ANNALES MATHÉMATIQUES BLAISE PASCAL

THIERRY COLIN

Modèles stratifiés en mécanique des fluides géophysiques

Annales mathématiques Blaise Pascal, tome 9, nº 2 (2002), p. 229-243
<http://www.numdam.org/item?id=AMBP_2002__9_2_229_0>

ANNALES MATHEMATIQUES BLAISE PASCAL 9, 229-243 (2002)

Modèles stratifiés en mécanique des fluides géophysiques

Thierry Colin

Résumé

Nous montrons dans ce papier comment nous pouvons justifier mathématiquement un certain nombres de phénomènes en mécanique des fluides géophysiques à partir de modèles formés de superpositions de couches bidimensionnelles. Nous étudions la relation de sverdrup ainsi que le passage à une stratification continue.

1 Introduction.

Dans ce papier, nous nous plaçons dans le cadre général de la mécanique des fluides géophysiques. Le but est de montrer quels résultats mathématiques on peut atteindre en utilisant des modèles à base de couches bidimensionnelles. Plus précisément, afin de décrire des mouvements de grandes échelles de l'atmosphère ou des océans, on considère un fluide formé d'une superposition de couches bidimensionnelles rigides de densités différentes et interagissant entre elles. Dans cette description, nous tiendrons compte des élements essentiels dans ce cadre, à savoir: la force de Coriolis, les contraintes extérieures (comme le vent par exemple pour l'océan) et les effets de stratification. Nous allons nous restreindre ici aux applications à l'océan. Nous allons tout d'abord considérer les cas d'une seule couche de fluide (section 2). Nous rappellerons comment obtenir le modèle 2 -D quasi-géostrophique (c'est le modèle à une couche!) puis nous montrerons comment à partir de ce modèle on peut justifier la relation de Sverdrup et l'intensification des courants sur les bords ouests. Ensuite dans la section 3, nous considérons un modèle à n couches et nous expliquerons comment parvenir rigoureusement à une stratification continue en faisant tendre n vers l'infini (et l'épaisseur des couches vers 0) et en obtenant un modèle 3-D. Finalement, nous concluerons dans la section 4 par quelques considérations sur les instabilités pour les

modèles à deux couches.
D'un point de vue bibliographique, la principale source du point de vue mécanique des fluides géophysiques est le livre de J. Pedlosky [18]. D'un point de vue mathématique, les travaux de J.-L. Lions, R. Temam et S. Wang présentent un ensemble de résultats sur des modèles relativement complets ([14, 15, 17, 16] par exemple). Les références concernant les travaux plus ciblé pour chacun des thèmes développés seront données dans chaque partie.

2 Modèles 2-D et relation de Sverdrup.

2.1 Obtention du modèle 2-D.

Le point de départ est un modèle en dimension 3 d'espace. Il s'agit des équations de Navier-Stokes décrivant l'évolution d'un fluide visqueux incompressible à surface libre soumis à la force de Coriolis dans l'approximation du plan β et soumis également au vent. Le domaine occupé est $(x, y) \in \Omega_0 \subset \mathbb{R}^2$, $z \in [h_B(x, y), h(t, x, y)]$ où h_B décrit la topographie et h la surface libre. Nous noterons $\Omega(t)$ ce domaine. Ces équations s'écrivent de la façon suivante ([14, 18]).

