ANNALES MATHÉMATIQUES BLAISE PASCAL

ANNE-MARIE TRÉGUIER

Modélisation numérique pour l'océanographie physique

Annales mathématiques Blaise Pascal, tome 9, nº 2 (2002), p. 345-361
<http://www.numdam.org/item?id=AMBP_2002__9_2_345_0>

© Annales mathématiques Blaise Pascal, 2002, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales mathématiques Blaise Pascal » (http://math.univ-bpclermont.fr/ambp/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ANNALES MATHEMATIQUES BLAISE PASCAL 9, 345-361 (2002)

Modélisation numérique pour l'océanographie physique

Anne Marie Tréguier

Résumé

Cet article est une très brève revue de la modélisation océanique. Les différentes classes de modèles sont évoquées dans un contexte historique. En ce qui concerne les modèles quasi-bidimensionnels, une évolution s'est produite au niveau des concepts qui a conduit au développement d'une nouvelle classe de modèles (dynamique des contours). En ce qui concerne les modèles tri-dimensionnels aux equations primitives, seul le problème particulier des paramétrisations est abordé ici. Les nouvelles paramétrisations des tourbillons sont présentées de manière synthétique à l'aide du formalisme du tenseur de mélange local.

1 Introduction

Cet exposé est une présentation très partielle de la modélisation océanique, dont le but est de donner au lecteur non familier avec ce domaine quelques clés et références pour aborder les avancées scientifiques récentes.

1.1 Rappels historiques

En ce qui concerne la modélisation numérique, tout comme pour beaucoup d'aspects de la physique, les développements en météorologie ont précédé ceux en océanographie. On attribue au météorologue V.Bjerknes l'idée de la prévision météo (dès 1904) : connaissant l'état du fluide (masse et vitesses) à l'instant t, on peut déterminer les états suivants en résolvant les équations hydrodynamiques. L'histoire de la modélisation en météorologie commence avec L. F. Richardson, qui tenta le premier de prévoir un état ultérieur de l'atmosphère à partir d'observations de l'état actuel et des équations de la dynamique des fluides.

Richardson réalisa sa première prévision alors qu'il se trouvait en Europe pendant la première guerre mondiale. Le résultat fut désastreux: une prévision d'un changement de pression de surface de 145 hPa en 6 heures, complètement impossible. Richardson publia cependant ce résultat dans un livre plein d'intuitions [25], qui fut hélas longtemps ignoré compte tenu de la mauvaise qualité de la première application numérique. Lynch [18] a récemment refait le calcul de Richardson en utilisant les mêmes données de base (et un ordinateur!); il a montré que l'erreur de prévision était dûe à la combinaison de la mauvaise qualité des données et de l'existence dans l'atmosphère de modes rapides (les ondes de gravité). Aujourd'hui, les données qui servent à la prévision météo sont filtrées par une procédure que l'on appelle "initialisation" pour contrôler la dérivée temporelle des modes rapides au démarrage du modèle. En appliquant cette procédure aux données de Richardson, P. Lynch trouve des résultats tout à fait réalistes [18],
http://www.maths.tcd.ie/ plynch/.

Dans les années 30 et 40, des progrès essentiels furent accomplis d'une part en analyse numérique et d'autre part dans la compréhension de la dynamique des grandes échelles atmosphériques (introduction par Rossby du système d'équations quasi-géostrophiques). Ces progrès ont rendu possible le succès de la première prévision météorologique numérique effectuée en 1950 par Charney, Fjortoft et Von Neumann à l'aide de l'ordinateur ENIAC installé à l'université de Princeton. La prévision fut réalisée en intégrant dans le temps l'équation quasigéostrophique de la vorticité barotrope, afin de représenter l'évolution du champ de pression à 500 millibars.

Le premier modèle *océanique* de circulation générale, utilisant les équations primitives, a été écrit en 1969 par K. Bryan (Geophysical Fluid Dynamics Laboratory, à l'université de Princeton). Du fait des possibilités limitées des ordinateurs, les premières simulations ont porté sur des portions de bassins océaniques uniquement. Un exemple est l'étude du courant Antarctique Circumpolaire dans une géométrie idéalisée [11]. La résolution du modèle était de l'ordre de 1° de latitude et de longitude et le nombre de points de grille $20 \times 30 \times 8$ niveaux. Puis les premières simulations de l'océan mondial à faible résolution ont été réalisées. Le modèle de K. Bryan était remarquable à bien des égards, et presque tous les modèles utilisés actuellement dans le cadre de la prévision climatique sont basés sur les mêmes équations, et le même type d'approximations en différences finies respectant des propriétés essentielles de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Un "petit-fils" du modèle de Bryan est actuellement utilisé pour

calculer la circulation de l'océan mondial sur une grille de $3600 \times 2440 \times 45$ points. Ce projet Américain utilise 500 processeurs sur une machine scalaire parallèle.

