^2+n^2}} ,$$

la question reviendra à rendre cette dernière quantité la plus grande possible ; il faudra donc poser

$$\frac{K}{\sqrt{m^2+n^2}} = r , \quad \text{d'où} \quad K = r\sqrt{m^2+n^2} ,$$

on aura donc

$$mx + ny = r\sqrt{m^2+n^2} , \quad \text{ou} \quad (mx + ny)^2 = r^2(m^2+n^2) ;$$

éliminant donc r^2 entre cette équation et celle du cercle , il viendra , en développant , transposant , réduisant et extrayant la racine carrée , $my - nx = 0$, ou $\frac{x}{y} = \frac{m}{n}$, comme dans le texte.

(Note des éditeurs.)

§. 2.

Problème. Soient des figures planes données de grandeur, sur des plans donnés de position (non parallèles entre eux). On demande le plan sur lequel on doit les projeter orthographiquement pour que la somme de leurs projections soit la plus grande possible.

Comme les projections sur une même plan de deux figures planes de même grandeur, situées sur des plans parallèles, sont égales entre elles; on peut, pour plus de simplicité, rapporter les figures proposées à des plans qui se coupent en un même point; et en particulier on peut prendre ce point pour l'origine des coordonnées.

Soient $F, F', F'', \dots F^{(n-1)}, F^{(n)}$, les figures données de grandeur.

Que les équations des plans sur lesquels ces figures sont rapportées, et que nous avons supposé passer par l'origine des coordonnées, soient

$$\begin{aligned} x \cos. \alpha &+ y \cos. \beta &+ z \cos. \gamma &= 0, \\ x \cos. \alpha' &+ y \cos. \beta' &+ z \cos. \gamma' &= 0, \\ x \cos. \alpha'' &+ y \cos. \beta'' &+ z \cos. \gamma'' &= 0, \\ \dots\dots\dots, \\ x \cos. \alpha^{(n-1)} &+ y \cos. \beta^{(n-1)} &+ z \cos. \gamma^{(n-1)} &= 0, \\ x \cos. \alpha^{(n)} &+ y \cos. \beta^{(n)} &+ z \cos. \gamma^{(n)} &= 0. \end{aligned}$$

Que l'équation du plan sur lequel on projette des figures, et que nous supposons aussi passer par l'origine, soit

$$x \cos. X + y \cos. Y + z \cos. Z = 0.$$

Les cosinus des inclinaisons de ces premiers plans sur le dernier seront respectivement

$$\begin{aligned} \cos. \alpha &. \cos. X + \cos. \beta . \cos. Y + \cos. \gamma . \cos. Z, \\ \cos. \alpha' &. \cos. X + \cos. \beta' . \cos. Y + \cos. \gamma' . \cos. Z, \\ \cos. \alpha'' &. \cos. X + \cos. \beta'' . \cos. Y + \cos. \gamma'' . \cos. Z, \\ \dots\dots\dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{Cos.}\alpha^{(n-1)}\text{Cos.X} + \text{Cos.}\beta^{(n-1)}\text{Cos.Y} + \text{Cos.}\gamma^{(n-1)}\text{Cos.Z}, \\ & \text{Cos.}\alpha^{(n)}\text{Cos.X} + \text{Cos.}\beta^{(n)}\text{Cos.Y} + \text{Cos.}\gamma^{(n)}\text{Cos.Z}. \end{aligned}$$

La somme des projections des figures proposées sur ce dernier plan sera donc

$$\begin{aligned} & \{ F\text{Cos.}\alpha + F'\text{Cos.}\alpha' + F''\text{Cos.}\alpha'' + \dots + F^{(n-1)}\text{Cos.}\alpha^{(n-1)} + F^{(n)}\text{Cos.}\alpha^{(n)} \} \text{Cos.X}, \\ & + \{ F\text{Cos.}\beta + F'\text{Cos.}\beta' + F''\text{Cos.}\beta'' + \dots + F^{(n-1)}\text{Cos.}\beta^{(n-1)} + F^{(n)}\text{Cos.}\beta^{(n)} \} \text{Cos.Y}, \\ & + \{ F\text{Cos.}\gamma + F'\text{Cos.}\gamma' + F''\text{Cos.}\gamma'' + \dots + F^{(n-1)}\text{Cos.}\gamma^{(n-1)} + F^{(n)}\text{Cos.}\gamma^{(n)} \} \text{Cos.Z}. \end{aligned}$$

Or, la somme $\text{Cos.}^2\text{X} + \text{Cos.}^2\text{Y} + \text{Cos.}^2\text{Z} = 1$, est une quantité constante; donc la somme des projections des figures proposées est la plus grande, lorsque les quantités variables Cos.X , Cos.Y , Cos.Z , sont entre elles respectivement comme leurs coefficients.