Dans le domaine $\Omega(t)$, en notant $U = (u, v, w)$ le champ de vitesse

$$\partial_t U + U \cdot \nabla U + \begin{pmatrix} -(f_0 + \beta y)v \\ (f_0 + \beta y)u \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + A_v \partial_z^2 U + A_H \Delta_H U, \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot U = 0, \quad (2.2)$$

où p désigne la pression. Les constantes f_0 et β sont les paramètres décrivant la force de Coriolis et A_v et A_H sont les coefficients de viscosités respectivement verticaux et horizontaux. ρ est la densité supposée constante.
Au fond, on écrit:

$$U = 0 \text{ en } z = h_B(x, y). \quad (2.3)$$

A la surface libre $z = h(x, y, t)$:

$$p = cst, \ w = \partial_t h + u\partial_x h + v\partial_y h. \quad (2.4)$$

L'influence du vent est donnée par:

$$\begin{aligned} \tau^{(x)} &= \rho A_v \partial_z u + \rho A_H \partial_x w, \\ \tau^{(y)} &= \rho A_v \partial_z v + \rho A_H \partial_y w, \\ \tau^{(z)} &= \rho A_H (\partial_x v + \partial_y u), \end{aligned} \tag{2.5}$$

où τ est le tenseur des contraintes dues au vent. C'est une donnée dans ce cadre. On effectue ensuite un développement asymptotique. Pour cela on introduit un petit paramètre ε et on fait l'hypothèse que $f_0 = O(\frac{1}{\varepsilon})$, $A_V = O(\varepsilon)$, que l'on simplifie en

$$f_0 = \frac{1}{\varepsilon} \text{ et } A_V = \varepsilon.$$

On fait ensuite l'Ansatz suivante:

$$\begin{aligned} u = u_0 + \varepsilon u_1 + \cdots, \quad & v = v_0 + \varepsilon v_1 + \cdots, \\ p = p_0 + \varepsilon p_1 + \cdots, \quad & w = \varepsilon w_1 + \cdots \end{aligned} \tag{2.6}$$

L'ordre $\frac{1}{\varepsilon}$ dans (2.1) donne alors

$$0 = \partial_z p_0, \; u_0 = -\partial_y p_0, \; v_0 = -\partial_x p_0.$$

On obtient donc une solution indépendante de z. Il y a donc forcément des couches limites à calculer [18]. En continuant les calculs on obtient [18], [8]:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(\zeta_0 + \beta y - F p_0 + \eta_B) = \mathbf{k} \cdot curl \tau - \frac{r}{2}\zeta_0 + \frac{1}{R_e}\Delta\zeta_0, \\ &u_0 = -\partial_y p_0, \; v_0 = -\partial_x p_0, \; \zeta_0 = \partial_x v_0 - \partial_y u_0 = \Delta p_0, \end{aligned} \tag{2.7}$$

où

$$\frac{d}{dt} = \partial_t + u_0 \partial_x + v_0 \partial_y.$$

Faisons un commentaire sur l'origine de chaque terme:
i) βy est le second terme dans le développement de la force de Coriolis.
ii) $-F p_0$ est dû à la surface libre.
iii) $-\frac{r}{2}\zeta_0$ est dû à la couche d'Ekman au fond.

iv) $\frac{1}{R_e}\Delta\zeta_0$ provient de la viscosité horizontale.
v) $\mathbf{k}\cdot curl\tau$ est finalement le terme dû au vent.
Les constantes s'écrivent en fonctions des paramètres initiaux. La justification de ce modèle est un problème ouvert à cause de la surface libre. Néanmoins, si on se ramène (formellement) au cas d'une surface plate, alors ce modèle peut être justifié. Le travail le plus complet est sans doute celui de Desjardins-Grenier [11]. On peut aussi citer [10], [13]. Pour des justification avec des données initiales qui ne sont pas presque 2 D, et pour des domaines génériques [1], [12]. Pour l'aspect couche mince, voir [20]. Pour les applications aux lacs, voir les travaux de Bresch, Lemoine et Simon [6].

La méthode de démonstration est classique : on construit une solution approchée avec une partie intérieure et une partie couche limite puis on effectue des estimations d'énergie.