1.2 Difficulté du problème

Le recours à la modélisation numérique est nécessaire en mécanique des fluides en général, car les équations sont non linéaires et les interactions entre échelles importantes. Ce dernier point est particulièrement crucial dans l'océan puisque les circulations à l'échelle planétaire (des milliers de kilomètres) intéragissent fortement avec le mélange vertical (échelles de quelques centimètres). Bien que non-linéaire, l'océan est avant tout un système forcé par l'atmosphère. Cependant cela ne simplifie pas le calcul des solutions car les forçages (vent, flux de chaleur, glace, évaporation-précipitation) sont très variables dans le temps et dans l'espace, et des non-linéarités apparaissent dans l'expression des flux des surface. Enfin, la géométrie des côtes et de la topographie (bathymétrie) du fond de l'océan sont très complexes.

Malgré les similarités entre les enveloppes fluides de notre planète, deux éléments rendent la modélisation de l'océan beaucoup plus complexe et coûteuse que celle de l'atmosphère. Premièrement, le caractère fermé des bassins océaniques rend possible l'existence de courants de bord. Deuxièmement, l'océan est très grand par rapport à l'échelle spatiale fondamentale qu'est le rayon de déformation (1000 km dans l'atmosphère, et 30 km environ dans l'océan). Or les mouvements à l'échelle du rayon de déformation sont ceux qui contiennent le plus d'énergie, et leur effet sur l'écoulement grande échelle est difficilement paramétrisable. Donc, les progrès le plus importants des modèles d'océan ces 30 dernières années sont dûs à l'augmentation de la puissance des calculateurs qui a rendue possible des modèles de grande emprise (globaux ou de bassin) à une résolution de plus en plus élevée.

1.3 Classes de modèles

Les modèles se distinguent d'abord par leur système d'équations, puis leur discrétisation. Les équations quasi-géostrophiques ont permis les premières études de la turbulence océanique d'échelle moyenne dans les années 1970. Ces équations sont toujours la base de la modélisation de la turbulence géostrophique, quoique des systèmes d'équations plus précis ("Modèles intermédiaires") soient développés [6].

La plupart des modèles d'océan utilisent comme [5] les équations primitives (Equations de Navier-Stokes en fluide stratifié, avec approximation hydrostatique et de Boussinesq). Les variantes les plus importantes (en terme d'utilisation au sein de la communauté) concernent le système de coordonnées verticales. On peut classer les modèles en trois familles:

1. Modèles en coordonnée verticale "z" [5].
2. Modèles en coordonnée "sigma" telle que la topographie du fond constitue une ligne de coordonnées [4]; [14]. Cette deuxième famille est la plus répandue dans les modèles côtiers.
3. Modèles en coordonnées isopycnes [3], et plus récemment hybrides entre coordonnées isopycnes et "z" [2].

Il n'est pas possible de décrire ici en détail ces différentes catégories de modèles. Des présentations complètes sont disponibles dans le livre de Haidvogel et Beckmann [14] ou un article de revue du Working Group on Ocean Model Development [13]. Dans la suite de l'exposé, nous aborderons la modélisation bidimensionnelle, qui a été source de développements algorithmiques originaux, et la paramétrisation des échelles sous mailles dans les midèles de climat, qui est un domaine de recherche très actif.

2 Modélisation quasi-bidimensionnelle

Dans les années 1970, les ressources informatiques ne permettaient pas d'étudier numériquement la turbulence océanique d'échelle moyenne en trois dimensions. Les océanographes ont donc tiré parti de l'essence quasi-bidimensionnelle de cette turbulence, en développant des modèles idéalisés, les plus courants étant basés sur les équations quasigéostrophiques. ces équations (et modèles correspondants) constituent un laboratoire remarquable pour l'étude des phénomènes non linéaires et le test de nouvelles approches (notamment les modèles stochastiques [12].

2.1 Turbulence bidimensionnelle et cascade inverse

L'équation de la continuité est dans le cas bidimensionnel

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

c'est à dire que l'écoulement est non divergent. Il existe une fonction courant ψ telle que $u = -\partial\psi/\partial y$ et $v = \partial\psi/\partial x$ (u et v sont les vitesses horizontales). L'équation d'évolution est:

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} + J(\psi, \zeta + f) = F, \tag{2.1}$$

où $f = f_0 + \beta y$ est le paramètre de Coriolis et β sa variation en fonction de la latitude y, $\zeta = \nabla^2\psi$ est la vorticité relative, J le jacobien et F les forces de forçage et de frottement. L'étude peut se situer dans un domaine périodique.

