ANNALES MATHÉMATIQUES

BLAISE PASCAL

Salomon Sambou & Mansour Sané

Résolution du $\bar{\partial}$ pour les formes différentielles ayant une valeur au bord au sens des courants dans un domaine strictement pseudoconvexe

Volume 18, n^{o} 2 (2011), p. 323-331.

<http://ambp.cedram.org/item?id=AMBP_2011__18_2_323_0>

Publication éditée par le laboratoire de mathématiques de l'université Blaise-Pascal, UMR 6620 du CNRS Clermont-Ferrand — France

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
http://www.cedram.org/

Annales mathématiques Blaise Pascal **18**, 323-331 (2011)

Résolution du $\bar{\partial}$ pour les formes différentielles ayant une valeur au bord au sens des courants dans un domaine strictement pseudoconvexe

Salomon Sambou
Mansour Sané

Résumé

On résout le $\bar{\partial}$ pour les formes admettant une valeur au bord au sens des courants sur un domaine strictement pseudoconvexe de $\mathbb{C}^n$.

The $\bar{\partial}$-problem for a form with distribution boundary value on a strictly pseudoconvex domain

Abstract

We solve the $\bar{\partial}$ operator for forms with distribution boundary values on a strictly pseudoconvex domain of $\mathbb{C}^n$.

1. Introduction et Préliminaires

Dans ce travail, nous montrons que si f est une forme qui a une valeur au bord au sens des courants et $\bar{\partial}$ fermée sur un domaine strictement pseudoconvexe de $\mathbb{C}^n$, alors il existe une forme u à valeur au bord au sens des courants telle que $\bar{\partial}u = f$. Il s'agit donc de prouver le théorème suivant :

Théorème 1.1 (Théorème Principal)**.** *Soit Ω un domaine strictement pseudoconvexe à bord lisse de classe C^∞ et soit f une $(0,r)$ forme différentielle de classe C^∞ $\bar{\partial}$ fermée admettant une valeur au bord au sens des courants, $1 \leq r \leq n$. Il existe une $(0,r-1)$ forme différentielle g de classe C^∞ ayant une valeur au bord au sens des courants, telle que $\bar{\partial}g = f$.*

Mots-clés : Opérateur de Cauchy-Riemann, Formes Différentielles, Valeur au Bord, Croissance Polynomiale, Courant Prolongeable.
Classification math. : 32W05, 32W50.

Selon Lojaciewicz et Tomassini [3], si une forme f admet une valeur au bord au sens des courants sur $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$, alors il existe un courant F à support compact sur $\bar{\Omega}$ telle que $F_{|\Omega} = f$. Ceci entraîne que f est un courant prolongeable et donc d'ordre fini l.

Nous savons d'après [5] que si f est un courant prolongeable $\bar{\partial}$ fermé, alors il existe un courant prolongeable U sur Ω tel que $\bar{\partial}U = f$. Cependant [5] ne nous permet pas de dire qu'il existe une forme de classe C^∞ U avec valeur au bord au sens des courants telle que $\bar{\partial}U = f$.

Pour établir ce théorème nous montrons que pour un courant prolongeable f sur Ω, d'ordre l et $\bar{\partial}$ fermé, il existe une solution U du $\bar{\partial}$ qui est aussi un courant prolongeable d'ordre l. Soit S une extension, d'ordre l à support compact sur $\bar{\Omega}$, de U ; et posons $F = \bar{\partial}S$. D'après la formule de $\bar{\partial}$-homotopie de [2], on a $S = R_\epsilon S + A_\epsilon F + \bar{\partial}A_\epsilon S$, où R_ϵ est un opérateur régularisant et A_ϵ un opérateur qui augmente la régularité de $\frac{1}{2}$. Ainsi $S_\epsilon = R_\epsilon S + A_\epsilon F$ est une autre solution du $\bar{\partial}$ de F. Nous montrons qu'elle a une valeur au bord au sens des courants en partant d'un résultat préliminaire où nous montrons qu'une forme différentielle à croissance polynomiale sur Ω admet une valeur au bord au sens des courants.