2.2 La relation de Sverdrup.

Afin d'obtenir la relation de Sverdrup, nous allons considérer l'équation (2.7) en stationnaire. Nous allons également forcer les coefficients à décrire l'équilibre entre le deuxième terme de la force de Coriolis et le vent. Afin de respecter les habitudes utilisées dans les ouvrages de géophysique, nous écrivons le système avec les notations suivantes:

$$\frac{\delta_I^2}{L^2}J(\psi,\Delta\psi+\eta_B)+\partial_x\psi=\mathbf{k}\cdot curl\tau-\frac{\delta_S}{L}\Delta\psi+\frac{\delta_M^3}{L^3}\Delta^2\psi, \tag{2.8}$$

où $\frac{\delta_I}{L}$, $\frac{\delta_M}{L}$, $\frac{\delta_S}{L}$ tendent vers 0.

La limite formelle est bien entendu:

$$\partial_x\psi=\mathbf{k}\cdot curl\tau, \tag{2.9}$$

qui est la relation de Sverdrup. La question est de savoir quelles conditions aux limites prendre pour (2.8) et ce qui en restera pour (2.9). La réponse n'est pas claire d'un point de vue physique. Nous choisissons ici de travailler pour $x\in[0,1]$, avec de la périodicité en y. On impose alors pour (2.8) ψ et $\nabla\psi$ égales à 0 pour $x=0,1$.

Dans [2], le cas δ_I et δ_S fixé est analysé. Nous allons rappeler ici les conclusions de [8, 4].

Théorème 2.1: *[8] Si $\delta_I \sim \delta_S$ et $\frac{\delta_I}{L} << (\frac{\delta_M}{L})^{(3/2)}$ alors*

$$\int \psi^2 + \frac{\delta_S}{L} \int |\nabla \psi|^2 + \left(\frac{\delta_M}{L}\right)^3 \int |\Delta \psi|^2 \leq C$$

et

$$\psi \rightharpoonup \psi_0 \text{ dans } L^2$$

où

$$\partial_x \psi_0 = \mathbf{k} \cdot curl \tau.$$

PREUVE: 1. On multiplie (2.8) par ψ:

$$0 = \int \mathbf{k} \cdot curl \tau + \frac{\delta_S}{L} \int |\nabla \psi|^2 + \left(\frac{\delta_M}{L}\right)^3 \int |\Delta \psi|^2, \tag{2.10}$$

qui ne donne aucune borne directe, mais nous l'utiliserons pour le contrôle des termes non linéaires.
2. Nous multiplions (2.8) par ψe^x. Le point fondamental est que

$$\int \partial_x \psi e^x \psi = -\frac{1}{2} \int e^x \psi^2. \tag{2.11}$$

Les autres termes apportent aussi des contributions, mais grâce à (2.10) et à la condition sur δ_I, on arrive à obtenir la borne du théorème. □

Ce résultat peut être complété afin de traiter le problème des conditions aux limites.

Théorème 2.2: *[8] Si $\frac{\delta_I}{L} << (\frac{\delta_M}{L})^\alpha$ (pour un $\alpha > 0$) alors*

$$\psi \to \psi_0 \text{ dans } L^2_{loc}((0,1] \times S^1)$$

et $\psi_0 = 0$ en $x = 1$.

PREUVE: Le point clé est de multiplier (2.8) par $\partial_x \psi \varphi$ avec φ s'annulant au voisinage de $x = 0$ afin d'éliminer les termes de bord provenant des intégrations par parties et ayant le mauvais signe.

□

Les restrictions sur les tailles des différents δ ne sont certainement pas optimales. En particulier, elles sont plus fortes que celle imposée dans [18]. Dans l'état actuel, on ne sait pas faire autrement pour traiter les termes non linéaires.
Des améliorations peuvent être apportées [4]:
i) Pour des conditions aux limites mêlées: si on décompose la frontière de l'ouvert en $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ et si on considère

$$\psi = 0 \text{ sur la frontière et } \Delta\psi = 0 \text{ sur } \Gamma_1,\ \nabla\psi = 0 \text{ sur } \Gamma_2.$$

alors $\left(\frac{\delta_I}{L}\right)^2 << (\frac{\delta_M}{L})^3$ donne le résultat.
ii) Si de plus $\Gamma_2 = \emptyset$ alors $\left(\frac{\delta_I}{L}\right)^2 << (\frac{\delta_S}{L})^3$ donne le résultat, indépendament de δ_M.
iii) Avec $\frac{\partial}{\partial n}\Delta\psi = 0$, on arrive à traiter le cas linéaire.
iv) Notons que le cas des îles est fait dans [5]. Il faut alors apporter une correction à la relation de Sverdrup.