La conservation de l'enstrophie Z (carré de la vorticité intégré sur le somaine) entraîne pour l'écoulement bidimensionnel des propriétés très différentes de celles de la turbulence tridimensionnelle [15], [1]. Dans la turbulence tridimensionnelle l'énergie tend à aller systématiquement vers les petites échelles, jusqu'à l'échelle moléculaire où l'énergie est dissipée. Dans la turbulence bidimensionnelle une telle cascade est impossible, car le transfert d'une quantité d'énergie δE du nombre d'onde $K = k_0$ à un nombre d'onde supérieur, par exemple $K = 2k_0$, conduit à une augmentation de l'enstrophie d'un facteur 4. La conservation de l'enstrophie exige donc que tout transfert d'energie vers les petites échelles soit accompagné d'un transfert plus grand en sens inverse. Le résultat est une *cascade d'énergie vers les grandes échelles*, dite aussi "cascade inverse" car elle s'effectue dans le sens opposé de la cascade turbulente en trois dimensions.

Les premières modélisations numériques d'un océan quasi-géostrophique ont été rendues possibles par le développement du modèle numérique pseudo-spectral [21]. Ce modèle à rendu possible l'illustration par Rhines [24] de la cascade vers les grandes échelles et de son arrêt par l'effet β. L'étude numérique de ce système se poursuit en atteignant des résolutions spatiales beaucoup plus fines [20].

2.2 Modélisation numérique des structures cohérentes.

Depuis les années 1990 l'emphase passe de la cascade (espace spectral) à l'espace physique (dynamique des tourbillons cohérents et de leurs filaments). Les méthodes numériques spectrales ne sont pas les mieux adaptées à ces études [17]. Une famille de méthodes a été proposée par Dritschel [8]: il s'agit de la méthode de dynamique de contours. Dans cette méthode, on ne discrétise pas un champ tourbillonnaire sur une grille mais par des contours de vorticité. Ces contours sont advectés par le champ de vitesse à l'instant t;

on en déduit un nouveau champ de vitesse à l'instant $t+dt$; d'où un nouveau champ de fonction courant (par résolution du système elliptique qui relie la fonction courant à la vorticité) et de vitesse, et la possibilité de continuer l'intégration.

L'inconvénient de la méthode est que comme les contours de vorticité tendent à s'allonger pour former des filaments très minces, un nombre de points croissant est nécessaire pour continuer l'intégration du modèle avec une bonne résolution. Pour résoudre ce problème Dristchel introduit la "chirurgie" qui consiste à éliminer les filaments minces et à reconnecter les contours de vorticité. La chirurgie est une forme de dissipation.

L'applicabilité de la méthode repose sur l'invertibilité de la vorticité, c'est à dire la possibilité de retrouver le champ de vitesse connaissant la vorticité. Pour une extension de ce problème en fluide stratifié en trois dimensions il faut considérer la vorticité potentielle, dont l'invertibilité est un problème plus complexe [19].

2.3 Effets de la bathymétrie

Dans le cas quasi-bidimensionnel des équations quasi-géostrophiques, l'effet de la bathymétrie (montagnes sous-marines) est inclus dans le terme non-linéaire jacobien qui s'écrit en présence de topographie

$$J(\psi, \zeta + f + f_0 h/H).$$

où H est l'épaisseur totale de la couche d'eau, $h(x,y)$ la hauteur de la bathymétrie, et f_0 la fréquence de Coriolis.

L'introduction de l'effet topographique dans un modèle quasigéostrophique ne présente donc aucune difficulté numérique, mais par contre une grande difficulté mathématique. L'interaction avec la topographie a des propriétés similaires à l'advection non linéaire en ce qui concerne la structure spatiale. Ainsi la topographie génère de petites échelles dans un écoulement initialement à grande échelle. Par contre, la topographie étant constante dans le temps, elle ne peut pas générer de courants moyens (dans le temps) à partir de fluctuations. Un tel phénomène, appelé "rectification" est pourtant très important dans l'océan et dans les modèles numériques en présence de topographie. C'est un effet indirect de la topographie, dû en fait à l'advection non linéaire de vorticité.

3 Paramétrisations dans les modèles de climat

Du fait de la disparité des échelles spatiales actives dans l'océan, tous les modèles nécessitent des paramétrisations sous-maille élaborées. Les solutions sont dépendantes de ces paramétrisations: or les paramétrisations sont imparfaites et mal calibrées du fait de l'insuffisance des mesures de phénomènes à moyenne et petite échelle dans l'océan profond. L'amélioration des paramétrisations est donc cruciale pour rendre plus fiable les modèles de climat, qui servent notamment à prédire l'effet de l'augmentation de la concentration des gaz à effet de serre dans l'atmosphère (problème du réchauffement global).