Définition 1.2. Soit $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$ un domaine à bord lisse de classe C^∞ de fonction définissante ρ. Posons $\Omega_\varepsilon = \{z \in \Omega \mid \rho(z) < -\varepsilon\}$ et $b\Omega_\varepsilon$ désigne le bord de Ω_ε.

Soit f une fonction de classe C^∞ sur Ω. On dit que f admet une valeur au bord au sens des distributions, s'il existe une distribution T définie sur le bord $b\Omega$ de Ω telle que pour toute fonction $\varphi \in C^\infty(b\Omega)$, on ait :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{b\Omega_\varepsilon} f\varphi_\varepsilon d\sigma = \langle T, \varphi \rangle$$

où si $\tilde{\varphi}$ est une extension de φ à Ω et $i_\varepsilon : b\Omega_\varepsilon \longrightarrow \mathbb{C}^n$ l'injection canonique, $\varphi_\varepsilon = i_\varepsilon^* \tilde{\varphi}$; $d\sigma$ désigne l'élément de surface.

Une forme différentielle de classe C^∞ sur Ω admet une valeur au bord au sens des courants si ses coefficients ont une valeur au bord au sens des distributions.

Définition 1.3. On dit qu'une fonction f de classe C^∞ définie sur Ω est à croissance polynomiale d'ordre $N \geq 0$, s'il existe une constante C telle que pour tout $z \in \Omega$, on a :

$$|f(z)| \leq \frac{C}{d(z)^N}$$

où $d(z)$ désigne la distance de z au bord de Ω.

Notation 1.4. Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}^n$, on note $H^{p,q}_{0,k}(\Omega)$ le (p,q)-ième groupe de $\bar\partial$ cohomologie des formes différentielles de classe C^k et à support compact dans Ω et $H^{p,q}_{0,k,cour}(\Omega)$ le (p,q)-ième groupe de $\bar\partial$ cohomologie des courants d'ordre k à support compact dans Ω. Les (p,q) formes différentielles de classe C^k et à support compact sur $\bar\Omega$ sont notées $D^{p,q}_k(\bar\Omega)$.

Remerciements : Ce travail a été réalisé grâce au projet FIRST du ministère chargé de la recherche scientifique du Sénégal

2. Résolution du $\bar\partial$ pour les courants prolongeables d'ordre N

Nous allons nous intéresser à la résolution du $\bar\partial$ pour les courants de bidegré (p,q) d'ordre N sur Ω et prolongeables, où Ω est un domaine strictement pseudoconvexe de $\mathbb{C}^n$. D'après [4] ces courants sont les duaux topologiques des $(n-p,n-q)$ formes différentielles de classe C^N à support compact sur $\bar\Omega$. La technique de résolution est identique à celle de [5], dans lequel S. Sambou a résolu le $\bar\partial$, pour les courants prolongeables. Il montre qu'il existe une solution du $\bar\partial$ pour un courant prolongeable. Ici nous montrons que si le courant est prolongeable d'ordre l, alors il admet une solution du $\bar\partial$ qui est aussi un courant prolongeable d'ordre l.

Nous avons d'abord la proposition suivante ; il s'agit de la résolution du $\bar\partial$ avec condition de support :

Proposition 2.1. *Soit Ω un domaine strictement pseudoconvexe à bord lisse de classe C^∞. Si $f \in D^{p,r}_k(\bar\Omega) \cap \ker\bar\partial$, alors il existe $g \in D^{p,r-1}_k(\bar\Omega)$ telle que $\bar\partial g = f$ sur $\mathbb{C}^n$, pour $1 \le r \le n-1$.*

