

BERNARD DI MARTINO

FABIEN FLORI

CATHERINE GIACOMONI

PIERRE ORENGA

**Sur la construction des solutions approchées
d'un problème de tsunami**

Annales mathématiques Blaise Pascal, tome 9, n° 2 (2002), p. 269-281

http://www.numdam.org/item?id=AMBP_2002__9_2_269_0

© Annales mathématiques Blaise Pascal, 2002, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales mathématiques Blaise Pascal » (<http://math.univ-bpclermont.fr/ambp/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Sur la construction des solutions approchées d'un problème de tsunami

Bernard Di Martino

Fabien Flori

Catherine Giacomoni, Pierre Orenge

Résumé

Nous présentons dans ce document un résultat d'existence d'un problème de tsunami. L'écoulement fluide est représenté par un modèle de type shallow water bidimensionnel alors que le déplacement de la lithosphère est représentée par un modèle de plaque. Nous donnons ensuite quelques résultats numériques permettant d'illustrer l'apparition de tsunamis.

1 Position du problème

Nous proposons un modèle ainsi que l'analyse mathématique d'un phénomène de tsunami dû à un déplacement de la lithosphère. Lorsqu'un tsunami a lieu à proximité des côtes, c'est-à-dire en eau peu profonde, la hauteur de sa vague peut atteindre plusieurs mètres. Ce type de tsunami est le plus destructeur et c'est cette situation que nous considérons dans ce travail. Dans ce qui suit, toutes les constantes physiques ont été prises égales à 1 exceptées la viscosité A et l'accélération $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$ dont dépend le choix des données. L'écorce terrestre et la surface du fluide occupent un ouvert borné Ω de \mathbb{R}^2 , simplement connexe (pour simplifier) avec une frontière γ de classe $C^{1,1}$. On note Q le cylindre $\Omega \times]0, T[$ et on pose $\Sigma = \gamma \times]0, T[$. Epaisse d'environ 60 km, la lithosphère est découpée en plaques mobiles qui se déplacent sur l'asthénosphère. Des failles permettent à ces plaques d'accomoder leur mouvement. Avant que l'énergie emmagasinée par les contraintes soit soudainement libérée au dessous des océans, les failles restent bloquées pendant de longues années.

Les dimensions horizontales d'une plaque, de l'ordre du millier de kilomètres, étant grandes devant son épaisseur, le déplacement d de la lithosphère

peut être modélisé par l'opérateur de plaque mince (\mathcal{S}) où f_1 et f_2 sont les contraintes subies par la plaque au niveau des failles

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} \frac{\partial^2 d}{\partial t^2} - \Delta \frac{\partial^2 d}{\partial t^2} + \Delta^2 d = f_0 - gh & \text{dans } Q \\ d = f_1, \nabla d \cdot n = f_2 & \text{sur } \Sigma \\ d(t=0) = d_0(x), \frac{\partial d}{\partial t}(t=0) = d_1(x) & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

Dans l'analyse mathématique du problème on posera $f_1 = f_2 = 0$ pour ne pas alourdir inutilement les calculs. L'action du fluide sur la plaque est prise en compte par un terme de pression $-gh$ où $h = \zeta + H - d$, ζ étant l'élévation du niveau de l'eau et $H > 0$ la bathymétrie supposée constante. Enfin, on suppose que le modèle est à l'équilibre à $t = 0$ d'où f_0 est donné par $f_0 = g(\zeta_0 + H - d_0)$ et $d_0 = d_1 = 0$. Le mouvement de l'océan est décrit par un modèle (SW) d'eau peu profonde (\mathcal{F}) [11] dans lequel $\omega_c \wedge u$ est le terme de Coriolis, $C_d|u|u$ est le frottement du fluide sur la plaque et f_3 est l'action du vent à la surface [5, 10]

$$(\mathcal{F}) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla u^2 + \text{rot} u \wedge u - A \Delta u + g \nabla \zeta + \omega_c \wedge u + C_d |u|u = f_3 & \text{dans } Q \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \text{div}(uh) = 0, & \text{sur } Q \\ \text{rot} u \wedge n = 0, u \cdot n = 0 & \text{dans } \Sigma \\ u(t=0) = u_0(x), h(t=0) = h_0(x) \geq 0 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

Notons que ce modèle est issu de l'intégration sur la verticale des équations tridimensionnelles des fluides géophysiques et prend naturellement en compte les variations de la lithosphère.