A la base des paramétrisations, il y a toujours une prise en compte de l'anisotropie fondamentale de l'océan. A des échelles de quelques dizaines de kilomètres et plus, les effets de la rotation sont importants et rendent l'écoulement quasi-bidimensionnel. Les effets de la stratification en température sont sensibles jusqu'à des échelles verticales inférieures au mètre. On ne retrouve l'isotropie qu'aux très petites échelles. Celles ci sont empiriquement reliées à la diffusivité moléculaire par la relation de Kolmogorov (étendue par Batchelor à un traceur passif); pour la température, cette échelle est de 1 cm et pour la salinité de quelques millimètres.

$$L \approx 2\pi(D^2\nu/\epsilon)^{1/4}$$

où $\nu = O(10^{-6})\mathrm{m}^2\mathrm{s}^{-1}$ est la viscosité et $D = O(10^{-7})\mathrm{m}^2\mathrm{s}^{-1}$ est la diffusion de température (la diffusion de sel est 100 fois plus petite), et ϵ est le taux de dissipation de l'énergie turbulente ($O(10^{-9})\mathrm{W/kg}$).

Nous passons en revue ci-dessous quelques problèmes particuliers liés aux paramétrisations. Le lecteur intéressé est invité à consulter l'ouvrage édité par Chassignet et Verron [7]

3.1 Le mélange vertical dans l'intérieur

La dérivation des paramétrisations est basée sur une décomposition de Reynolds des variables. On définit une moyenne, en principe moyenne d'ensemble sur plusieurs réalisations de l'écoulement turbulent, et on pose par exemple pour la température T:

$$T = \overline{T} + \theta'.$$

Il convient de noter que l'on applique abusivement ce genre de raisonnement aux mouvements non résolus par la maille des modèles numériques

d'océan; en effet, la moyenne spatiale n'est pas un bon opérateur de moyenne pour une décomposition de Reynolds du fait des interactions non-linéaires entre échelles.

Les paramétrisations sont souvent basées sur une hypothèse de relation locale entre les flux turbulents et les gradients des variables moyennes. On exprime par exemple le flux vertical de fluctuation de température:

$$\overline{w'\theta'} == -\kappa \frac{\partial \overline{T}}{\partial z}.$$

Dans ce cas l'équation d'évolution du profil moyen de température est:

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \kappa \frac{\partial \overline{T}}{\partial z}.$$

Lorsque κ est constant cette équation est une simple équation de diffusion de la chaleur. L'ordre de grandeur du coefficient κ est de 10^{-6} à $10^{-4}\mathrm{m}^2\mathrm{s}^{-1}$ dans l'intérieur de l'océan.

Une variation spatiale de κ est équivalente à l'indroduction d'une advection avec une vitesse

$$w_\kappa = -\partial\kappa/\partial z.$$

Lorsque κ est une fonction nonlinéaire décroissante de $\overline{T}$, le terme de diffusion peut générer des discontinuités et des "marches" dans le profil de température . Dans l'exemple de la figure 1, le coefficient de diffusion est proportionnel à $\exp(-(dT/dz)^2)$. Cet effet a été remarqué par Phillips [22], ou plus récemment [26].

Dans les paramétrisations courantes, κ est non seulement une fonction nonlinéaire des gradients mais même parfois discontinue ("à seuil"). Par exemple

- Mélange dans l'intérieur dépendant du nombre de Richardson: il existe un nombre de Richardson critique de 0.25 en dessous duquel le mélange devient important, alors que le mélange turbulent n'existe pas pour des nombre de richardson plus élevés.

- Mélange par convection: lorsque de l'eau dense se trouve au dessus d'eau légère, par exemple sous l'action d'un refroidissement en surface, des cellules de convection se mettent en place et homogénéisent rapidement le fluide. Ce mécanisme doit être paramétrisé dans les modèles hydrostatiques. On peut le faire en augmentant considérablement le