Démonstration. Soit $f \in D^{p,r}_k(\bar\Omega) \cap \ker\bar\partial$, puisque
$$H^{p,r}_{0,k}(\mathbb{C}^n) \approx H^{p,r}_{0,\infty}(\mathbb{C}^n) = 0,$$
il existe $h \in D^{p,r-1}_k(\mathbb{C}^n)$ telle que $\bar\partial h = f$. Puisque h est une $(p,r-1)$ forme sur $\mathbb{C}^n$ à support compact, on a $\bar\partial h_{|\mathbb{C}^n\setminus\bar\Omega} = 0$. Si $r=1$, alors $h_{|\mathbb{C}^n\setminus\bar\Omega}$ est une $(p,0)$ forme holomorphe à support compact. Le principe du prolongement analytique entraîne $h = 0$ sur $\mathbb{C}^n\setminus\bar\Omega$. Si $r \ge 1$ alors $h_{|\mathbb{C}^n\setminus\bar\Omega}$ est une $(p,r-1)$ forme différentielle à support compact et de classe C^k. D'après le théorème (3-1) de [1], il existe $\theta \in C^{p,r-2}_k(\mathbb{C}^n\setminus\Omega)$ telle que $\bar\partial\theta = h_{|\mathbb{C}^n\setminus\bar\Omega}$. Soit $\tilde\theta$ une

extension de θ à $\bar{\Omega}$ posons $u = h - \bar{\partial}\tilde{\theta}$, alors $\bar{\partial}u = \bar{\partial}h = f$ et u est à support compact sur $\bar{\Omega}$. □

Le résultat principal de cette section est le suivant :

Théorème 2.2. *Soit $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$ un domaine strictement pseudoconvexe à bord lisse de classe C^∞. Si T est un courant de bidegré $(0, r)$, d'ordre N, prolongeable et $\bar{\partial}$ fermé sur Ω, alors il existe un courant S de bidegré $(0, r-1)$, d'ordre N, sur Ω, prolongeable, et tel que $\bar{\partial}S = T$ sur Ω pour $1 \leq r \leq n$.*

Démonstration. Considérons l'application

$$L_T : \bar{\partial}D_N^{n,n-r}(\bar{\Omega}) \to \mathbb{C}$$

qui à $\bar{\partial}\varphi$ associe $\langle T, \varphi\rangle$.

Lemme 2.3. *L_T est bien définie.*

Preuve du Lemme 2.3. Si $\bar{\partial}\varphi = \bar{\partial}\varphi'$ alors $\varphi - \varphi'$ est une $(n, n-r)$ forme différentielle de classe C^N, à support compact sur $\bar{\Omega}$ et $\bar{\partial}$ fermée.

Si $n - r = 0$, alors $\varphi - \varphi'$ est une $(n, 0)$ forme holomorphe à support compact. Donc $\varphi - \varphi' = 0$ grâce au principe du prolongement analytique. On a $\langle T, \varphi\rangle = \langle T, \varphi'\rangle$.

Si $n - r \geq 1$, alors $\varphi - \varphi'$ est une $(n, n-r)$ forme différentielle de classe C^N à support compact sur $\bar{\Omega}$. D'après la proposition 2.1 $\varphi - \varphi' = \bar{\partial}\theta$ où $\theta \in D_N^{n,n-r-1}(\bar{\Omega})$ qui est un espace de Banach. Puisque $D_N^{n,n-r-1}(\Omega)$ est dense dans $D_N^{n,n-r-1}(\bar{\Omega})$, il existe $(\theta_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une famille d'éléments de $D_N^{n,n-r-1}(\Omega)$ telle que
$\lim\limits_{j\to+\infty} \theta_j = \theta$ dans $D_N^{n,n-r-1}(\bar{\Omega})$. On a alors

$$\langle T, \bar{\partial}\theta\rangle = \lim_{j\to+\infty} \langle T, \bar{\partial}\theta_j\rangle = 0.$$

Ce qui entraîne $\langle T, \varphi\rangle = \langle T, \varphi'\rangle$. Donc L_T est bien définie. □