Or, les coefficients de Cos.X , Cos.Y , Cos.Z , sont respectivement les sommes des projections des figures proposées sur les trois plans coordonnés. Pour abréger, que ces sommes soient désignées par $f.F.\text{Cos.}\alpha$, $f.F.\text{Cos.}\beta$, $f.F.\text{Cos.}\gamma$; les quantités inconnues Cos.X , Cos.Y , Cos.Z , sont entre elles respectivement comme les quantités connues $f.F.\text{Cos.}\alpha$, $f.F.\text{Cos.}\beta$, $f.F.\text{Cos.}\gamma$. De là on obtient

$$\begin{aligned} \text{Cos.X} &= \frac{f.F.\text{Cos.}\alpha}{\sqrt{f.^2F.\text{Cos.}\alpha + f.^2F.\text{Cos.}\beta + f.^2F.\text{Cos.}\gamma}}, \\ \text{Cos.Y} &= \frac{f.F.\text{Cos.}\beta}{\sqrt{f.^2F.\text{Cos.}\alpha + f.^2F.\text{Cos.}\beta + f.^2F.\text{Cos.}\gamma}}, \\ \text{Cos.Z} &= \frac{f.F.\text{Cos.}\gamma}{\sqrt{f.^2F.\text{Cos.}\alpha + f.^2F.\text{Cos.}\beta + f.^2F.\text{Cos.}\gamma}}. \end{aligned}$$

La plus grande somme de projections cherchée est

$$\begin{aligned} & \text{Cos.X}.f.F.\text{Cos.}\alpha + \text{Cos.Y}.f.F.\text{Cos.}\beta + \text{Cos.Z}.f.F.\text{Cos.}\gamma, \\ &= \frac{f.^2F.\text{Cos.}\alpha + f.^2F.\text{Cos.}\beta + f.^2F.\text{Cos.}\gamma}{\sqrt{f.^2F.\text{Cos.}\alpha + f.^2F.\text{Cos.}\beta + f.^2F.\text{Cos.}\gamma}}, \\ &= \sqrt{f.^2F.\text{Cos.}\alpha + f.^2F.\text{Cos.}\beta + f.^2F.\text{Cos.}\gamma}. \end{aligned}$$

Savoir : le quarré de la plus grande somme de projections des

figures proposées est égal à la somme des quarrés des sommes des projections de ces figures sur les trois plans coordonnés.

§. 3

Dans un tétraèdre trirectangle, le quarré de l'hypothénuse (la face opposée à l'angle solide droit) est égal à la somme des quarrés des autres faces. Donc , si l'on réduit la somme des projections des figures proposées sur chacun des plans coordonnés en un triangle rectangle ayant pour sommet l'origine des coordonnées (*), le plan de la plus grande projection est celui de l'hypothénuse de ce tétraèdre ; et la plus grande projection cherchée est cette hypothénuse elle-même (**).

Remarque. Lorsque , dans un tétraèdre trirectangle , les trois faces de l'angle droit sont données de grandeur , chacune de ces faces est aussi donnée d'espèce. La plus grande projection cherchée , ou l'hypothénuse de ce tétraèdre est la somme des projections de ses faces sur cette hypothénuse ; et partant , cette plus grande projection est la projection des sommes des projections des figures données sur les trois plans coordonnés.

(*) Il faut , en outre , que les deux côtés de l'angle droit de chacun de ces triangles soient respectivement égaux aux côtés des deux autres qui se trouvent situés sur les mêmes axes.