Nous avons présenté récemment des résultats d'existence, de régularité et d'unicité des solutions de ce modèle [3]. Nous rappelons ici les résultats d'existence et nous complétons ce travail par une approche numérique pour laquelle nous donnons quelques résultats de simulation.

2 Un résultat d'existence

L'existence de solutions pour le modèle de shallow water (\mathcal{F}) a été établie dans [9], quant au modèle de plaque (\mathcal{S}) il ne présente pas de difficultés particulières. Pour démontrer le résultat d'existence du modèle couplé, on utilise

SOLUTIONS APPROCHÉES D'UN PROBLÈME DE TSUNAMI

des techniques employées dans [1, 2, 4]. Ce résultat est obtenu pour T fini et des données petites. Ceci est dû aux difficultés engendrées par le couplage entre la plaque et le fluide. Afin d'alléger les calculs, nous ne prenons pas en compte les actions de Coriolis, du vent et du frottement au fond. L'obtention de ce résultat d'existence se fait en trois étapes. Au lemme 2.1 nous montrons comment obtenir une borne sur h dans $L^2(Q)$ en fonction de bornes sur u dans $L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega))$, $h \log h$ dans $L^\infty(0, T; L^1(\Omega))$ et d dans $W^{1,\infty}(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H_0^2(\Omega))$. On introduit au lemme 2.2 cette borne dans l'estimation d'énergie naturelle ce qui donne suffisamment de compacité pour obtenir une solution pour des données petites précisées au théorème 2.3. Nous pouvons alors montrer l'existence d'une solution (u, h, d) du problème couplé vérifiant les équations $(\mathcal{F})_1$, $(\mathcal{F})_2$ et $(\mathcal{S})_1$ respectivement dans $L^{4/3}(0, T; H^{-1}(\Omega))$, $L^{4/3}(0, T; W^{-1,4/3}(\Omega))$ et $W^{-1,\infty}(0, T; H^{-2}(\Omega))$. Notons que l'on peut obtenir une solution sans la borne sur h dans $L^2(Q)$ mais alors pour des données plus restrictives.

Avant de développer ces résultats, précisons que l'on utilise l'inversion de l'opérateur $-\Delta$. Plus précisément, pour toute fonction g telle que $\int_\Omega \operatorname{div} g \, dx = 0$, on note $w = (-\Delta)^{-1} \operatorname{div} g$ l'unique solution de $-\Delta w = \operatorname{div} g$ dans Ω avec $\frac{\partial w}{\partial n} = 0$ sur γ et $\int_\Omega w \, dx = 0$. Dans ce qui suit on raisonne formellement sur $(\mathcal{F})_1$. Cette démarche est ensuite appliquée aux solutions approchées qui vérifient les hypothèses nécessaires. Ensuite, en appliquant l'opérateur $(-\Delta)^{-1} \operatorname{div}$ à chaque terme de $(\mathcal{F})_1$ et en notant que $u \in V = \{\varphi \in H^1(\Omega), \varphi \cdot n = 0 \text{ sur } \gamma\}$ peut se décomposer de façon unique sous la forme $u = \nabla p + \operatorname{Rot} q$, avec $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$ et $q = 0$ sur γ , il vient :

$$\frac{\partial p}{\partial t} - A\Delta p + gh = -gd + \int_\Omega (gh_0 + gd) \, dx - \Delta^{-1} \operatorname{div}[(u \cdot \nabla)u]. \quad (2.1)$$

Avec ce résultat, on montre le lemme suivant :

Lemme 2.1: *Si $h_0 \geq 0$, $h_0 \log h_0 \in L^1(\Omega)$ et $p_0 h_0 \in L^1(\Omega)$, alors h vérifie l'estimation :*

$$\begin{aligned} \int_Q h^2 \, dx \, dt \leq & k_0 \left(1 + \epsilon \|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \epsilon^{-1} \|h_0\|_{L^1(\Omega)} \sup_\tau \int_\Omega h(\tau) \log^+ h(\tau) \, dx \right) \\ & + k_0 \left(\|u\|_{L^2(0,T;V)}^2 \|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \int_0^t \left\| \frac{\partial d}{\partial t}(\tau) \right\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|\Delta d(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 \, d\tau \right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

où k_0 dépend des données.