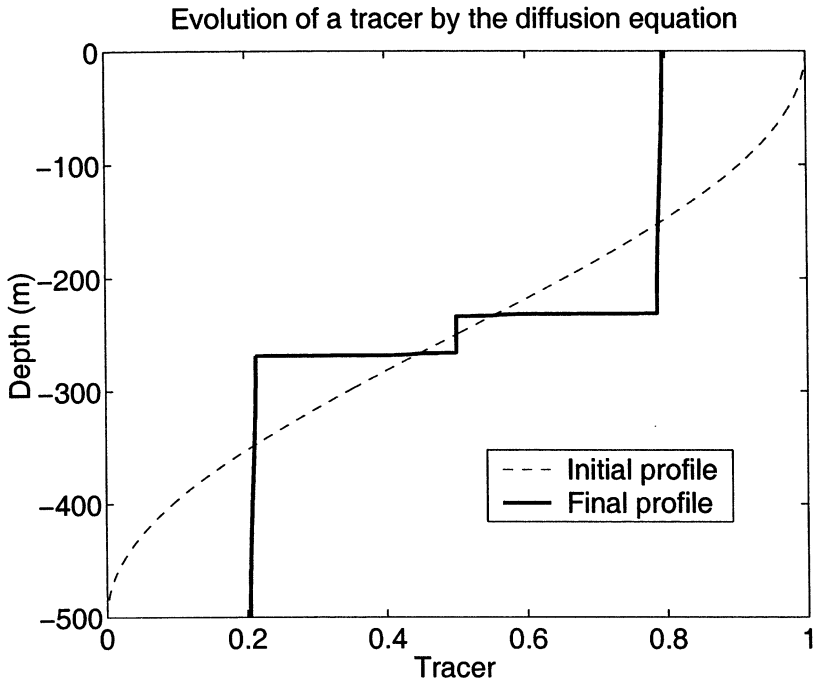

Figure 1: Profil initial et final pour un traceur solution de l'équation de diffusion en une dimension, avec conditions de flux nul en surface et au fond. Le coefficient de diffusion est une fonction gaussienne du gradient de traceur.

coefficient de mélange κ dès que le gradient vertical de densité change de signe.

- Mélange par double diffusion: ce phénomène se produit du fait des diffusions moléculaires différentes du sel et de la chaleur. Il se produit au dela d'un rapport de densité critique.

3.2 Les couches limites de surface et de fond

La couche limite de surface, ou couche mélangée océanique, joue un rôle fondamental dans le couplage océan atmosphère. Le modèle classique est celui d'Ekman, qui représente la turbulence par une viscosité constante et prédit une structure en spirale des courants. En fait, la turbulence dans la

couche mélangée de surface est complexe et intermittente: sa paramétrisation est l'objet d'une recherche très active, trop riche pour être évoquée ici. Une revue récente a éé réalisée par W. Large [16].

Le frottement au fond joue un rôle très important dans la dissipation de l'énergie cinétique des grands courants. On représente parfois le frottement au fond par un opérateur linéaire: la couche de fond est alors analogue à une couche d'Ekman classique. Il semble, d'après les mesures de laboratoire, qu'une formulation quadratique soit plus réaliste. Le choix de l'une ou l'autre ne semble pas avoir d'effet majeur sur la dynamique. Dans les modèles tridimensionnels le frottement au fond entre sous la forme d'un flux de quantité de mouvement. La viscosité turbulente est faible dans l'intérieur, et la couche d'Ekman de fond est très rarement résolue par les grilles verticales des modèles: il en résulte que les formulations de frottement au fond s'apparentent en pratique à la prescription d'une force agissant dans la dernière couche du modèle.

Dans certaines régions de l'océan une dynamique particulière se produit au voisinage du fond: c'est la dynamique de l'écoulement des eaux denses forcés dans une mer intérieure ou sur un plateau continental. Un exemple est celui de l'eau méditerranéenne, qui sort par le détroit de Gibraltar et plonge (car elle est plus dense que l'eau Atlantique, du fait de sa salinité élevée) jusqu'à une profondeur de l'ordre de 1000 m. Ce processus est très mal représenté dans les modèles actuels [7].

3.3 La paramétrisation du mélange isopycnal

3.3.1 Mélange des anomalies de température et de sel

Les océanographes savent depuis longtemps que le mélange de masses d'eau par les tourbillons d'échelle moyennes se fait le long de surfaces isopycnes. Les premiers modèles d'océan avaient un mélange horizontal des propriétés (température et salinité). Dans ce cas l'équation pour la température est

$$\frac{\partial T}{\partial t} + ... = \frac{\partial}{-\partial z}\kappa_v \frac{\partial T}{\partial z} + \nabla_h \kappa_h \nabla_h T$$

κ_h étant le coefficient de diffusion horizontal et κ_v le coefficient de diffusion verticale. On note $\epsilon = \kappa_v/\kappa_h$. L'opérateur de diffusion peut s'écrire $\nabla \mathbf{K}^S \nabla T$

avec:

$$\mathbf{K}^S = \kappa_h \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{bmatrix}.$$

On a rapidement réalisé que ce type d'opérateur était une source d'erreur importante dans la représentation de l'océan mondial. Depuis les années 1980 [23] on applique donc une rotation locale à l'opérateur de mélange latéral pour l'orienter le long des isopycnes locaux. $\rho(x, y, z, t)$ étant la densité potentielle locale, le nouvel opérateur s'écrit:

$$\mathbf{K}^g = \frac{\kappa_h}{\rho_x^2 + \rho_y^2 + \rho_z^2} \begin{bmatrix} \rho_z^2 + \rho_y^2 + \epsilon\rho_x^2 & (\epsilon - 1)\rho_x\rho_y & (\epsilon - 1)\rho_x\rho_z \\ (\epsilon - 1)\rho_x\rho_y & \rho_z^2 + \rho_x^2 + \epsilon\rho_y^2 & (\epsilon - 1)\rho_y\rho_z \\ (\epsilon - 1)\rho_x\rho_z & (\epsilon - 1)\rho_y\rho_z & \rho_x^2 + \rho_y^2 + \epsilon\rho_z^2 \end{bmatrix}.$$