(**) Ce plan est très-facile à déterminer : soient , en effet , A , B , C , les segments qu'il détermine sur les axes , à partir de l'origine , son équation sera

$$\frac{x}{A} + \frac{y}{B} + \frac{z}{C} = 1 ,$$

on aura d'ailleurs

$$BC = 2f.F.Cos.\alpha , \quad CA = 2f.F.Cos.\beta , \quad AB = 2f.F.Cos.\gamma ,$$

d'où

$$A = \sqrt{\frac{2f.F.Cos.\beta \times f.F.Cos.\gamma}{f.F.Cos.\alpha}} , \quad B = \sqrt{\frac{2f.F.Cos.\gamma \times f.F.Cos.\alpha}{f.F.Cos.\beta}} , \quad C = \sqrt{\frac{2f.F.Cos.\alpha \times f.F.Cos.\beta}{f.F.Cos.\gamma}} ;$$

substituant ces valeurs dans l'équation du plan cherché , elle deviendra , toutes réductions faites ,

$$xf.F.Cos.\alpha + yf.F.Cos.\beta + zf.F.Cos.\gamma = \sqrt{2f.F.Cos.\alpha \times f.F.Cos.\beta \times f.F.Cos.\gamma} .$$

(Notes des éditeurs.)

§. 4.

On peut aussi exprimer la plus grande projection cherchée dans les figures données et dans les inclinaisons de leurs plans, deux à deux.

Qu'on développe, en effet, l'expression

$$f.^2F.Cos.^2\alpha + f.^2F.Cos.^2\beta + f.^2F.Cos.^2\gamma.$$

Le coefficient du carré de l'une des faces, telle que F est $Cos.^2\alpha + Cos.^2\beta + Cos.^2\gamma = 1$; partant, ce développement comprend la somme des carrés de toutes les figures données. Le coefficient du produit de deux faces, telles que F et F', est $2(Cos.^2\alpha Cos.^2\alpha' + Cos.^2\beta Cos.^2\beta' + Cos.^2\gamma Cos.^2\gamma')$, et partant le double du cosinus de l'inclinaison entre elles des perpendiculaires à ces deux faces, ou le double du cosinus du supplément de l'inclinaison de ces deux faces. Partant, le carré de la plus grande projection cherchée est l'excès de la somme des carrés des figures proposées sur le double de la somme de leurs produits, deux à deux, par les cosinus de leurs inclinaisons (prises intérieurement à la figure formée par les plans sur lesquels elles sont tracées).

§. 5.

Le résultat que je viens d'obtenir présente une analogie remarquable entre le sujet de ce mémoire et les propositions les plus générales de la polyhédrométrie. En effet, dans tout polyèdre, le carré de l'une des faces est égal à l'excès de la somme des carrés des autres faces sur le double de la somme de leurs produits, deux à deux, par les cosinus de leurs inclinaisons (*). Partant, si l'on

(*) Cette belle proposition est développée par CARNOT, dans son ouvrage ingénieux intitulé : *Géométrie de position*. J'en avais envoyé le développement à l'Institut avant la publication de ce bel ouvrage. (Voyez les *Mémoires présentés à l'Institut*, et la note de cet auteur, P. 306). Il a été bien flatteur pour moi de me trouver d'accord avec ce grand géomètre, soit pour l'objet de mes recherches, soit pour la marche qui m'a conduit aux résultats obtenus.

(Note de l'auteur.)

conçoit

conçoit un polyèdre dont toutes les faces (excepté une) soient respectivement égales et parallèles aux figures données de grandeur, la face restante (si le polyèdre est possible) est , soit quant à la grandeur , soit quant à la position , la plus grande projection des figures proposées.

En effet , une face quelconque d'un polyèdre est égale à la somme des produits de toutes les autres par les cosinus de leurs inclinaisons sur elle ; ou elle est la somme des projections sur son plan de toutes les faces restantes ; et la somme des projections de toutes les faces , excepté l'une d'elles , sur un plan quelconque , est égale à la projection de la face restante sur le même plan. Or cette dernière face est plus grande qu'aucune de ses projections faites sur un plan qui ne lui est pas parallèle ; partant la plus grande somme de projections de toutes les faces d'un polyèdre , excepté une , est cette face restante.

Cette proposition est évidente , lorsque les premières faces font , avec la face restante (que j'appelle *base*) , des angles aigus , pris intérieurement au polyèdre. Lorsque quelqu'un de ces angles est obtus , l'expression *somme* se change en *différence* , en changeant les signes des cosinus qui répondent à des angles obtus.