Éléments de démonstration .— Soit $\chi_\delta, \delta \in]0, T[$, défini par $\chi_\delta(t) = 1$ si $0 \leq t \leq T - \delta$ et $\chi_\delta(t) = \frac{T-t}{\delta}$ si $T - \delta \leq t \leq T$. En multipliant l'équation (2.1) par $\chi_\delta h$ et en intégrant sur Q , il vient :

$$\begin{aligned}
 g \int_Q \chi_\delta h^2 \, dxdt &= - \int_Q \frac{\partial p}{\partial t} \chi_\delta h \, dxdt - \int_Q \chi_\delta (\Delta^{-1} \operatorname{div}[(u \cdot \nabla)u]) h \, dxdt \\
 &\quad + A \int_Q \Delta p \chi_\delta h \, dxdt + g \int_Q d\chi_\delta h \, dxdt \\
 &\quad + \int_0^T \left\{ \int_\Omega (gh_0 + gd) \, dx \int_\Omega \chi_\delta h \, dx \right\} dt. \quad (2.3)
 \end{aligned}$$

Estimons les cinq termes du second membre de (2.3), notés respectivement T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 . Le premier est celui qui pose le plus de difficultés et dont nous donnons les principales étapes de l'estimation. Tout d'abord, en utilisant la définition de χ_δ , on obtient :

$$T_1 = - \int_Q \frac{\partial p}{\partial t} \chi_\delta h \, dxdt = \int_\Omega p(0)h(0) \, dx + \int_Q p \frac{\partial \chi_\delta}{\partial t} h \, dxdt + \int_Q p \chi_\delta \frac{\partial h}{\partial t} \, dxdt.$$

Ainsi, en utilisant le fait que $\int_Q p \chi_\delta \frac{\partial h}{\partial t} \, dxdt = - \int_Q p \chi_\delta \operatorname{div}(hu) \, dxdt = \int_Q uh \nabla p \chi_\delta \, dxdt$, il vient :

$$\begin{aligned}
 T_1 &= \int_\Omega p(0)h(0) \, dx + \int_Q p \frac{\partial \chi_\delta}{\partial t} h \, dxdt + \int_Q \left((\nabla p)^2 + \nabla p \operatorname{Rot} q \right) \chi_\delta h \, dxdt \\
 &= \int_\Omega p(0)h(0) \, dx + T_{1,1} + T_{1,2}.
 \end{aligned}$$

Estimons $T_{1,1}$ et $T_{1,2}$. On introduit les espaces de Orlicz $L_{\mathcal{A}}(\Omega)$, $L_{\mathcal{A}'}(\Omega)$ et $L_{\hat{\mathcal{A}}'}(\Omega)$ où \mathcal{A} est la N-fonction définie par $\mathcal{A}(x) = \exp(x^2) - 1$ et \mathcal{A}' est la N-fonction complémentaire à \mathcal{A} , équivalente à la N-fonction $\hat{\mathcal{A}}'$ définie par $\hat{\mathcal{A}}'(x) = x \sqrt{\log^+(x)}$. On obtient, en utilisant le fait que $\|p\|_{L_{\mathcal{A}}(\Omega)} \leq k \|u\|_{L^2(\Omega)}$:

$$T_{1,1} \leq 2 \int_0^T \left| \frac{\partial \chi_\delta}{\partial t} \right| \|p\|_{L_{\mathcal{A}}(\Omega)} \|h\|_{L_{\mathcal{A}'}(\Omega)} \leq C \int_0^T \left| \frac{\partial \chi_\delta}{\partial t} \right| \|u\|_{L^2(\Omega)} \left(\int_\Omega \hat{\mathcal{A}}'(h) \, dx + 1 \right) dt.$$

Ainsi, en utilisant la formule de Young, on parvient à :