Lemme 2.4. *L_T est continue.*

Preuve du Lemme 2.4. Pour $1 \leq r \leq n-1$, l'opérateur

$$\bar{\partial} : D_N^{n,n-r}(\bar{\Omega}) \longrightarrow D_N^{n,n-r+1}(\bar{\Omega}) \cap \ker\bar{\partial}$$

est linéaire continu et surjectif entre espaces de Banach, donc ouvert. Pour montrer que L_T est continue, il suffit de montrer que l'image réciproque de tout ouvert U de $\mathbb{C}$ par L_T est un ouvert de $D_N^{n,n-r}(\bar{\Omega})$. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, puisque $L_T \circ \bar\partial = T$, on a $L_T^{-1}(U) = \bar\partial(T^{-1}(U))$. $T^{-1}(U)$ est ouvert et $\bar\partial$ est une application ouverte d'où $L_T^{-1}(U)$ est un ouvert. □

Suite de la preuve du théorème.
D'après le lemme 2.3 et le lemme 2.4 l'application L_T est bien définie et continue. Il est évident qu'elle est aussi linéaire. De plus

$$\bar\partial D_N^{n,n-r}(\bar\Omega) = D_N^{n,n-r+1}(\bar\Omega) \cap \ker \bar\partial \subset D_N^{n,n-r+1}(\bar\Omega).$$

Donc

$$L_T : \bar\partial D_N^{n,n-r}(\bar\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$$

est définie linéaire et continue. D'après le théorème de Hahn-Banach L_T se prolonge en une forme $\tilde L_T$ linéaire et continue sur $D_N^{n,n-r+1}(\bar\Omega)$. $\tilde L_T$ est un courant prolongeable d'ordre N et $\bar\partial \tilde L_T = (-1)^r T$. □

3. Application à la résolution du $\bar\partial$ pour les formes ayant une valeur au bord au sens des courants

Proposition 3.1. *Soit Ω un domaine à bord lisse de classe C^∞ et soit f une fonction à croissance polynomiale sur Ω ; Alors f admet une valeur au bord au sens des distributions.*

Démonstration. Elle est en trois parties.

Considérons φ, φ_ε et $\tilde\varphi$ comme dans la définition 1.2.

(1) On montre dans la première partie que si $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{b\Omega_\varepsilon} f\varphi_\varepsilon d\sigma$ existe, alors elle ne dépend pas de l'extension $\tilde\varphi$ de φ choisie.

(2) Dans la deuxième partie on montre que $\left(\int_{b\Omega_\varepsilon} f\varphi_\varepsilon d\sigma\right)_{\varepsilon>0}$ est une famille de Cauchy.

(3) Enfin dans la troisième partie on montre que l'application qui à $\varphi \in C^\infty(b\Omega) \longrightarrow \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{b\Omega_\varepsilon} f\varphi_\varepsilon d\sigma$ définit une distribution sur $b\Omega$.

(1) Démonstration de la première partie :
Soit $\tilde\varphi$ et $\tilde\varphi'$ deux extensions C^∞ de φ ; Donc $\tilde\varphi - \tilde\varphi' = 0$ à l'ordre infini sur $b\Omega$. Posons $\psi = \tilde\varphi - \tilde\varphi'$. Soit $x \in b\Omega_\varepsilon$ et soit x_0 le point le plus proche de x dans $b\Omega$, d'après la formule de Taylor

$$\begin{aligned} \psi(x) - \psi(x_0) &= o(\|x - x_o\|^k), \quad \forall k > 0 \\ &= o(\varepsilon^k), \quad \forall k > 0. \end{aligned}$$

Ceci entraîne que $\psi(x) = o(\varepsilon^k), \quad \forall k > 0$.
Soit N l'ordre de f ; on a :

$$\Big|\int_{b\Omega_\varepsilon} f\psi d\sigma\Big| \leq \int_{b\Omega_\varepsilon} \Big|f\psi\Big| d\sigma \leq C\int_{b\Omega_\varepsilon} \frac{o(\varepsilon^k)}{\varepsilon^N} \quad \forall k > 0.$$

Il suffit de choisir $k > N$ pour que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{b\Omega_\varepsilon} f\varphi_\varepsilon d\sigma = 0;$$

d'où le résultat

(2) Démonstration de la deuxième partie :
Puisque f est prolongeable en une distribution F à support compact, donc F est d'ordre fini m, et on a :

$$\langle F, \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega_\varepsilon} f\varphi dV$$

où dV désigne l'élément de volume.
En plus, si F prolonge f, alors $\frac{\partial F}{\partial x_j}$ prolonge $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ au sens des distributions, $\forall j = 1, 2, \cdots, n$.