Il reste dans ce cas à prescrire le coefficient de ce mélange κ_h; les estimations basées sur les observations vont de 100 à plus de 1000 $\mathrm{m^2s^{-1}}$ (noter qu'il y a 7 ordres de grandeur de différence avec le coefficient vertical κ_v!). Dans le cas du climat actuel on peut imaginer de donner à ce coefficient une structure spatiale correspondant à l'énergie cinétique mésoéchelle observée par satellite. On peut aussi essayer de relier ce coefficient à des caractéristiques du champ moyen susceptibles, dans la réalité, de conditionner l'existence de la turbulence d'échelle moyenne (par exemple, le cisaillement vertical qui engendre de l'instabilité barocline).

3.3.2 Effet dynamique des tourbillons d'échelle moyenne

Dans les années 1990, Gent et Mc Williams [9] ont fait la remarque qu'il ne suffit pas d'introduire un mélange ispycne pour représenter l'effet des tourbillons d'échelle moyenne. Prenons pour exemple un courant de grande échelle barocliniquement instable. Le cisaillement vertical de courant est associé, par géostrophie, à un gradient horizontal de densité. Or, le développement de la turbulence va avoir pour effet de diminuer le cisaillement, et donc "d'aplatir" le front de densité: cet effet pas représenté si le mélange agit uniquement le long des isopycnes.

En se basant sur les équations moyennées en coordonnées isopycnes, Gent et Mc Williams proposent d'ajouter une nouvelle paramétrisation, qui est formulée comme une vitesse d'advection supplémentaire dépendant de la pente des isopycnes "moyennes" [10].

Une manière de voir cette nouvelle paramétrisation est de considérer le cas général d'un tenseur de mélange local (ici en deux dimensions y et z pour simplifier; on suppose donc que la moyenne de Reynolds est une moyenne zonale selon x. Cette situation s'applique dans l'atmosphère ou dans le cas d'un canal périodique. La relation locale entre le flux turbulent F et le gradient d'une quantité q s'écrit:

$$F = \overline{u'q'} = -\mathbf{K}\nabla\overline{q}.$$

En deux dimensions, $\mathbf{K}$ est une matrice 2×2.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{yy} & K_{yz} \\ K_{zy} & K_{zz} \end{bmatrix}.$$

L'approximation classique consiste à ne conserver que les deux composantes diagonales K_{yy} (coefficient de mélange horizontal) et K_{zz} (coefficient de mélange vertical). Le cas du mélange isopycnal consiste en une rotation, et le tenseur demeure symétrique.

L'introduction de la paramétrisation de Gent et Mc Williams, vue dans ce cadre, consiste à ajouter une partie antisymétrique $\mathbf{L}$ au tenseur $\mathbf{K}$:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & \gamma \\ -\gamma & 0 \end{bmatrix}.$$

La relation flux-gradient s'écrit pour cette composante:

$$\begin{aligned} \overline{v'q'} &= -\gamma\frac{\partial q}{\partial z} \\ \overline{w'q'} &= \gamma\frac{\partial q}{\partial y} \end{aligned}$$

Donc la divergence du flux turbulent F qui entre dans l'équation pour le traceur q moyenné est:

$$\nabla F = -\frac{\nabla\gamma}{\partial y}\frac{\nabla q}{\partial z} + \frac{\nabla\gamma}{\partial z}\frac{\nabla q}{\partial y}.$$

ce terme représente clairement l'advection par un champ de vitesse non divergent $v^* = \partial\gamma/\partial z$ and $w^* = -\partial\gamma/\partial y$. La composante γ de la partie antisymétrique du tenseur de mélange est une fonction courant pour la vitesse d'advection.

En trois dimensions, la paramétrisation proposée par Gent et Mc Williams pour les vitesses générées par les tourbillons s'écrit en fonction des gradients de la densité potentielle moyenne $\overline{\rho}$:

$$\begin{aligned} u^* &= -\frac{\partial}{\partial z}\left(\kappa\frac{\partial\overline{\rho}/\partial x}{\partial\overline{\rho}/\partial z}\right); \\ v^* &= -\frac{\partial}{\partial z}\left(\kappa\frac{\partial\overline{\rho}/\partial y}{\partial\overline{\rho}/\partial z}\right); \\ w^* &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\kappa\frac{\partial\overline{\rho}/\partial y}{\partial\overline{\rho}/\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\kappa\frac{\partial\overline{\rho}/\partial x}{\partial\overline{\rho}/\partial z}\right). \end{aligned} \tag{3.2}$$

L'introduction de cette paramétrisation dans les modèles de climat à basse résolution semble tout à fait nécessaire dans la région du courant Antarctique circumpolaire; les effets sont mitigés dans les autres régions de l'océan mondial. En particulier, cette paramétrisation étant basée sur la théorie de l'instabilité barocline aux latitudes moyennes, il n'est pas nécessairement fondé de l'appliquer à l'équateur. De plus, l'amplitude du coefficient κ associé à cette nouvelle paramétrisation est encore mal connu. En termes physiques, il représente le coefficient de mélange de la vorticité potentielle.

