ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

GERGONNE

Addition au précédent mémoire

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 2 (1811-1812), p. 335-338
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1811-1812__2__335_1>

Addition au précédent mémoire ;

Par M. GERGONNE.

On peut atteindre au but que vient de remplir M. Rochat par une autre méthode, moins élémentaire il est vrai, mais qui a l'avantage de n'exiger aucune transformation de coordonnées, et qui peut fournir une agréable et utile application de la doctrine des *Maximis et Minimis* à ceux qui étudient le calcul différentiel ; je vais l'exposer brièvement.

Soit reprise l'équation

$$ay^2+bxy+cx^2+dy+ex+f=0 \; ; \qquad (M)$$

et, outre le point de la courbe dont les coordonnées sont x et y, considérons-en un autre dont les coordonnées soient x' et y' ; nous aurons pour ce nouveau point.

$$ay'^2+bx'y'+cx'^2+dy'+ex'+f=0 \; ; \qquad (M')$$

posons

$$(x-x')^2+(y-y')^2=maximum \; ; \qquad (N)$$

nos deux points seront alors les extrémités de la plus grande corde de la courbe.

L'équation (N) revient à

$$(x-x')(\delta x-\delta x')+(y-y')(\delta y-\delta y')=0 \; ; \qquad (n)$$

d'un autre côté, on tire des équations (M) et (M')

$$(2ay+bx+d)\delta y+(2cx+by+e)\delta x=0 \; , \qquad (m\,)$$
$$(2ay'+bx'+d)\delta y'+(2cx'+by'+e)\delta x'=0 \; ; \qquad (m')$$

ajoutant les produits de ces deux dernières par les multiplicateurs indéterminés λ et $-\lambda'$ à l'équation (n) il viendra

$$\left.\begin{array}{l}[(x-x')+\lambda(2cx+by+e)]\delta x-[(x-x')+\lambda'(2cx'+by'+e)]\delta x'\\ +[(y-y')+\lambda(2ay+bx+d)]\delta y-[(y-y')+\lambda'(2ay'+bx'+d)]\delta y'\end{array}\right\}=0;$$

donc

$$(x-x')+\lambda(2cx+by+e)=0 \; , \quad (x-x')+\lambda'(2cx'+by'+e)=0 \; ,$$
$$(y-y')+\lambda(2ay+by+d)=0 \; , \quad (y-x')+\lambda'(2ay'+bx'+d)=0 \; ;$$

éliminant λ et λ' entre ces équations, elles deviendront

$$(2ay+bx+d)(x-x')=(2cx+by+e)(y-y') \; , \qquad (P\,)$$
$$(2ay'+bx'+d)(x-x')=(2cx'+by'+e)(y-y') \; . \qquad (P')$$

On satisfait à ces équations, quel que soit le premier des points pris sur la courbe, en supposant que le second se confond avec lui, ce qui donne sur-le-champ la direction de la tangente en ce point, ainsi que cela doit être.

Rejetant cette hypothèse et retranchant l'équation (P′) de l'équation (P) il vient

$$\{2a(y-y')+b(x-x')\}(x-x')=\{2c(x-x')+b(y-y')\}(y-y')\ ;$$

mais, en désignant par α l'angle que fait la corde que nous considérons ici avec l'axe des x, on a

$$\text{Tang.}\alpha=\frac{y-y'}{x-x'}\ ,\quad \text{d'où}\quad y-y'=(x-x')\text{Tang.}\alpha\ ,$$

substituant donc, il viendra, en réduisant, transposant et divisant par $x-x'$

$$\text{Tang.}^2\alpha-2.\frac{a-c}{b}\text{Tang.}\alpha-1=0\ . \qquad \text{(K)}$$

Ainsi, dans les lignes du deuxième ordre, les cordes dont la variation est nulle, n'affectent que deux directions, et les tangentes des angles qu'elles forment avec l'axe des x se trouvent déterminées par l'équation précédente. On voit de plus que ces directions sont perpendiculaires l'une à l'autre, puisque le produit des deux tangentes est égal à -1.

En ajoutant, au contraire, l'une à l'autre les équations (P), (P′), substituant pour $y-y'$, dans l'équation résultante, sa valeur $(x-x')\text{Tang.}\alpha$ et divisant par $x-x'$, il vient

$$(2a-b\text{Tang.}\alpha)(y+y')-(2c\text{Tang.}\alpha-b)(x+x')+2(d-e\text{Tang.}\alpha)=0. \qquad \text{(G)}$$

D'un autre côté, en retranchant l'équation (M′) de l'équation (M), le double de l'équation résultante peut être mis sous cette forme

$$\left.\begin{array}{r}[2a(y+y')+b(x+x')+2d](y-y')\\ +[2c(x+x')+b(y+y')+2e](x-x')\end{array}\right\}=0\ ;$$

ou, en chassant encore $y-y'$ et divisant par $x-x'$,

$$(2a\text{Tang.}\alpha+b)(y+y')+(2c+b\text{Tang.}\alpha)(x+x')+2(d\text{Tang.}\alpha+e)=0\ . \qquad \text{(H)}$$

Les équations (G) et (H) donnent

$$\tfrac{1}{2}(x+x')=\frac{2ae-bd}{b^2-4ac}\ ,\qquad \tfrac{1}{2}(y+y')=\frac{2cd-ae}{b^2-4ac}\ ;$$

ainsi, les cordes des lignes du second ordre dont la variation est nulle, ont leurs milieux au même point qu'on appelle leur *centre*; et, puisque ces cordes doivent d'ailleurs se couper perpendiculairement, elles sont au nombre de deux seulement. On les appelle les *axes de la courbe.*

Ces axes ont donc pour équation commune

$$y-\frac{2cd-ae}{b^2-4ac}=\left\{x-\frac{2ae-bd}{b^2-4ac}\right\}\text{Tang.}\alpha\ ,$$

équation double, à cause des deux valeurs de Tang.α; cette équation combinée avec celle de la courbe fera connaître les longueurs de ces mêmes axes.