$$\begin{aligned}\int_{b\Omega_\varepsilon} f\varphi_\varepsilon d\sigma &= \int_{\Omega_\varepsilon} d(f\tilde{\varphi}d\sigma)\\ &= \sum_{j=1}^{2n}\Big(\int_{\Omega_\varepsilon} dx_j\frac{\partial f}{\partial x_j}(\tilde{\varphi}d\sigma) + \int_{\Omega_\varepsilon} f dx_j\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}(\tilde{\varphi}d\sigma)\Big)\Big).\end{aligned}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega_\varepsilon} dx_j\frac{\partial f}{\partial x_j}(\tilde{\varphi}d\sigma) = \langle\frac{\partial F}{\partial x_j}, \tilde{\varphi}\rangle,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega_\varepsilon} f dx_j\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}(\tilde{\varphi}d\sigma)\Big) = \langle F, \frac{\partial}{\partial x_j}\tilde{\varphi}\rangle.$$

D'où

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{b\Omega_\varepsilon} f\varphi_\varepsilon d\sigma \text{ existe};$$

d'où le résultat

(3) Démonstration de la troisième partie.

L'application

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(b\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \varphi & \longrightarrow & \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{b\Omega_\varepsilon} f\varphi_\varepsilon d\sigma \end{array}$$

est une application linéaire.

Il suffit de montrer qu'elle est continue pour qu'elle définisse une distribution.

Puisque $\int_{b\Omega_\varepsilon} f\varphi_\varepsilon d\sigma$ a une limite qui ne dépend pas de l'extension choisie, choisissons $\tilde{\varphi}$ telle que :

$$\|\tilde{\varphi}\|_{m,\bar{\Omega}} \leq C\|\varphi\|_{m,b\Omega}\ ,\ \text{où } m \text{ est l'ordre de } F.$$

$$\begin{aligned} \Big|\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{b\Omega_\varepsilon} f\varphi_\varepsilon d\sigma\Big| &= \Big|\sum_{j=1}^{2n}\Big(\langle\frac{\partial F}{\partial x_j},\tilde{\varphi}\rangle \pm \langle F,\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\rangle\Big)\Big| \\ &\leq C'\|\tilde{\varphi}\|_{m+1,\bar{\Omega}} \\ &\leq C'\|\varphi\|_{m+1,b\Omega}\,; \end{aligned}$$

d'où le résultat.

□

Preuve du Théorème Principal.
D'après [3], f est un courant prolongeable d'ordre l, il existe un courant F d'ordre l à support compact sur $\bar{\Omega}$ qui prolonge f. D'après le théorème précédent $f = \bar{\partial}U$ où U est un courant prolongeable sur Ω de même ordre que f. Soit S une extension, d'ordre l à support compact sur $\bar{\Omega}$, de U, avec $F = \bar{\partial}S$. D'après la formule de $\bar{\partial}$-homotopie de [2], on a $S = R_\epsilon S + A_\epsilon F + \bar{\partial}A_\epsilon S$, où R_ϵ est un opérateur régularisant et A_ϵ un opérateur qui augmente la régularité de $\frac{1}{2}$. Ainsi $R_\epsilon S + A_\epsilon F$ est une autre solution du $\bar{\partial}$ de F. Or $R_\epsilon S$ est une forme de classe C^∞ à support compact dans un ϵ voisinage du support de S, donc bornée sur $\bar{\Omega}$. Donc $A_\epsilon F$ est le mauvais terme de la solution $R_\epsilon S + A_\epsilon F$, au sens où il n'admet pas immédiatement de valeur au bord. Sa régularité est meilleure que celle de F dans un ϵ voisinage du support de F. Puisque F est C^∞ sur Ω, $A_\epsilon F$ est donc C^∞ sur Ω. Montrons qu'il a une valeur au bord au sens des courants. Il nous suffit pour avoir le théorème de montrer que $A_\epsilon F$ restreinte à Ω admet une valeur au bord au sens des courants. Or $A_\epsilon F$ est de même nature que $\langle F, K(z,\xi)\rangle$ où $K(z,\xi)$ est le noyau de Bochner Martinelli Koppelmann.

