

DIDIER AUROUX

**Assimilation variationnelle de données océanographiques.  
Approches primale et duale**

*Annales mathématiques Blaise Pascal*, tome 9, n° 2 (2002), p. 147-159

[http://www.numdam.org/item?id=AMBP\\_2002\\_\\_9\\_2\\_147\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AMBP_2002__9_2_147_0)

© Annales mathématiques Blaise Pascal, 2002, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales mathématiques Blaise Pascal » (<http://math.univ-bpclermont.fr/ambp/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# Assimilation variationnelle de données océanographiques Approches primale et duale

Didier Auroux

## Résumé

L'assimilation variationnelle de données sert à estimer de façon optimale l'état initial d'un système à l'aide d'observations à différents instants. A partir de cette ébauche, on espère obtenir de bonnes prévisions de l'évolution future du système. La dimension du problème est telle que la prise en compte de l'erreur modèle est numériquement impossible. L'hypothèse d'un modèle parfait étant largement irréaliste, on introduit une méthode duale (dans un cadre pour l'instant strictement linéaire) permettant de prendre en compte de façon inhérente l'erreur modèle. On peut alors démontrer que les deux approches sont équivalentes lorsqu'on tient compte de l'erreur du modèle, mais seule l'approche duale permet de le faire en pratique, et généralement pour un coût de calcul inférieur à l'approche primale sans erreur modèle.

## 1 Introduction

La météorologie et l'océanographie sont souvent confrontées à l'étude de systèmes non-linéaires dont le comportement est chaotique et qui possèdent des attracteurs. Un des problèmes actuels est de prédire le comportement de ces systèmes (*exemple* : prévisions météo). Or la qualité de ces prévisions dépend largement de l'estimation de l'état initial à partir duquel sera calculée l'évolution future. La reconstitution de cet état initial peut être réalisée en utilisant les observations disponibles grâce à des techniques d'assimilation de données.

Une manière assez évidente de faire des prévisions serait d'intégrer les équations différentielles gérant le système considéré à partir des observations disponibles au temps présent, mais cette méthode n'est pas efficace puisque

les observations dont on dispose sont souvent biaisées, et le système est trop chaotique pour permettre d'obtenir des prévisions fiables.

Il y a principalement deux types de méthodes d'assimilation de données :

- l'assimilation séquentielle : le modèle est intégré dans le temps sur toute la période d'assimilation par une méthode du type prédicteur-correcteur, et à chaque nouvelle observation le modèle est corrigé à l'aide des nouvelles données. Ces algorithmes d'assimilation reposent sur le principe du filtre de Kalman.
- l'assimilation variationnelle : l'idée générale consiste à rechercher de façon explicite un état passé (datant du début de la période d'assimilation) dont la trajectoire issue reste proche (au sens des moindres carrés) des observations disponibles tout au long de la période d'assimilation.

Nous nous limiterons ici au cadre de l'assimilation variationnelle. Nous verrons dans un premier temps les différents outils permettant de minimiser efficacement et rapidement la fonction-coût. Tout d'abord, nous introduirons l'état adjoint, permettant de calculer rapidement le gradient de la fonctionnelle, puis les algorithmes de minimisation de type quasi-Newton. Malheureusement, la dimension du problème (ici, la dimension de l'espace de contrôle, souvent de l'ordre de  $10^6$  à  $10^7$ ) ne permet pas de pousser la minimisation jusqu'à obtention du minimum absolu. De plus, la dimension du problème ne permet pas de prendre en compte l'erreur modèle. Nous verrons alors une approche, dite *duale*, qui permet non seulement de se placer dans un espace de dimension inférieure pour résoudre le même problème, mais aussi de prendre en compte de façon inhérente l'erreur modèle. Cette nouvelle approche reste pour le moment limitée au cadre d'équations linéaires, mais elle permet d'obtenir plus rapidement une meilleure solution.

