
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

ROCHAT

DE STAINVILLE

LHUILIER

VECTEN

TÉDENAT

LEGRAND

FAUQUIER

**Démonstration du théorème énoncé à la page 232 de ce volume,
et de quelques autres propriétés du quadrilatère**

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 1 (1810-1811), p. 311-317

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1810-1811__1__311_1

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1810-1811, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Démonstration du théorème énoncé à la page 232 de ce volume , et de quelques autres propriétés du quadrilatère ;

Par MM. ROCHAT , DE STAINVILLE , LHUILIER , VECTEN ,
TÉDENAT , LEGRAND , FAUQUIER , etc. , etc.



LA vérité de ce théorème s'aperçoit sur-le-champ , en considérant que , si l'on imagine quatre masses égales situées aux quatre sommets d'un quadrilatère , les trois droites qui joindront les milieux des côtés opposés et des deux diagonales , devant également contenir le centre de gravité de tout le système , devront nécessairement se couper au même

(*) Tout ce qui vient d'être dit prouve qu'un problème simple , en théorie , peut souvent se compliquer , lorsqu'il s'agit d'en obtenir une solution applicable à la pratique ; et ce , à raison de certaines conditions et limitations qu'on pourrait appeler en quelque sorte , *extra-analytique* , parce qu'elles ne peuvent être exprimées par des formules d'algèbre : conditions qui s'opposent à ce que les quantités cherchées soient soumises à la loi de continuité.

Ceux qui écrivent pour les jeunes-gens , toujours portés à envisager les questions de géométrie et d'analyse d'une manière trop abstraite , feraient sans doute une chose utile , en leur offrant quelquefois des modèles de solutions de ce genre.

(Note des éditeurs.)

point. C'est par cette considération que les rédacteurs des *Annales* avaient été conduits à la proposition dont il s'agit ici, et elle prouve en même temps que le point d'intersection des trois droites est leur milieu commun ; on peut aussi parvenir à un semblable résultat, en considérant le quadrilatère comme la projection d'un tétraèdre (*). On voit de plus, par là, que le théorème s'applique au quadrilatère gauche comme au quadrilatère plan ; on voit enfin qu'on pourrait lui donner une beaucoup plus grande généralité, en supposant appliquées aux quatre sommets des masses inégales de signes quelconques.

MM. de *Stainville* et *Lhuillier* sont parvenus à démontrer le théorème par des considérations à peu près semblables. M. de *Stainville* a supposé quatre forces égales et parallèles, de directions quelconques, appliquées aux quatre sommets du quadrilatère, et il a observé que le centre des forces parallèles se trouvant à la fois sur les milieux des droites qui joignent les milieux des côtés opposés et sur le milieu de celle qui joint les milieux des diagonales, ces trois milieux doivent nécessairement coïncider.

Quant à M. *Lhuillier*, sa démonstration ne diffère uniquement de celle de M. de *Stainville* que par les termes dans lesquels il l'exprime ; c'est-à-dire, qu'il substitue au *centre des forces parallèles* le *centre des moyennes distances* des sommets du quadrilatère. Il ajoute au surplus à sa démonstration cette remarque générale que, dans tout polygone d'un nombre pair de côtés, les centres des moyennes distances des côtés alternatifs et le centre des moyennes distances de tous les sommets coïncident. Il remarque encore qu'en général, toutes les manières de déterminer le centre des moyennes distances d'un système de points, compris dans un même plan ou situés d'une manière quelconque dans l'espace, doivent conduire à un seul et unique point, soit qu'on prenne les points du système deux à deux ou trois à trois ou quatre à quatre ou, ou de plusieurs de ces manières combinées

(*) Voyez, sur cela, la *Correspondance sur l'école polytechnique*, 2.^e vol. n.^o II, pag. 96.

entre elles, en sorte cependant que ces points soient pris chacun une seule fois ou un même nombre de fois.

M. *Tédénat*, qui n'a pas jugé ce théorème indigne de son attention, en a donné une démonstration purement géométrique, dans laquelle il s'est exactement rencontré avec M. *Vecten*, professeur de mathématiques spéciales au lycée de Nismes; M. *de Stainville* s'est aussi rencontré avec M. *Légrand*, professeur de mathématiques à St-Brieux, et M. *Fauquier*, élève du lycée de Nismes, dans une autre démonstration qui, en changeant les diagonales en côtés, et *vice versa*, rentre dans celle de MM. *Tédénat* et *Vecten*.