3 Modèles à n couches.

3.1 Le système.

On considère ici la superposition de couches (de densités différentes) décrites dans la section précédente. Nous utilisons de nouveau [18]. On écrit la conservation de la vorticité potentielle dans chaque couche dans le cadre de l'approximation du plan β. On suppose que toutes les couches ont la même épaisseur D_0 et on note ρ_l la dentité dans la couche l, $l = 1, ..., n$.
Le système s'écrit alors:

$$\left\{ \begin{array}{c} (\frac{\partial}{\partial t} + u_l \frac{\partial}{\partial x} + v_l \frac{\partial}{\partial y})\zeta_l = -av_l,\ l = 1 \text{ à } n, \\ \\ u_l = -\frac{\partial \psi_l}{\partial y},\ v_l = \frac{\partial \psi_l}{\partial x}, \end{array} \right. \tag{3.12}$$

avec

$$
\left\{
\begin{array}{lcl}
\zeta_1 & = & \Delta_{x,y}\psi_1 + f_{r1,2}(\psi_2 - \psi_1), \\
\zeta_l & = & \Delta_{x,y}\psi_l - f_{rl,1}(\psi_l - \psi_{l-1}) + f_{rl,2}(\psi_{l+1} - \psi_l), \\
 & & 2 \leq l \leq n-1, \\
\zeta_n & = & \Delta_{x,y}\psi_n - f_{rn,1}(\psi_n - \psi_{n-1}),
\end{array}
\right. \tag{3.13}
$$

où

$$
f_{rl,1} = \frac{DF}{D_0}\frac{\rho_0}{\rho_l - \rho_{l-1}},
$$

et

$$
f_{rl,2} = \frac{DF}{D_0}\frac{\rho_0}{\rho_{l+1} - \rho_l}
$$

sont des paramètres.
(u_l, v_l) est la vitesse dans la couche l.
Toutes les fonctions ne dépendent que de x et y (les coordonnées horizontales et du temps t.
ψ_l est en fait la pression à l'interieur de la couche l.
ρ_0 est une taille caractéristique de la densité du fluide; c'est une constante.
$F = \frac{f_0^2 L^2}{gD}$, et L (resp. D) est la taille caractéristique horizontale (resp. verticale) du fluide.
f_0 est le paramètre de Coriolis et g l'accélération de la gravité.
Nous introduisons alors les notations suivantes:

$$
\beta_l = \frac{DF\rho_0}{D_0(\rho_l - \rho_{l-1})}\varepsilon^2,
$$

où ε est un petit paramètre sans dimension.
La principale hypothèse que nous faisons est:

$$
\frac{1}{\delta} \geq \beta_l \geq \delta, \text{ pour } l = 2, ..., n,
$$

δ est un nombre positif fixé indépendant de n.
On a alors

$$
f_{rl,1} = \frac{1}{\varepsilon^2}\beta_l, \; f_{rl,2} = \frac{1}{\varepsilon^2}\beta_{l+1}.
$$