## 2 Position du problème

On fixe  $T > 0$ . Le principe est de résoudre sur  $[0, T]$  le problème d'évolution suivant, où l'inconnue est une fonction  $y \in \mathcal{F}$  l'espace des fonctions de  $[0, T] \times \mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}$  :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t, x) + A(t, x, y) = f(t, x) + v(t, x), & 0 < t < T \\ y(0, x) = y_0(x) + u(x), \end{cases} \quad (2.1)$$

avec  $A$  un opérateur de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathcal{F}$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $u$  une fonction de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}$  correspondant à l'erreur sur la condition initiale, et  $v$  une fonction de  $[0, T] \times \mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}$  représentant l'erreur modèle. De plus, nous disposons d'une condition initiale  $y_0$ , fonction de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}$  et de  $f$ , une fonction de  $[0, T] \times \mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}$ .

Lors de la discrétisation imposée par les calculs numériques, nous remplacerons les fonctions de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}$  par des vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  représentant les valeurs de ces fonctions aux points de la grille de discrétisation,  $n$  étant le nombre de points de grille.

Nous supposons que nous avons à notre disposition, à certains instants  $t_1 \dots t_N \in [0, T]$ , des observations discrètes en temps et en espace du système :  $z_1 \dots z_N \in \mathbb{R}^d$ ,  $d \ll n$ , et qu'il existe des opérateurs linéaires  $H_i, i = 1 \dots N$ , de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^d$  appelés opérateurs d'observations, permettant de relier les états *calculés* du système  $y$  aux observations  $z$ . En effet, les observations disponibles peuvent être la vitesse du vent, la hauteur d'eau, la pression... qu'il faut relier par exemple à la fonction de courant qui sert d'inconnue dans les équations.

On rappelle (voir [7]) que dans le cas où l'opérateur  $A$  peut se décomposer sous la forme  $A(t, x, y) = \sum_{i \in \mathbb{N}^3} p_i(t, x, y) \partial_{x_1}^{i_1} \partial_{x_2}^{i_2} \partial_{x_3}^{i_3} y$ , avec les hypothèses suivantes :

- $f$  et  $v$  appartiennent à  $L^2([0, T] \times \mathbb{R}^3)$ ,
- les  $p_i$  ne dépendent pas de  $y$  : dans la suite, ceci sera imposé par le fait que nous supposerons  $A$  linéaire par rapport à sa 3<sup>ème</sup> variable,
- $p_i \in L^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^3)$ ,  $\partial_t p_i \in L^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^3)$  et  $\partial_x p_i \in L^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^3)$ ,

alors le problème de Cauchy est bien posé pour une donnée  $y_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ ,  $u \in L^2(\mathbb{R}^3)$  et il existe une unique solution  $y \in C([0, T]; L^2(\mathbb{R}^3))$  du problème (2.1).

Nous supposerons désormais que les hypothèses précédentes sont vérifiées.

*Remarque:* En pratique, lorsque  $A$  est non linéaire, on le remplace par  $\frac{\partial A}{\partial y}(t, x, y)$ , ce qui revient en fait à linéariser le problème autour d'un état de référence.

Il est alors possible de définir une fonctionnelle  $J$  de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 J(u, v) &= \frac{1}{2} \langle P_0^{-1} u, u \rangle + \frac{1}{2} \int_0^T \langle Q^{-1} v(t), v(t) \rangle dt \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \langle R_i^{-1} (H_i y(t_i) - z_i), H_i y(t_i) - z_i \rangle,
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

avec  $y$  la solution du problème (2.1), et où l'on note respectivement  $P_0$ ,  $Q$  et  $R_i$ ,  $i = 1 \dots N$ , les opérateurs de covariance d'erreur d'ébauche (sur la condition initiale), d'erreur modèle et d'erreur d'observations. Nous supposons que tous ces opérateurs sont symétriques définis positifs. Enfin,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit scalaire usuel sur  $L^2(\mathbb{R}^3)$  ou sur  $\mathbb{R}^n$ , suivant que l'on considère les fonctions comme allant de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}$  ou comme des vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ .

Dans l'écriture de la fonction-coût (2.2), les deux premiers termes sont des termes de régularisation sur  $u$  et  $v$ , et le dernier terme est le terme d'erreur, qui sert à s'assurer que la solution  $y$  reste proche, à tous les instants  $t_i$ , des observations  $z_i$ . De plus, la dépendance en  $u$  et  $v$  se fait implicitement dans le dernier terme par (2.1).

Minimiser  $J$  revient alors à trouver la condition initiale  $y_0 + u$  du problème d'évolution dont la trajectoire issue est la plus proche de toutes les observations du système. On peut alors supposer que c'est la trajectoire qui restera le plus longtemps la plus proche de la trajectoire exacte du modèle pour des temps  $t > T$ . Dès lors, de nombreux problèmes apparaissent lorsque nous voulons minimiser  $J$ , le premier étant de calculer son gradient. En effet, le simple calcul de  $J$  en un point donné nécessite la résolution d'une équation dont la dimension est de l'ordre de  $n = 10^6$  à  $10^7$ . Un calcul direct du gradient (par différences finies par exemple) nécessiterait donc  $n$  résolutions d'un problème de taille  $n$ , ce qui est totalement inenvisageable pour des problèmes d'une telle dimension. Nous allons donc donner une méthode qui permet de calculer le gradient beaucoup plus rapidement.

### 3 Méthode adjointe

Cette méthode a été introduite par F.X. Le Dimet et al. [6] et permet d'obtenir, dans le cadre d'un problème linéarisé, le gradient de la fonctionnelle (2.2).

**Proposition 3.1:** *Il existe une unique solution  $p \in H^1([0, T], \mathbb{R}^n)$  du problème*

$$\begin{cases} -\frac{dp}{dt} + A(t)^T p(t) = \sum_{i=1}^N H_i^T R_i^{-1} (z_i - H_i y(t_i)) \delta(t - t_i), & 0 < t < T, \\ p(T) = 0, \end{cases} \quad (3.3)$$

où  $y$  désigne la solution de (2.1). De plus, pour tout  $h_1 \in \mathbb{R}^n$ , pour tout  $h_2 \in L^2([0, T]; \mathbb{R}^n)$ ,

$$\begin{aligned} \nabla J(u, v) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} &= \langle P_0^{-1} u, h_1 \rangle + \int_0^T \langle Q^{-1} v(t), h_2(t) \rangle dt \\ &+ \langle p(0), h_1 \rangle + \int_0^T \langle p(t), h_2(t) \rangle dt. \end{aligned} \quad (3.4)$$

**PREUVE:** La preuve détaillée dans un cadre général se trouve dans [6]. L'idée générale est la suivante. Considérons le multiplicateur de Lagrange  $p$  associé à la minimisation de  $J_o$  sous la contrainte (2.1). On peut donc construire un lagrangien correspondant à notre problème de minimisation sous la forme suivante :

$$\mathcal{L}((u, v), y, p) = J_o(u, v) + \int_0^T \langle p(t), \frac{dy}{dt} + A(t)y(t) - f(t) - v(t) \rangle dt, \quad (3.5)$$

avec  $J_o(u, v) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \langle R_i^{-1} (H_i y(t_i) - z_i), H_i y(t_i) - z_i \rangle$ .

En utilisant le fait notamment que la fonction-coût est quadratique, on montre facilement que  $\mathcal{L}$  admet un point selle (minimum en  $u, v, y$  et maximum en  $p$ ).