SOLUTIONS APPROCHÉES D'UN PROBLÈME DE TSUNAMI

$$T_{1,1} \leq C\epsilon \int_0^T \left| \frac{\partial \chi_\delta}{\partial t} \right| \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \frac{C}{2\epsilon} \int_0^T \left| \frac{\partial \chi_\delta}{\partial t} \right| \left\{ 1 + \left(\int_\Omega \sqrt{h^2 \log^+ h} dx \right)^2 \right\} dt$$

avec $\left(\int_\Omega \sqrt{h^2 \log^+ h} dx \right)^2 \leq \|h_0\|_{L^1(\Omega)} \|h \log^+ h\|_{L^1(\Omega)}$ grâce à l'équation $(\mathcal{F})_2$ qui donne $\int_\Omega h dx = \int_\Omega h_0 dx$. Finalement, comme $\frac{\partial \chi_\delta}{\partial t} = 0$ pour $t \in [0, T - \delta[$ et $\frac{\partial \chi_\delta}{\partial t} = -\frac{1}{\delta}$ pour $t \in [T - \delta, T]$, on obtient :

$$T_{1,1} \leq C\epsilon \|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 dt + \frac{C}{2\epsilon} \left\{ 1 + \|h_0\|_{L^1(\Omega)} \sup_\tau \int_\Omega h(\tau) \log^+ h(\tau) dx \right\}.$$

Pour estimer $T_{1,2}$, on utilise successivement les inégalités de Hölder et de Gagliardo-Nirenberg :

$$T_{1,2} \leq \frac{1}{2} \int_Q \chi_\delta h^2 dx dt + C' \int_0^T \|\nabla p\|_{L^2(\Omega)} (\|\nabla p\|_{L^2(\Omega)} + \|\text{Rot} q\|_{L^2(\Omega)}) \|u\|_V^2 dt.$$

Enfin, puisque $L^2(\Omega) = \nabla H^1(\Omega) \oplus H_0(\text{div} 0, \Omega)$, alors $\|\text{Rot} q\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{L^2(\Omega)}$ et $\|\nabla p\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{L^2(\Omega)}$. Ainsi, on peut remplacer $\text{Rot} q$ et ∇p par u dans le dernier terme de $T_{1,2}$. Passons à l'estimation des autres termes de (2.3). Sans plus de détails, on montre que

$$T_2 \leq \frac{1}{4} \int_Q \chi_\delta h^2 dx dt + C'' \|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 \|u\|_{L^2(0,T;V)}^2$$

$$T_3 \leq A \int_\Omega h_0 \log h_0 + 1 - h_0 dx$$

$$T_4 + T_5 \leq C[h(0)] + \frac{g}{4} \int_Q \chi_\delta h^2 dx dt + C''' \int_0^T \|d\|_{H_0^2(\Omega)}^2 dt.$$

En appliquant les estimations sur les T_i ($1 \leq i \leq 5$) à (2.3) on obtient (2.2) en faisant tendre δ vers 0.

Lemme 2.2: *On note C_1, C_2 et C_3 des constantes dépendant uniquement des données. Sous les hypothèses du lemme 2.1 et si $u_0 \in L^2(\Omega)$, $d_0 \in H_0^1(\Omega)$, $d_1 \in H_0^2(\Omega)$ alors u, d et h vérifient l'estimation :*

$$\begin{aligned} & \|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 + G(u) \|u\|_{L^2(0,T;V)}^2 + \left(g - \epsilon^{-1} \|h_0\|_{L^1(\Omega)} \right) \sup_\tau \int_\Omega h(\tau) \log^+ h(\tau) dx \\ & + \sup_\tau \int_\Omega h(\tau) \log^- h(\tau) dx + y(t) + \|h\|_{L^2(Q)}^2 \leq k_1 + k_2 \int_0^t y(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.4)$$

où $G(u) = C_1 - C_2 \|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} - C_3 \|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2$ et $y(t) = \left\| \frac{\partial d}{\partial t}(t) \right\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|\Delta d(t)\|_{L^2(\Omega)}^2$.