Avec ces nouvelles notations, le système (3.13) s'écrit:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \zeta_1 & = & \Delta_{x,y}\psi_1 + \dfrac{1}{\varepsilon^2}\beta_2(\psi_2 - \psi_1), \\ \zeta_l & = & \Delta_{x,y}\psi_l - \dfrac{1}{\varepsilon^2}\beta_l(\psi_l - \psi_{l-1}) + \dfrac{1}{\varepsilon^2}\beta_{l+1}(\psi_{l+1} - \psi_l), \\ & & 2 \leq l \leq n-1, \\ \zeta_n & = & \Delta_{x,y}\psi_n - \dfrac{1}{\varepsilon^2}\beta_n(\psi_n - \psi_{n-1}), \end{array}\right. \tag{3.14}$$

Le système "naturel" limite lorsque n tend vers $+\infty$ est alors le système quasi-géostrophique suivant:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\Delta_{x,y}\psi + \frac{\partial}{\partial z}\left(\beta(z)\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right) = -a\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{3.15}$$

z est une variable d'espace décrivant la verticale et la fonction $z \mapsto \beta(z)$ est proportionnelle à

$$\frac{1}{\frac{\partial\rho(z)}{\partial z}},$$

i.e. à l'inverse du carré de la fréquence de Brunt-Väisälä.

Cette équation (3.15) peut être obtenue rigoureusement à partir d'Euler ou de Navier-Stokes 3-D avec une température ([3], [7]).

Les deux questions que l'on se pose concernent l'existence de solutions à (3.12)-(3.14) et la justification du passage à la limite "naturel".

3.2 L'existence.

On a le résultat suivant:

Théorème 3.1: *Soit* $s > 2$ *et* $(\zeta_1^0, ..., \zeta_n^0) \in (H^s(\mathbf{T}^2))^n$ *tels que*

$$\sum_{l=1}^{n} \int_{\mathbf{T}^2} \zeta_l^0 = 0.$$

Alors il existe une unique solution

$$(\zeta_1, ...\zeta_n) \in (\mathcal{C}(\mathbf{R}^+, H^s(\mathbf{T}^2)))^n$$

et

$$((u_1, v_1), ..., (u_n, v_n)) \in (\mathcal{C}(\mathbf{R}^+, H^{s-1}(\mathbf{T}^2)))^{2n}$$

au système multicouche (3.12)-(3.14) telle que

$$(\zeta_1, ...\zeta_n)(t = 0) = (\zeta_1^0, ..., \zeta_n^0)$$

.

PREUVE: La preuve est essentiellement la même que pour le système d'Euler incompressible en dimension 2. □

En revanche, les bornes obtenues par cette démonstrations dépendent de n et ε. On ne peut donc pas effectuer le passage à la limite aussi simplement.

3.3 Le passage à la limite sur le nombre de couches.

On doit tout d'abord construire des fonctions dépendant d'une variable verticale z. Pour cela on introduit les fonctions de bases habituelles.

On note $\phi_j^\varepsilon(z)$ les fonctions définies sur$[0, 1]$ telles que:

$$\phi_1^\varepsilon(z) = 1 - \frac{z}{\varepsilon} \text{ si } 0 \leq z \leq \varepsilon, \text{ 0 ailleurs,}$$

$$\phi_i^\varepsilon(z) = 1 - \frac{|z - i\varepsilon|}{\varepsilon} \text{ si } z \in [(i-1)\varepsilon, (i+1)\varepsilon], \text{ 0 ailleurs,}$$

$$i = 2, ..., n-1,$$

$$\phi_n^\varepsilon(z) = 1 - \frac{1-z}{\varepsilon} \text{ si } z \in [1-\varepsilon, 1], \text{ 0 ailleurs,}$$

On fait alors les hypothèses suivantes:
1. $\varepsilon = \frac{1}{n-1}$.
2. Il existe une fonction régulière $\beta(z)$ telle que

$$\beta_l^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \int_{(l-2)\varepsilon}^{(l-1)\varepsilon} \beta(z) dz, \text{ pour } l = 2, ..., n.$$