En intégrant par parties et en utilisant le fait que  $y(0) = y_0 + u$ , on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{L}((u, v), y, p) &= J_o(u, v) + \int_0^T \langle y(t), -\frac{dp}{dt} + A(t)^T p(t) \rangle dt \\ &- \int_0^T \langle p(t), f(t) + v(t) \rangle dt + \langle p(T), y(T) \rangle - \langle p(0), y_0 + u \rangle. \end{aligned}$$

Au point-selle du lagrangien, encore noté  $((u, v), y, p)$ , les dérivées partielles de  $\mathcal{L}$  par rapport à  $u, v, y$  et  $p$  sont nulles. La dérivée nulle par rapport à  $p$

## D. AUROUX

redonne l'équation d'évolution de  $y$ . Celle par rapport à  $y$  donne l'équation d'évolution de  $p$  ainsi que la condition  $p(T) = 0$ . Les dérivations par rapport à  $u$  et  $v$  nous donnent :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}, h_1 \right\rangle &= 0 = \left\langle \frac{\partial J_o}{\partial u}, h_1 \right\rangle - \langle p(0), h_1 \rangle \\ \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}, h_2 \right\rangle &= 0 = \left\langle \frac{\partial J_o}{\partial v}, h_2 \right\rangle - \int_0^T \langle v(t), h_2(t) \rangle dt. \end{aligned}$$

La dérivation des deux premiers termes de  $J$  ne pose pas de problème.  $\square$

Au minimum de  $J$ , nous obtenons les équations couplées de  $\hat{y}$  et  $\hat{p}$ , solutions optimales du problème :

$$\begin{cases} \frac{d\hat{y}}{dt} + A(t)\hat{y}(t) = f(t) + Q\hat{p}(t), \\ \hat{y}(0) = y_0 + P_0\hat{p}(0), \\ -\frac{d\hat{p}}{dt} + A(t)^T\hat{p}(t) = \sum_{i=1}^N H_i^T R_i^{-1}(z_i - H_i\hat{y}(t_i))\delta(t - t_i), \\ \hat{p}(T) = 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

A  $u$  et  $v$  donnés, la résolution de (2.1) permet de calculer la solution  $y$  correspondante, et de calculer  $J(u, v)$ . La résolution de (3.3) permet alors de calculer  $\nabla J(u, v)$ . Nous allons désormais étudier plus en détail un algorithme permettant de minimiser  $J$  lorsque son gradient est connu.

## 4 Algorithme L-BFGS

L'un des algorithmes de minimisation les plus simples est l'algorithme de Newton. Pour minimiser une fonction du type  $J(x)$ , on construit une suite  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  d'approximations du minimum en partant d'un point a priori quelconque  $x_0$ , et en construisant à chaque étape la direction de descente  $d_k = -H_k^{-1} \cdot \nabla J(x_k)$ , où  $H_k$  est la hessienne  $\nabla^2 J(x_k)$ , et un pas de descente  $\rho_k$  le long de la direction  $d_k$  (obtenu par recherche linéaire). On pose alors  $x_{k+1} = x_k + \rho_k d_k$ .

Cet algorithme est souvent très efficace, mais beaucoup trop coûteux dans notre cas. En effet, la hessienne est une matrice carrée d'ordre  $n$ , ce qui peut représenter plus de  $10^{12}$  éléments. Son inversion est alors impossible (son

stockage est déjà délicat). Les algorithmes de type quasi-Newton consistent justement à remplacer l'inverse de la hessienne  $[\nabla^2 J]^{-1}$  par une suite  $(W_k)_{k \in \mathbb{N}}$  d'approximations symétriques définies positives, avec des corrections de faible rang à chaque itération. L'algorithme BFGS (Broyden, Fletcher, Goldfarb et Shanno) [4] utilise la formule suivante de mise à jour de l'inverse de la hessienne :

$$W_{k+1} = U(W_k, s_k, \eta_k) := \left( I - \frac{s_k \otimes \eta_k}{\langle \eta_k, s_k \rangle} \right) W_k \left( I - \frac{\eta_k \otimes s_k}{\langle \eta_k, s_k \rangle} \right) + \frac{s_k \otimes s_k}{\langle \eta_k, s_k \rangle}$$

avec  $s_k = x_{k+1} - x_k$ ,  $\eta_k = \nabla J(x_{k+1}) - \nabla J(x_k)$  et  $a \otimes b : c \mapsto \langle b, c \rangle a$ . L'inconvénient est alors le coût de stockage de toutes les paires  $(s_k, \eta_k)$  calculées à chaque étape.