Éléments de démonstration. — En multipliant l'équation de conservation de la quantité de mouvement par u et en intégrant sur Ω , il vient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + A \|u\|_V^2 + g \frac{d}{dt} \left[\int_{\Omega} h \log h - h + 1 \, dx \right] \\ = \frac{1}{2} \int_{\Omega} u^2 \operatorname{div} u \, dx + g \int_{\Omega} d \operatorname{div} u \, dx, \end{aligned}$$

où avec les inégalités de Gagliardo-Nirenberg, $\frac{1}{2} \int_{\Omega} u^2 \operatorname{div} u \, dx \leq \frac{C}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_V^2$ et avec les inégalités de Young et de Poincaré, $g \int_{\Omega} d \operatorname{div} u \, dx \leq \epsilon \|u\|_V^2 + \frac{C}{\epsilon} \|d\|_{H_0^2(\Omega)}^2$. En outre, en multipliant l'équation de plaque par $\frac{\partial d}{\partial t}$ et en intégrant sur Q , on montre que :

$$y(t) \leq C' + g \int_Q h \frac{\partial d}{\partial t} \, dx dt \leq C' + \epsilon g \|h\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{C''}{\epsilon} \int_0^T \left\| \frac{\partial d}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \, dt.$$

Enfinement, en sommant (2.2) obtenu au lemme (2.1), (2.5) et (2.6) on obtient (2.4).

Théorème 2.3: *Sous les hypothèses des lemmes 2.1 et 2.2, et si les données vérifient les conditions*

$$\begin{aligned} \|u_0\|_{L^2(\Omega)} &< \theta \\ k_3 &= \theta \frac{C_2 + \sqrt{C_2^2 + 4C_1C_3}}{2C_3}, \\ k_1 + Tk_1k_2 \exp(k_2T) &< \theta^2 k_3^2, \quad \|h_0\|_{L^1(\Omega)} < k_4 \end{aligned}$$

où $\theta \in (0, 1)$ et k_1, k_2, k_3, k_4 dépendent des données, alors $G(u) > 0$ et le problème admet une solution (u, h, d) telle que $u \in C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; V)$, $h \in L^2(Q)$, $h \log h \in L^\infty(0, T; L^1(\Omega))$, $d \in W^{1,\infty}(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H_0^2(\Omega))$ et $\|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} < \theta k_3$.

Éléments de démonstration. — On peut appliquer le lemme de Gronwall à (2.4) et obtenir les estimations annoncées si $\|h_0\|_{L^1(\Omega)} \leq \epsilon g = k_4$ et $G(u) > 0$.

SOLUTIONS APPROCHÉES D'UN PROBLÈME DE TSUNAMI

Cette dernière condition n'est vérifiée que si $\|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq k_3$. Pour montrer ce point, on utilise les conditions sur les données. Puisqu'en dimension finie u est continue de $[0, T]$ dans $L^2(\Omega)$ et que $\|u_0\|_{L^2(\Omega)} \leq \theta k_3$ avec $\theta \in (0, 1)$, il existe alors un temps $t_1 \leq T$ tel que $\|u(t_1)\|_{L^2(\Omega)} \leq \theta k_3$. Par conséquent, pour tout $t \in [0, t_1]$, $G(u)$ est positif et (2.4) donne $y(t) \leq k_1 + k_2 \int_0^t y(\tau) d\tau$ ce qui avec le lemme de Gronwall conduit à $y(t) \leq k_1 \exp(k_2 T)$. Le membre de droite de (2.4) peut alors être estimé par $k_1 + Tk_1 k_2 \exp(k_2 T)$ qui est strictement inférieur à $\theta^2 k_3^2$. En notant t_2 le plus petit temps tel que $\|u(t_2)\|_{L^2(\Omega)} = \theta k_3$, l'estimation (2.4) écrite pour $t = t_2$ conduit à la contradiction $\theta^2 k_3^2 \leq k_1 + Tk_1 k_2 \exp(k_2 T) < \theta^2 k_3^2$. Ainsi $\|u(t)\|_{L^2(\Omega)} < \theta k_3$ pour tout $t \in [0, T]$ et $G(u) > 0$ ce qui permet de conclure.

Puisque $u \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$, $h \in L^2(Q)$, $uh \in L^1(Q)$, $\frac{\partial h}{\partial t} = -\operatorname{div}(hu) \in L^1(0, T; W^{-1,1}(\Omega))$ et d'autre part $\|u - u(\cdot + \zeta, t)\|_{L^2(Q)} \rightarrow 0$ quand $|\zeta|$ tend vers 0 car $u \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$, on peut passer à la limite au sens des distributions dans le terme hu en utilisant le lemme 5.1 p.12 de [6]. On utilisera encore ce lemme pour passer à la limite dans le terme non linéaire $(u \cdot \nabla)u$ en remarquant que $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^{4/3}(0, T; W^{-1,4/3}(\Omega))$.