Afin d'effectuer le passage à la limite, on doit construire 3 fonctions Ψ et 2 fonctions Z de la façon suivante.
1. La première fonction Ψ est une combinaison linéaire des fonctions ϕ_l^ε:

$$\Psi_1^\varepsilon(x,y,z,t) = \sum_{l=1}^{n} \psi_l^\varepsilon(x,y,t)\phi_l^\varepsilon(z).$$

2. La deuxième est constante par morceaux:

$$\Psi_2^\varepsilon(x,y,z,t) = \sum_{l=1}^{n-1} \psi_l^\varepsilon(x,y,t)\mathbf{1}_{[(l-1)\varepsilon, l\varepsilon[}(z),$$

où $\mathbf{1}_{[a,b]}(z)$ désigne la fonction indicatrice de l'intervalle $[a,b]$.
3. La troisème fonction est aussi une combinaison linéaire des fonctions ϕ_l^ε:

$$\Psi_3^\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} f_i^\varepsilon \phi_i^\varepsilon.$$

et est telle que Ψ_3^ε vérifie

$$\int_0^1 \Psi_3^\varepsilon(z)\phi_i^\varepsilon(z)dz = \varepsilon\psi_i^\varepsilon, \text{ pour tout } i = 1, ..., n.$$

De façon équivalente:

$$\int_0^1 \Psi_3^\varepsilon \phi_k^\varepsilon(z)dz = \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} f_i^\varepsilon \phi_i^\varepsilon(z)\phi_k^\varepsilon(z)dz = \varepsilon\psi_k^\varepsilon.$$

Les coefficients (f_i^ε) sont alors donnés par

$$\begin{pmatrix} \psi_1^\varepsilon \\ \dots \\ \psi_n^\varepsilon \end{pmatrix} = B_n \begin{pmatrix} f_1^\varepsilon \\ \dots \\ f_n^\varepsilon \end{pmatrix},$$

où

$$B_n = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & & & & \\ 1 & 4 & 1 & 0 & & 0 & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & & \\ & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & \\ & & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ & 0 & & 0 & 1 & 4 & 1 \\ & & & & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

est une matrice de masse.
Les fonctions Z sont construites comme suit.
1. La première fonction Z_1^ε est constante par morceaux:

$$Z_1^\varepsilon(x,y,z,t) = \sum_{l=1}^{n-1} \zeta_l^\varepsilon(x,y,t)\mathbf{1}_{[(l-1)\varepsilon, l\varepsilon[}(z).$$

2. La deuxième fonction $Z_2^\varepsilon(x,y,z,t)$ est définie de la même façon que Ψ_3^ε:

$$Z_2^\varepsilon(x,y,z,t) = \sum_{i=1}^{n} g_i^\varepsilon \phi_i^\varepsilon,$$

où les (g_i^ε) sont données par

$$\begin{pmatrix} \zeta_1^\varepsilon \\ \dots \\ \zeta_n^\varepsilon \end{pmatrix} = B_n \begin{pmatrix} g_1^\varepsilon \\ \dots \\ g_n^\varepsilon \end{pmatrix}.$$

Le système multicouche (3.12)-(3.14) s'écrit alors

$$\frac{\partial}{\partial t} Z_1^\varepsilon + \nabla.((U_2^\varepsilon, V_2^\varepsilon)(Z_1^\varepsilon + ay)) = 0, \tag{3.16}$$

et pour tout $k = 1, ..., n$:

$$\int_0^1 Z_2^\varepsilon \phi_k^\varepsilon(z)dz == \int_0^1 \Delta_{x,y}\Psi_3^\varepsilon(z)\phi_k^\varepsilon(z)dz - \int_0^1 \beta(z)\frac{\partial \Psi_1^\varepsilon}{\partial z}\frac{\partial \phi_k^\varepsilon}{\partial z}dz, \tag{3.17}$$

où

$$U_2^\varepsilon = -\frac{\partial \Psi_2^\varepsilon}{\partial y} \text{ et } V_2^\varepsilon = \frac{\partial \Psi_2^\varepsilon}{\partial x}. \tag{3.18}$$