Voici à quoi se réduisent, pour le fond, ces diverses démonstrations.

Soient AB, BC, CD, DA, (fig. 11, 12, 13) les quatre côtés consécutifs d'un quadrilatère, plan ou gauche, et soient G, H, I, K, leurs milieux respectifs. Soient de plus AC et BD les deux diagonales du quadrilatère; soient E, F leurs milieux; soient joints ces milieux par une droite EF; et, sur cette droite, comme base commune, soient construits des triangles ayant leurs sommets en G, H, I, K. Il est aisé de voir que ceux de ces triangles qui auront leurs sommets aux milieux de deux côtés opposés, auront leurs côtés adjacens à la base parallèles, chacun à chacun, comme parallèles à un même côté du quadrilatère; ces triangles seront donc semblables, et de plus égaux, comme ayant base commune; les figures GI et HK seront donc des parallélogrammes ayant EF pour diagonale commune; les diagonales GI et HK (*) devront donc avoir leurs milieux sur EF et couper celle-ci à son milieu; les trois droites EF, GI, HK auront donc leurs milieux au même point; ce qui est le théorème proposé.

Un *Abonné* est parvenu à la démonstration du théorème, d'une manière fort simple, en considérant (fig. 14, 15, 16) que les milieux consécutifs E, G, H, F, I, K, tant des côtés que des diagonales, sont les sommets des angles d'un hexagone de la nature des poly-

(*) On n'a point mené ces diagonales, dans la crainte de rendre les figures trop confuses.

gones appelés *symétriques* par quelques auteurs (*), c'est-à-dire, des polygones dont le nombre des côtés est pair, et les côtés opposés, égaux et parallèles. On sait en effet que, dans de tels polygones, les diagonales qui joignent les sommets des angles opposés, lesquelles, dans le cas présent, ne sont autres que les trois droites du théorème, ont toutes leurs milieux au même point.

Enfin M. *Rochat*, professeur de navigation à St-Brieux, en traitant la question par l'analyse, et en considérant un quadrilatère complet, est parvenu à un théorème assez remarquable que nous allons faire connaître, et que nous démontrerons ensuite brièvement.

Rappelons-nous auparavant que tout *quadrilatère complet*, qui n'a point de côtés parallèles, ayant trois diagonales qui peuvent être prises deux à deux de trois manières différentes, il s'ensuit qu'un tel quadrilatère est toujours formé de trois *quadrilatères simples*.

Ainsi, par exemple, dans le quadrilatère complet de la figure 17, on trouve les quadrilatères simples

$A'B' B'A' A''$, dont les diagonales sont $A'B'$, $A''B''$,

$A B'' B A'' A$, dont les diagonales sont $A''B''$, $A B$,

$A' B B' A A'$, dont les diagonales sont $A B$, $A' B'$.

Cela posé, en appelant *centre* d'un quadrilatère simple, le centre des moyennes distances de ses sommets, voici le théorème de M. *Rochat*.

THÉORÈME. *Dans tout quadrilatère complet,*

1.° *Les milieux des diagonales sont tous trois sur une même ligne droite.*

2.° *La droite qui contient les milieux des diagonales contient aussi les centres des trois quadrilatères simples, en sorte que ces six points sont sur une même ligne droite.*

3.° *Enfin, la distance entre les milieux de deux quelconques des*

(*) Voyez les *Éléments* de Lacaille, éditions de *Marie*.

diagonales est double de la distance entre les centres des deux quadrilatères simples auxquels ces diagonales appartiennent.

Démonstration. Soient faits (fig. 17)

$$A''A = a, \quad A''A' = a', \quad A''B = b, \quad A''B' = b'.$$

Soient M, M' les milieux respectifs des diagonales AB, A'B'; par ces deux points soit menée une droite coupant A''B'' en M''.