Liu et al. [8] ont alors introduit l'algorithme L-BFGS, qui est une extension de l'algorithme précédent, à mémoire limitée. On ne stocke désormais que les  $M$  dernières paires  $(s_k, \eta_k)$  calculées. En pratique,  $M$  est de l'ordre de 5. La mise à jour s'effectue alors de la manière suivante :

$$W_k = U(W_{k-1}, s_{k-1}, \eta_{k-1}), \quad 1 \leq k \leq M,$$

et pour  $k \geq M + 1$ ,

$$\begin{cases} W_k^0 = D_k, \\ W_k^{i+1} = U(W_k^i, s_{k-M+i}, \eta_{k-M+i}), & i = 0 \dots M - 1, \\ W_k = W_k^M, \end{cases}$$

où  $D_k$  est une matrice diagonale. La mise à jour de  $D_k$  s'effectue généralement par la formule suivante :

$$D_{k+1}^{(i)} = \left( \frac{1}{D_k^{(i)}} + \frac{\eta_k^{(i)2}}{\langle \eta_k, s_k \rangle} - \frac{s_k^{(i)2}}{(D_k^{(i)})^2 \langle D_k^{-1} s_k, s_k \rangle} \right)^{-1}.$$

De plus, Veersé et al. [9] ont montré qu'il était judicieux de faire une mise à l'échelle de la matrice diagonale  $D_k$ . En effet, on a  $\eta_k = \nabla^2 J(x_k) \cdot s_k$  en approximation du premier ordre, donc une bonne condition à imposer sur les approximations de  $\nabla^2 J(x_k)$  est :  $\langle W_k \eta_k - s_k, \eta_k \rangle = 0$ . Notons  $\sigma_k = \frac{\langle \eta_k, s_k \rangle}{\langle D_k \eta_k, \eta_k \rangle}$ , on souhaite que  $\sigma_k$  soit égal à 1, donc on va remplacer  $D_k$  par  $\sigma_k D_k$ . Ceci accélère sensiblement la convergence de l'algorithme de minimisation (en conservant des matrices relativement bien conditionnées), mais il est important de mettre à jour la matrice diagonale à partir de  $D_k$ , et non  $\sigma_k D_k$ , afin de conserver une bonne approximation de l'inverse de la hessienne.



## 5 Approche duale

Comme nous l'avons précédemment vu, d'une part, la méthode *classique* ne prend pas directement en compte l'erreur modèle puisqu'il faut rajouter un terme source  $v$  dans l'équation (2.1) et dans la fonction-coût à minimiser, et d'autre part, la dimension du vecteur de contrôle  $u$  est de l'ordre de  $10^6$  à  $10^7$  ce qui rend la minimisation très coûteuse. En pratique, l'erreur modèle n'est pas prise en compte ( $v$  est une fonction de  $[0, T]$  dans  $\mathbb{R}^n$ , pas un *simple* vecteur de  $\mathbb{R}^n$  comme  $u$ ), et la minimisation est stoppée bien avant convergence vers le minimum de  $J$  pour des raisons de temps de calcul.

Pour remédier à ces difficultés, Amodei [1] puis Courtier [5] ont introduit une nouvelle approche, dite *duale*, de notre problème de minimisation. On se place désormais dans l'espace des observations.

*Notation:* On note  $z = (z_1, \dots, z_N)$  le vecteur de dimension  $d \times N$  comprenant toutes les observations disponibles, on définit l'opérateur linéaire d'observation, de  $L^2([0, T]; \mathbb{R}^n)$  dans  $\mathbb{R}^{dN}$ , qui à une fonction  $y$  associe l'élément  $Hy = (H_1y(t_1), \dots, H_Ny(t_N))$ . On note  $R$  la matrice diagonale par blocs, avec sur la diagonale les matrices  $R_i$ . Soit  $\tilde{y}$  la solution (de *référence*) de (2.1) avec  $u = 0$  et  $v = 0$  (modèle et condition initiale supposés sans erreur) :

$$\frac{d\tilde{y}}{dt} + A(t)\tilde{y}(t) = f(t), \quad \tilde{y}(0) = y_0. \quad (5.7)$$