Le résultat obtenu [9] est alors

Théorème 3.2: *Les suites Ψ_1^ε, Ψ_2^ε et Ψ_3^ε convergent vers la même limite Ψ qui est une solution de l'équation quasi-géostrophique (3.15).*

En fait les convergences ont lieu au sens suivant:
- $(U_2^\varepsilon, V_2^\varepsilon)$ converge dans $\mathcal{C}([0,T]; L^2)$ fortement.
- Z_1^ε et Z_2^ε convergent dans $L^p([0,T]; L^2)$ fortement, $p < +\infty$.
- Ψ_3^ε converge dans $L^\infty([0,T]; L^2)$ faiblement.
- $\nabla^\perp \Psi_3^\varepsilon$ converge dans $\mathcal{C}([0,T]; L^2)$ fortement et $L^\infty([0,T]; H^1)$ faiblement.

La démonstration est classique. On obtient des bornes indépendantes de n en se servant de (3.16). Les convergences obtenues sont alors suffisantes pour passer à la limite.

4 Extension: instabilité du modèle à 2 couches.

On considère le cas $n = 2$ que l'on écrit de la façon suivante:

$$\partial_t (\Delta\psi_1 + F(\psi_2 - \psi_1)) + J(\psi_1, \Delta\psi_1 + F(\psi_2 - \psi_1) + y\beta) = 0, \tag{4.19}$$

$$\partial_t (\Delta\psi_2 + F(\psi_1 - \psi_2)) + J(\psi_2, \Delta\psi_2 + F(\psi_1 - \psi_2) + y\beta) = 0 \tag{4.20}$$

où ψ_1 et ψ_2 désignent les fonctions courant correspondant aux couches 1 et 2 respectivement.

Pour la couche 1, on cherche la vitesse sous la forme $\begin{pmatrix} U_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ + perturbation,
et pour la couche 2, $\begin{pmatrix} U_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ + perturbation.

En remplaçant ψ_i par $\psi_i - U_i y$, $i = 1, 2$ dans (4.19)-(4.20), on obtient

$$\partial_t (\Delta\psi_1 + F(\psi_2 - \psi_1)) + J(\psi_1 - U_1 y,\ \Delta\psi_1 + F(\psi_2 - \psi_1) + y(\beta + F(U_1 - U_2))) = 0, \tag{4.21}$$

$$\partial_t (\Delta\psi_2 + F(\psi_1 - \psi_2)) + J(\psi_2 - U_2 y,\ \Delta\psi_2 + F(\psi_1 - \psi_2) + y(\beta + F(U_2 - U_1))) = 0. \tag{4.22}$$

On calcule alors la relation de dispersion associée au linéarisé autour de zéro. On cherche donc des ondes planes sous la forme

$$e^{i(kx - \omega t)} \sin(ny),$$

On obtient : • Si $U_1 - U_2 < \beta/F$, alors pour chaque k, n il existe deux solutions ω réelles.
• Si $U_1 - U_2 = \beta/F$, il existe k, n et une solution double ω.
• Si $U_1 - U_2 > \beta/F$, il existe un intervalle de valeurs de k et deux valeurs de ω strictement complexes conjuguées.

Dans le dernier cas, le linéarisé est évidement instable. Le cas limite est celui d'une valeur propre double. Dans ce cas, on a $\omega_1 = kU_2$ qui est toujours

solution.
La deuxième valeur est $\omega_2 = kU_2 + \frac{k\beta}{F}\frac{\Gamma^2-2}{(\Gamma+1)^2-1}$,
où
$$\Gamma = \frac{k^2+n^2}{F}.$$
De plus,
$$\omega_1 = \omega_2 \text{ quand } \Gamma^2 = 2.$$

Un problème intéressant serait de regarder la stabilité d'un paquet d'ondes dans ce cadre. Des calculs formels sont présentés dans [19].