Soient pris le point A'' pour origine des coordonnées, la droite A''A pour axe des x et la droite A''B pour axe des y .

$$\text{L'équation de } BA' \text{ est} \quad bx + a'y = a'b,$$

$$\text{L'équation de } B'A \text{ est} \quad b'x + ay = ab';$$

les équations du point B'' sont donc

$$x = \frac{aa'(b-b')}{ab-a'b'}, \quad y = \frac{bb'(a-a')}{ab-a'b'}.$$

On a ainsi

$$\text{pour l'équation de } A''B'', \quad aa'(b-b')y = bb'(a-a')x.$$

$$\text{Les équations de } M \text{ sont} \quad x = \frac{1}{2}a, \quad y = \frac{1}{2}b,$$

$$\text{Les équations de } M' \text{ sont} \quad x = \frac{1}{2}a', \quad y = \frac{1}{2}b';$$

on a donc

$$\text{pour l'équation de } MM', \quad 2(a-a')y - 2(b-b')x = ab' - ba'.$$

Combinée avec celle de A''B'', elle donne pour les équations de M''

$$x = \frac{aa'(b-b')}{2(ab-a'b')}, \quad y = \frac{bb'(a-a')}{2(ab-a'b')};$$

les coordonnées de M'' sont donc respectivement moitiés de celles de B''; le point M'' est donc le milieu de A''B''; ainsi 1.° les milieux des trois diagonales sont sur une même ligne droite.

Soient C, C', C'' les milieux respectifs des trois distances M'M'',

$M''M$, MM' ; ces points C , C' , C'' seront, d'après ce qui a été dit précédemment, les centres des trois quadrilatères simples; donc 2.^o ces trois centres sont en ligne droite avec les milieux des trois diagonales.

On a

$$M'M'' = M'M'' - M'M' = 2M'C' - 2M'C'' = 2(M'C' - M'C'') = 2C'C'' ,$$

$$M''M = M'M + M'M'' = 2M'C'' + 2M'C = 2(M'C'' + M'C) = 2C''C ,$$

$$M'M' = M''M - M''M' = 2M''C' - 2M''C = 2(M''C' - M''C) = 2C'C' .$$

Donc 3.^o la distance entre les milieux de deux quelconques des diagonales est double de la distance entre les centres des quadrilatères simples auxquels la troisième diagonale est commune.

Dès que M. Vecten a eu connaissance du théorème de M. Rochat, il en a démontré la première partie comme il suit :

Soient AC , BD , FE , (fig. 18) les trois diagonales d'un quadrilatère complet, et G , H , I leurs milieux respectifs. Soient joints ces milieux par les droites GH , HI . Par les points G , H , I , C , soient menées à AF des parallèles se terminant à AE en G' , H' , I' , C' ; soit enfin menée à AE , par G , une parallèle se terminant à II' en K et coupant HH' en L .

Cela posé, on a, à cause des parallèles,

$$AF : CC' :: AD : DC' , \quad AB : CC' :: AE : EC' ;$$

donc

$$AF - CC' : AD - DC' :: CC' : DC' , \quad AB - CC' : AE - EC' :: CC' : EC' ;$$

ou encore

$$(1) \quad AF - CC' : AC' :: CC' : DC' , \quad AB - CC' : AC' :: CC' : EC' ;$$

or on a

$$\begin{aligned} 2(IV - GG') &= AF - CC' , & 2(HH' - GG') &= AB - CC' , \\ 2(AI' - AG') &= AE - AC' , & 2(AH' - AG') &= AD - AC' ; \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} 2 IK &= AF - CC' , & 2HL &= AB - CC' \\ 2GK &= EC' , & 2GL &= DC' \end{aligned}$$

donc

$$(II) \quad IK : GK :: AF - CC' : EC' , \quad HL : GL :: AB - CC' : DC'$$

Multipliant les proportions (I) par les proportions (II), en supprimant les facteurs communs aux antécédens, il viendra

$$IK : AC' \times GK :: CC' : DC' \times EC' , \quad HL : AC' \times GL :: CC' : DC' \times EC' ;$$

d'où on conclura, à cause du rapport commun,

$$IK : AC' \times GK :: HL : AC' \times GL ;$$

ou simplement

$$IK : GK :: HL : GL ;$$

ce qui démontre que les trois points G, H, I, sont sur une même ligne droite.