Pour construire des solutions approchées vérifiant les estimations, on utilise un point fixe bien adapté à la résolution numérique de ce problème. Soit $\{\phi_n\}$ une base régulière de V et V_n l'ensemble des combinaisons des n premières fonctions $\phi_i \in H^4(\Omega)$ de cette base. Grâce à la régularité de cette base, les espaces $L^2(0, t; V_n)$ et $L^2(0, t; V_n \cap W^{1,\infty}(\Omega))$ sont algébriquement et topologiquement identiques. On fixe $u_n = u_n^* \in X = L^2(0, t; V_n)$ dans l'équation de continuité que l'on résout avec la méthode des caractéristiques de ce qui permet de conserver la positivité de h_n . On obtient l'estimation $\|h_n\|_{L^\infty(0,t;L^2(\Omega))}^2 \leq C \exp(\int_0^t \|u_n^*\|_{V_n \cap W^{1,\infty}(\Omega)} dt)$. On résout ensuite l'équation de plaque avec la méthode de Galerkin ce qui donne d_n et grâce à l'estimation précédente on a $y_n(t) \leq C' + C'' t^2 \exp(t^{1/2} \|u_n^*\|_{L^2(0,t;V_n \cap W^{1,\infty}(\Omega))})$. Enfin, toujours avec Galerkin, on résout l'équation de conservation de la quantité de mouvement et on obtient l'estimation $\|u_n\|_X^2 \leq C''' + C'''' t^2 (1 + t^2) \exp(t^{1/2} \|u_n^*\|_X)$ où C''' dépend des données. L'opérateur $\Pi : u_n^* \in X \mapsto u_n \in X$ est donc une application continue et on peut toujours choisir un R et un t tels que si $\|u_n^*\|_X < R$ alors $\|u_n\|_X < R$. Ainsi Π envoie la boule $B(0, R)$ de X dans elle même ce qui permet d'appliquer le théorème de point fixe de Schauder [12]. Les solutions ont été construites pour un t qui peut être petit mais on peut prolonger à T grâce aux estimations.

3 Approximation numérique

Lorsqu'il se produit en haute mer, où la profondeur est importante, le tsunami présente une hauteur de vague de faible amplitude (quelques centimètres tout au plus) et une très grande longueur d'onde. C'est en se rapprochant des côtes que la longueur d'onde diminue et que l'amplitude s'accroît. Pour certaines configurations particulières du fond, le front de vague peut converger vers un point sur lequel l'amplitude devient très grande (plusieurs dizaines de mètres). Les conséquences peuvent alors être désastreuses pour les populations et les infrastructures présentes sur le littoral.

3.1 Caractéristiques des calculs

Le domaine d'étude idéalisé que nous considérons est un domaine carré d'un millier de kilomètres de côté dont le centre est également le centre du repère de coordonnées. La remontée du fond liée au plateau continental est représentée par une marche située entre 100 et 200 kilomètres du littoral situé du côté droit du carré (i.e. du côté des x positifs, le côté est). La haute mer correspond à une profondeur de 1000 mètres alors que le plateau continental est située à une profondeur de 100 mètres. Cette bathymétrie est supposée ne dépendre que de x (constante suivant y). Elle est donnée par la fonction

$$\begin{cases} 1000 & \text{si } x \leq 300 \text{ km} \\ 1000 - (x - 300000) * 9/1000 & \text{si } 300 \leq x \leq 400 \text{ km} \\ 100 & \text{si } x \geq 400 \text{ km} \end{cases} \quad (3.5)$$

La pente de la marche permettant d'accéder au plateau continental est relativement faible (de l'ordre de 0.9%) ce qui va engendrer une relativement faible amplitude du tsunami. Cependant, pour des raisons de coût de calcul, il n'a pas été possible d'augmenter cette pente.