Références

[1] A. Babin, A. Mahalov, et B. Nicolaenko. Regularity and integrability of 3d euler and navier-stokes equations for rotating fluids. *Asymptot. Anal.*, 15, no. 2: 103–150, 1997.

[2] V. Barcilon, P. Constantin, et E.S. Titi. Existence of solutions to the stommel-charney model of the gulf stream. *SIAM J. Math. Anal.*, 19, (6): , 1988.

[3] A.J. Bourgeois et J.T. Beale. Validity of the quasigeostrophic model for large scale flow in the atmosphere and ocean. *Jour. Math. Anal.*, 25, (4): 1023–1068, 1994.

[4] D. Bresch et T. Colin. Some remarks on the derivation of the sverdrup relation. *J. Math. Fluid Mech.*, 4 (2): 95–108, 2002.

[5] D. Bresch, F. Guillén-Gonzalez, et M.A. Rodriguez-Bellido. A corrector for the sverdrup solution for a domain with islands, to appear in. *Applicable Anal.*, 2002.

[6] D. Bresch, J. Lemoine, et J. Simon. Nonstationary models for shallow lakes. *Asymptot. Anal.*, 22 (1): 15–38, 2000.

[7] J.-Y. Chemin. A propos d'un problème de pénalisation de type antisymétrique. *J. Math. Pures Appl*, 9 (76): 739–755, 1997.

[8] T. Colin. Remarks on a homogeneous model of ocean circulation. *Asymptotic Anal.*, 12 (2): 153–168, 1996.

[9] T. Colin. The cauchy problem and the continuous limit for the multilayer model in geophysical fluid dynamics. *SIAM J. Math. Anal.*, 28 (3): 516–529, 1997.

[10] T. Colin et P. Fabrie. Rotating fluid at high rossby number driven by a surface stress: existence and convergence. *Adv. Differential Equations*, 2 (5): 715–751, 1997.

[11] B. Desjardins et E. Grenier. On the homogeneous model of wind-driven ocean circulation. *SIAM J. Appl. Math.*, 60: 43–60, 2000.

[12] I. Gallagher. The tridimensional navier-stokes equations with almost bidimensional data: stability, uniqueness, and life span. *Internat. Math. Res. Notices*, 18: 919–935, 1997.

[13] E. Grenier et N. Masmoudi. Ekman layers of rotating fluids, the case of well prepared initial data. *Comm. Partial Differential Equations*, 22, (5-6): 953–975, 1997.

[14] J.-L. Lions, R. Temam, et S. Wang. Models of the coupled atmosphere and ocean (cao i). *Computational Mechanics Advances*, 1: 5–54, 1993.

[15] J.-L. Lions, R. Temam, et S. Wang. Numerical analysis of the coupled atmosphere-ocean models (cao ii). *Computational Mechanics Advances*, 1: 55–119, 1993.

[16] J.-L. Lions, R. Temam, et S. Wang. Geostrophic asymptotics of the primitive equations of the atmosphere. *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, 4, (2): 253–287, 1994.

[17] J.-L. Lions, R. Temam, et S. Wang. Mathematical theory for the coupled atmosphere-ocean models (cao iii). *J. Math. Pures Appl.*, 9 (74): 105–163, 1995.

[18] J.K. Pedlosky. *Geophysical fluid dynamics.* Springer Verlag, second edition, 1987.

[19] B. Tan et R. Grimshaw. Solitary waves in a two-layer quasigeostrophic model with wind stress forcing. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynam*, 91, (3-4): 169–197, 1999.

[20] R. Temam et M. Ziane. Navier-stokes equations in three-dimensional thin domains with various boundary conditions. *Adv. Differential Equations*, 1, (4): 499–546, 1996.

Thierry Colin
Université Bordeaux I,
Lab. MAB, UMR 5466 CNRS,
351 cours de la libération,
33405 Talence Cedex,
France.
colin@math.u-bordeaux.fr