3.4 La viscosité turbulente (mélange de quantité de mouvement

La viscosité turbulente horizontale est souvent supposée avoir la même forme que la viscosité moléculaire. On ajoute ainsi un laplacien à l'équation de quantité de mouvement, par exemple pour une composante u:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + ... = \nu_h \nabla^2 u.$$

Dans les modèles à basse résolution, le coefficient ν_h est dicté par une contrainte purement numérique qui est celle de résoudre la couche limite de bord ouest. Ainsi pour une résolution spatiale $\delta x = 100$ km, $\nu_h > (\delta x)^3\beta = 18000$ m^{2}s^{-1}. On voit que ce coefficient est au moins d'un ordre de grandeur supérieur aux estimations du mélange de traceurs par les tourbillons d'échelle moyenne (plutôt d'ordre 100 à 1000 m^{2}s^{-1}). Les modèles basse résolution sont donc implémentés avec un nombre de Prandtl très grand, que rien ne justifie physiquement. Il faut noter que dans un modèle en coordonnées

sphériques, pour des raisons de symmétrie l'opérateur de viscosité devrait avoir une forme différente d'un simple laplacien [29].

Dans les modèles quasigéostrophiques, la paramétrisation de la viscosité se base sur les propriétés de la turbulence bidimensionnelle. Dans ce cas, le mécanisme à représenter est celui de la cascade d'enstrophie vers les petites échelles. Pour représenter la dissipation d'enstrophie à l'extrémité du spectre sans trop dissiper d'énergie aux échelles moyennes, des opérateurs d'ordre élevé (laplacien itéré n fois) ont été introduits. Il est commode d'utiliser des valeurs élevées de n dans les modèles spectraux, mais on se contente de l'opérateur bilaplacien (aussi appelé biharmonique) dans les modèles aux différences finies. Des formes plus sophistiquées ayant la propriété de conserver l'énergie ont été proposées [28].

Dans le formalisme quasi-géostrophique il est aisé de rassembler viscosité et diffusivité sous les forme d'une diffusion de vorticité potentielle (puisque l'équation de base est celle de la vorticité potentielle). Diverses études réalisées à l'aide de modèles numériques suggèrent que les tourbillons d'échelle moyenne mélangent la vorticité potentielle [27]. Cependant, on ne dispose pas dans le système d'équations primitives d'une paramétrisation permettant de simuler cet effet (ce problème est abordé dans plusieurs articles du livre édité par Chassignet et Verron, [7].

4 Conclusion

Nous n'avons pas abordé les algorithmes et méthodes numériques utilisés pour les modèles tridimensionnels d'océan. En effet, les océanographes ont jusqu'à présent préféré des méthodes simples et peu coûteuses (différences finies du second ordre). La raison fondamentale en est qu'à coût égal, on obtient une solution de meilleure qualité en raffinant la maille plutôt qu'en utilisant un schéma plus précis sur une grille grossière. Ceci est vrai lorsqu'on passe de modèles de maille grossière (100 km) à des modèles résolvant la turbulence d'échelle moyenne; c'est encore vrai lorsqu'on évolue vers des modèles de maille fine (1 km) qui permettent de représenter les veines d'eau intenses dans les détroits. Rappelons que la veine d'eau méditerranéenne, qui affecte la salinité de l'Atlantique Nord sur des milliers de kilomètres, ne fait que quelques kilomètres de large au sortir du détroit de Gibraltar! Le développement de méthodes numériques plus sophistiquées s'accélèrera probablement avec la disponibilité de moyens de calculs plus puissants [14].

Références

[1] G. K. Batchelor. Computation of the energy spectrum in homogeneous two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids.*, 12, II:233–238, 1969.

[2] R. Bleck. An oceanic general circulation model framed in hybrid isopycnic-cartesian coordinates. *Ocean Modelling*, 4:55–88, 2002.

[3] R. Bleck et D. B. Boudra. Initial testing of a numerical ocean circulation model using a hybrid (quasi-isopycnic) vertical coordinate. *J. Phys. Oceanogr.*, 11:755–770, 1981.

[4] A. F. Blumberg et G. L. Mellor. A description of a three-dimensional coastal ocean circulation model. In Norman S. Heaps, editor, *Three-dimensional Coastal ocean models*, pages 1–16. American Geophysical Union, 1987.