SOLUTIONS APPROCHÉES D'UN PROBLÈME DE TSUNAMI

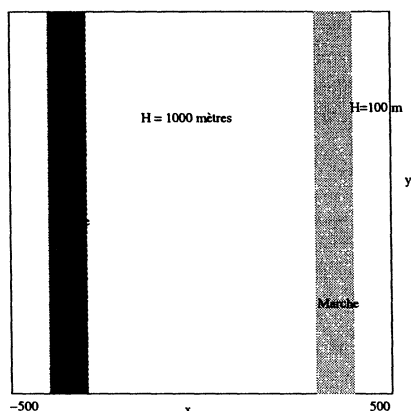


FIG. 1 – Représentation du domaine idéalisé

La présence de la pente ne permet pas d'utiliser le modèle de plaque proposé sur la totalité du domaine. Nous avons donc considéré un modèle de plaque uniquement sur une partie du domaine consistant en une bande d'une largeur de 100 kilomètres et d'une longueur de 1000 kilomètres, située à une distance de 100 kilomètres de la limite gauche du domaine (cf figure 1).

La méthode numérique de résolution du problème d'écoulement fluide est basée sur une méthode de Galerkin utilisant une base spéciale que l'on ne détaillera pas (voir par exemple [7, 8]) couplée à une méthode de caractéristiques pour la hauteur d'eau. L'équation de plaque est également résolue par une méthode de Galerkin en construisant une base de $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ vérifiant

$$\begin{cases} \Delta^2 \varphi = \lambda \varphi & \text{dans } \Omega \\ \varphi = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ \Delta \varphi = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.6)$$

Dans le cas de cette géométrie simplifiée, les bases utilisées sont accessibles analytiquement, ce qui évite d'avoir recours à un module de calcul par éléments finis.

Afin d'avoir une simulation donnant des résultats interprétables, nous avons utilisé l'équation de plaque avec les propriétés physiques de la croûte terrestre. Ceci nous a conduit à utiliser les paramètres suivants : un module de Young de 2.6×10^{10} , un nombre de Poisson de 0.3, une masse volumique de 2.8×10^3 et une épaisseur de 5000 mètres. Le schéma de résolution numérique est basé sur une méthode de point fixe similaire à celle utilisée lors de

la construction formelle des solutions approchées (expliquée dans la démonstration du théorème d'existence 2.3).

3.2 Résultats et Discussion

Nous avons représenté le profil de l'onde de surface à différents instants, correspondant à 1200, 1400 et 1600 secondes. En effet, l'onde se déplaçant à une vitesse de l'ordre de \sqrt{gh} , sa vitesse en haute mer est de l'ordre de 100 m.s^{-1} . Elle aura donc parcouru environ 120 kilomètres au bout des 1200 premières secondes. Notons que par la suite, la hauteur d'eau diminuant fortement, la vitesse de l'onde diminue aussi pour atteindre l'ordre de 30 m.s^{-1} sur le plateau continental. Sur la figure 2 nous apercevons le déplacement

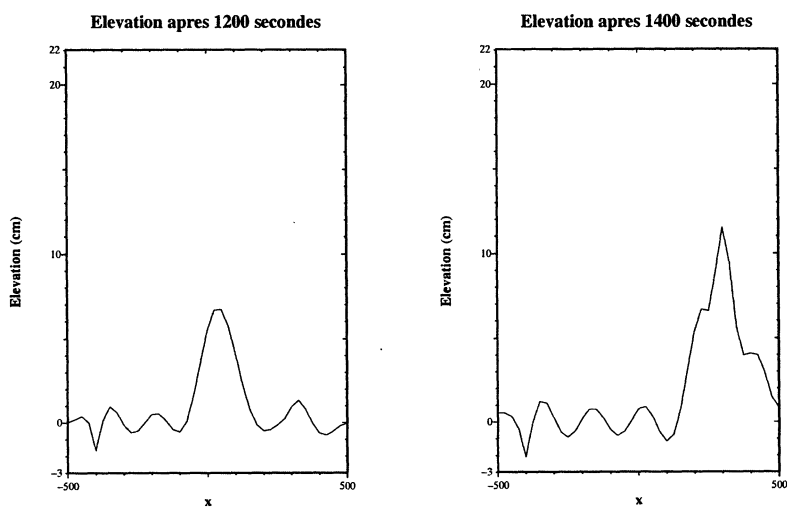


FIG. 2 – Représentation de l'élévation en fonction de x

de la vague au large et à l'approche du plateau continental. Nous notons en parallèle à la vague principale la présence de plusieurs autres vagues de moindre amplitude. Celles qui apparaissent derrière la vague principale proviennent d'une part du fait que la plaque continue à osciller après la première excitation et d'autre part par un retour de l'onde réfléchié par la "frontière ouest" du domaine.