La possibilité du polyèdre proposé peut être éclaircie comme il suit. J'ai démontré (voyez mes *Éléments d'analyse géométrique* , etc , pag. 25-28) la proposition suivante : D'un point pris dans l'intérieur d'un polyèdre soient abaissées, sur ses faces , des perpendiculaires ; sur ces perpendiculaires soient prises , depuis ce point , des droites respectivement proportionnelles à ces faces , ce point est le centre des moyennes distances des extrémités de ces droites.

L'application de ce théorème au sujet de ce mémoire est évidente. D'un point P soient abaissées, sur les plans donnés de position , des perpendiculaires ; sur ces perpendiculaires soient prises , depuis le point P , des droites respectivement proportionnelles aux figures données de grandeur (en tournant toujours dans un même sens). Si le point P se trouve être le centre des moyennes distances des extrémités

de ces droites , la somme des projections des figures proposées sur un plan quelconque est zéro ; et partant la position du plan est indéterminée. Que le point P ne soit pas le centre des moyennes distances des points donnés ; soit déterminé le point P' , tel que le point P soit le centre des moyennes distances des points donnés et du point P' ; la distance du point P au point P' est proportionnelle à la plus grande somme de projections des figures proposées ; et tout plan perpendiculaire à la droite PP' est l'un des plans parallèles entre eux sur lesquels a lieu cette plus grande projection.

§. 6.

Ce que j'ai dit sur les projections des figures planes peut s'appliquer aux projections de quelques surfaces courbes, et , en particulier, il s'applique aisément aux projections des triangles et des polygones sphériques.

Soit un triangle sphérique , et qu'on demande le plan sur lequel on doit projeter ce triangle orthographiquement pour que la projection soit la plus grande possible.

Soit conçue la pyramide sphérique ayant pour base le triangle sphérique proposé, et ayant pour sommet le centre de la sphère à laquelle ce triangle appartient. La projection du triangle sphérique sur un plan quelconque est égale à la somme des projections des faces latérales de cette pyramide sur le même plan. Partant, la projection du triangle sphérique est la plus grande, lorsque la somme des projections des faces de la pyramide est la plus grande. Soient F, F', F'' , les faces de cette pyramide, et que leurs inclinaisons, deux à deux (prises intérieurement au solide) soient désignées par $ff', f'f'', f''f$; la plus grande projection du triangle sphérique est

$$\sqrt{F^2 + F'^2 + F''^2 - 2F'F'' \cdot \text{Cos} f'f'' - 2F''F \cdot \text{Cos} f''f - 2F'F \cdot \text{Cos} ff'}.$$

La position du plan de plus grande projection se détermine comme il suit. Que les faces latérales de la pyramide sphérique soient conçues converties en triangles ayant le même sommet et les mêmes côtés adjacens, de manière que les triangles rectilignes égaux à ces faces

deviennent les faces latérales d'une pyramide triangulaire. Le plan de la base de cette pyramide est le plan cherché de la plus grande projection du triangle sphérique proposé.

On ramène, de même, la projection d'un polygone sphérique, à la projection des faces (planes) d'une pyramide sphérique; et partant, on détermine la position et la grandeur de la plus grande projection de ce polygone.

Remarque. La projection d'un polygone sphérique est composée d'espaces elliptiques, appartenant à des ellipses différentes dont l'espèce dépend des inclinaisons des faces de la pyramide sphérique sur le plan de projection; et, malgré cette complication, la grandeur de la plus grande projection est facilement déterminée.

Post-Scriptum. Je me suis entretenu de l'objet de ce mémoire avec mon ami et collègue, M. le professeur SCHAUB : il m'a averti que M. POISSON avait traité le même sujet. En effet, dans le N.^o 10 (avril 1808) de la *Correspondance sur l'école polytechnique*, se trouve un mémoire de ce profond mathématicien dont une partie est relative à l'objet principal de celui-ci. Il m'a été fort agréable de me rencontrer, dans le sujet d'une recherche, avec un savant aussi distingué. Cependant, je n'ai pas cru devoir supprimer mon travail. Nous avons suivi, pour parvenir au même but, des marches sensiblement différentes. Le rapprochement que je fais, des propriétés obtenues et des propositions fondamentales de la polyhédrométrie, me paraît, en particulier, mériter l'attention des mathématiciens.