[5] K. Bryan. A numerical method for the study of the world ocean. *J. Comput. Phys.*, 4:347–376, 1969.

[6] X. Carton, R. Baraille, et N. Filatoff. Modèles intermédiaires de circulation océanique. *Annales Blaise Pascal*, x:x–y, 2002.

[7] E. Chassignet et J. Verron, editors. *Ocean Modeling and Parameterization*, volume 516 of *NATO Science series C.* Kluwer Academic Publishers, Cambridge, 1990.

[8] D. G. Dristchel. Contour dynamics and contour surgery: numerical algorithms for extended, high resolution modeling of vortex dynamics in two-dimensional, inviscid, incompressible flow. *Comp. Phys. Rep.*, 10:77, 1989.

[9] P.R. Gent et J.C. McWilliams. Isopycnal mixing in ocean circulation model. *J. Phys. Oceanogr.*, 20:150–155, 1990.

[10] P.R. Gent, J. Willebrand, T.J. McDougall, et J.C. McWilliams. Parameterizing eddy-induced tracer transports in ocean circulation models. *J. Phys. Oceanogr.*, 25:463–474, 1995.

[11] A. E. Gill et K Bryan. Effects of geometry on the circulation of a three-dimensional southern hemisphere ocean model. *Deep Sea Res.*, 18:685–721, 1971.

[12] A. Griffa. Applications of stochastic particle models to oceanographic problems. In P. Muller R. Adler et B. Rozovskii, editors, *Stochastic Modelling in Physical Oceanography*, page 467. Birkhauser, Boston, 1996.

[13] S. M. Griffies, C. Boening, F.O. Bryan, E. P Chassignet, R. Gerdes, H. Hasumi, A. Hirst, A.M Treguier, et D. Webb. Developments in ocean climate modelling. *Ocean Modelling*, 2:123–192, 2000.

[14] D.B. Haidvogel et A. Beckmann. *Numerical Ocean Circulation Modelling*, volume 2 of *Series on environmental science and management.* Imperial College Press, London, 1999.

[15] R. H. Kraichnan. Statistical dynamics of two-dimensional flow. *J. Fluid. Mech.*, 67:155–175, 1967.

[16] W.G. Large, J.C. McWilliams, et S.C. Doney. Oceanic vertical mixing: a review and a model with a nonlocal boundary layer parameterization. *Reviews of Geophysics*, 32:363–403, 1994.

[17] B. Legras et D.G. Dritschel. A comparison of the contour surgery and psuedospectral method. *J. Comp. Phys.*, 104 (2):287, 1993.

[18] P. Lynch. Richardson's marvellous forecast. In M A Shapiro et S Grønås, editors, *The Life Cycles of Extratropical Cyclones*, page 355pp. Amer. Met. Soc., Boston, 1999.

[19] M.E. McIntyre et W.A. Norton. Potential vorticity inversion on a hemisphere. *J. Atmos. Sci.*, 57(9):1214–1235, 2000.

[20] J.C. McWilliams. The vortices of geostrophic turbulence. *J.Fluid. Mech*, 219:387–404, 1990.

[21] S. Orszag. Numerical simulation of incompressible flows within simple boundaries: accuracy. *J. Fluid. Mech.*, 49:75–112, 1971.

[22] O. M. Phillips. Turbulence in a strongly stratified fluid - is it unstable? *Deep Sea Res.*, 19:79–81, 1972.

[23] M. H. Redi. Oceanic isopycnal mixing by coordinate rotation. *J. Phys. Oceanogr.*, 12:1154–1158, 1982.

[24] P. B. Rhines. Waves and turbulence on a β−plane. *J. Fluid. Mech.*, 69:417–443, 1975.

[25] L.F. Richardson. *Weather Prediction by numerical Process*, volume 516. Cambridge Univ., Press, reprinted in 1965 by Dover publications, New York, 1922.

[26] B. R. Ruddick, T. J. McDougall, et J. S. Turner. The formation of layers in a uniformly stirred density gradient. *Deep Sea Res.*, 36:597–609, 1989.

[27] A. M. Treguier. Evaluating eddy mixing coefficients from eddy-resolving ocean models: a case study. *J. Mar. Res.*, 57:89–108, 1999.

[28] G. K. Vallis et B. L. Hua. Eddy viscosity and the anticipated potential vorticity method. *J. Atmos. Sci.*, 45:617–627, 1988.

[29] R. C. Wajsowicz. A consistent formulation of the anisotropic stress tensor for use in models of the large scale ocean circulation. *J. Comp. Phys.*, 105:333–338, 1993.

ANNE MARIE TRÉGUIER
IFREMER
LABO. DE PHYSIQUE DES OCÉAN
BP 70
29280 PLOUZANE
FRANCE
treguier@ifremer.fr