SOLUTIONS APPROCHÉES D'UN PROBLÈME DE TSUNAMI

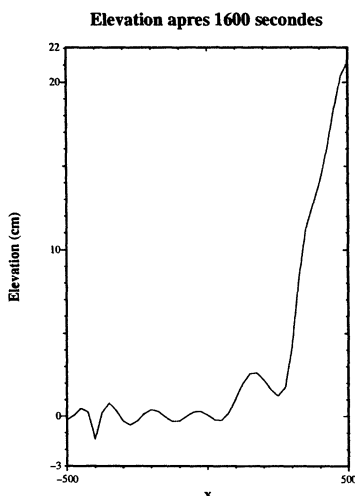


FIG. 3 – Représentation de l'élévation en fonction de x

La figure 3 montre la hauteur de vague lorsque celle-ci s'écrase sur la "côte ouest". Sa hauteur a triplé par rapport à la hauteur d'origine. Cette hauteur de vague est encore très faible pour engendrer des catastrophes importantes sur la côte et une géométrie plus élaborée de la bathymétrie devrait permettre d'obtenir des résultats plus convainquants. Cependant, la complexité du front de vague qui perd sa géométrie monodimensionnelle et les différentes réflexions de cette vague sur la côte rendent alors les résultats des simulations plus délicats à interpréter.

En conclusion, le modèle présenté dans ce document est une première approche de ce que pourrait être un modèle couplé océan-croûte terrestre. De nombreux perfectionnements sont envisagés, citons par exemple l'utilisation d'un modèle élastique plus complet pour représenter la croûte terrestre, l'utilisation d'un modèle hydrodynamique tridimensionnel pour l'océan. Il serait également intéressant de prendre en compte des conditions aux limites absorbantes ou semi-absorbantes pour éviter les multiples réflexions non physiques sur les frontières du domaine.

Références

- [1] F.J. Chatelon, M.L. Munõz, et P. Orensa. On a bi-layer shallow water

- problem. *preprint*, 2002.
- [2] F.J. Chatelon et P. Oregna. Some smoothness and uniqueness results for a shallow water problem. *Adv.Diff.Eq*, 3, 1998.
 - [3] B. Di Martino et al. Analyse d'un problème de tsunamis. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 334:1–6, 2002.
 - [4] A.V. Kazhikhov. Some new statements for initial boundary value problems for Navier-Stokes equations of viscous gas. In *Progress in theoretical and computational fluid mechanics*, ed. G.P. Galdi, J. Malek and J. Necas, Pitman Research Notes in Mathematics Series 308, pages 33–72. Longman, 1994.
 - [5] R. Lewandowski. *Analyse mathématique et océanographie*. Masson, 1997.
 - [6] P.L Lions. *Mathematical Topics in Fluid Mechanics, Compressible models*, volume 2. Oxford Science Publications, 1998.
 - [7] B. Di Martino, F.J. Chatelon, et P. Oregna. The nonlinear Galerkin's method applied to the shallow water equations. *M³AS*, 9(6):825–854, 1999.
 - [8] P. Oregna. Construction d'une base spéciale pour la résolution de quelques problèmes d'océanographie physique en dimension deux. *CRAS*, 314:587–590, 1992.
 - [9] P. Oregna. Un théorème d'existence de solutions d'un problème de shallow water. *Arch. Rational Mach. Anal.*, 130:183–204, 1995.
 - [10] J. Pedlosky. *Geophysical Fluid Dynamics*. Springer, 1987.
 - [11] S Tinti, E. Bertolucci, et C. Chiavettieri. *Zap. Nauchn. Sem. Pure Appl. Geophys.*, 158:759–797, 2001.
 - [12] E. Zeidler. Applied Functional Analysis. In *Applications to Mathematical Physics*, volume 108 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, 1995.