Nous allons donc montrer que $\langle F, K(z,\xi)\rangle$ admet une valeur au bord au sens des courants.

$u(z) := \langle F, K(z,\xi)\rangle$ pour tout $z \in \Omega$. Soit $z \in \Omega$, ρ une fonction à support compact sur $B(z, \frac{d(z)}{2})$ comprise entre 0 et 1 qui vaut 1 sur $B(z, r(z) = \frac{d(z)}{4})$, où $d(z)$ est la distance de z au bord de Ω. On a :

$$u(z) = \langle F, \rho K(z,\xi)\rangle + \langle F, (1-\rho)K(z,\xi)\rangle.$$

Posons $u_1(z) = \langle F, \rho K(z,\xi)\rangle = \displaystyle\int_{z\in\Omega} \rho f \wedge K(z,\xi)$.

u_1 est une forme de classe C^∞ sur $\bar{\Omega}$; donc admet une valeur au bord au sens des courants.

Posons $u_2(z) = \langle F, (1-\rho)K(z,\xi)\rangle$. Puisque l est l'ordre du courant F qui prolonge f, on a :

$$\begin{aligned}
u_2(z) &\leq C\|(1-\rho)K(z,\xi)\|_{l,\bar{\Omega}} \\
&\leq C\|(1-\rho)K(z,\xi)\|_{l,\bar{\Omega}\setminus\bar{B}(z,r(z))} \\
&\leq \sup_{\xi\in\bar{\Omega}\setminus\bar{B}(z,r(z))} \frac{C'}{|\xi - z|^{2n-1+l}} + \text{des termes moins} \\
&\quad \text{mauvais} \\
&\leq \sup_{\xi\in\bar{\Omega}\setminus\bar{B}(z,r(z))} \frac{C''}{|\xi - z|^{2n-1+l}} \\
&\leq \sup_{\xi\in\bar{\Omega}\setminus B(z,r(z))} \frac{C''}{|\xi - z|^{2n-1+l}} \\
&\leq \frac{C'''}{d(z)^{2n-1+l}}\ .
\end{aligned}$$

Donc u_2 est une forme à croissance polynomiale sur Ω ; elle admet alors une valeur au bord au sens des courants d'après la proposition 3.1. □

Références

[1] J. L. C. LAURENT-THIEBAULT – « Andreotti-vesentini separation theorem with c^k estimates and extension of *cr* forms », *Mathematical Notes* **38 Princeton University** (1993), p. 416–436.

[2] E. M. Chirka – « Regularization and $\bar{\partial}$-homotopy on a complex manifold », *Soviet Math. Dolk.* **20** (1979), p. 73–76.

[3] S. Lojaciewiecz & G. Tomassini – « Valeurs au bord des forms holomorphes », in *Several Complex Variables* (P. Scuola. Norm. Sup. Pisa, éd.), Cortona, 1976 77, 1978, p. 222–246.

[4] A. Martineau – « Distributions et valeurs au bord des fonctions holomorphes », in *Theory of Distributions (Proc. Internat. Summer Inst., Lisbon, 1964)*, Inst. Gulbenkian Ci., Lisbon, 1964, p. 193–326.

[5] S. Sambou – « Résolution du $\bar{\partial}$ pour les courants prolongeables », *Math. Nachrichten* **235** (2002), p. 179–190.

Salomon Sambou
Laboratoire de Mathématiques et applications
Université de Ziguinchor
Ziguinchor BP 523
SENEGAL
ssambou@refer.sn

Mansour Sané
Laboratoire de Mathématiques et applications
Université de Ziguinchor
Ziguinchor BP 523
SENEGAL
sanemansour@yahoo.fr