On définit le vecteur d'innovation  $d = z - H\tilde{y}$  comme étant l'écart entre les observations et la solution de référence du problème. On note enfin  $m = (m_1, \dots, m_N)$  un vecteur de l'espace des observations. En étudiant (3.6), on constate qu'on est amené à considérer le vecteur  $m := R^{-1}(z - Hy) \in \mathbb{R}^{dN}$ .

A partir d'un élément  $m$  de l'espace des observations, on construit la solution  $p_m$  de

$$\begin{cases} -\frac{dp_m}{dt} + A(t)^T p_m(t) = \sum_{i=1}^N H_i^T m_i \delta(t - t_i), \\ p_m(T) = 0. \end{cases} \quad (5.8)$$

On reconnaît l'équation adjointe, avec en forçage  $m_i$  aux instants  $t_i$ . On construit ensuite  $y_m$ , solution de

$$\begin{cases} \frac{dy_m}{dt} + A(t)y_m(t) = Qp_m(t), \\ y_m(0) = P_0 p_m(0), \end{cases} \quad (5.9)$$

c'est-à-dire solution du problème d'évolution primal avec la condition initiale  $P_0 p_m(0)$  et un forçage au second membre égal à  $Q p_m(t)$ . On définit alors un opérateur  $\Lambda$  sur l'espace des observations de la manière suivante :  $\Lambda m = H y_m$ .

**Proposition 5.1:**  *$\Lambda$  est linéaire symétrique défini positif. De plus, si on note  $\hat{m}$  la solution de*

$$(\Lambda + R)\hat{m} = d, \quad (5.10)$$

alors

$$\hat{m} = R^{-1}(z - H\hat{y}), \quad \text{et} \quad \hat{y} = \bar{y} + y_{\hat{m}}. \quad (5.11)$$

**PREUVE:** Considérons le noyau reproduisant  $G(t, t')$  associé à  $A(t)$  (voir Bensoussan, [3]). Si  $Y$  vérifie

$$\begin{cases} \frac{dY}{dt} + A(t)Y(t) = 0 & \text{sur } [t_0, t_f], \\ Y(t_0) = Y_0, \end{cases}$$

alors  $Y(t_f) = G(t_f, t_0)Y_0$ . En considérant maintenant l'équation (5.9), on obtient :

$$y_m(t) = G(t, 0)P_0 p_m(0) + \int_0^t G(t, s)Q p_m(s)ds.$$

Par transposition, on obtient que le noyau reproduisant de  $A(t)^T$  est  $G(t', t)^T$ . Choisissons  $m = (0, \dots, 0, m_i, 0, \dots, 0)$  avec  $m_i$  en  $i^{\text{ème}}$  position. On a alors

$$p_m(0) = G(T, 0)^T p_m(T) + \int_0^T G(s, 0)^T H_i^T m_i \delta(s - t_i) ds = G(t_i, 0)^T H_i^T m_i.$$

On a donc  $y_m(0) = P_0 G(t_i, 0)^T H_i^T m_i$  et par conséquent,

$$y_m(t) = G(t, 0)P_0 G(t_i, 0)^T H_i^T m_i + \int_0^t G(t, s)Q p_m(s)ds,$$

et on a :

$$\begin{aligned} (\Lambda m)_j &= H_j y_m(t_j) = H_j G(t_j, 0)P_0 G(t_i, 0)^T H_i^T m_i + \int_0^{t_j} H_j G(t_j, s)Q p_m(s)ds \\ &= H_j G(t_j, 0)P_0 G(t_i, 0)^T H_i^T m_i + \int_0^{\min(t_i, t_j)} H_j G(t_j, s)Q G(t_i, s)^T H_i^T m_i ds \end{aligned}$$

## D. AUROUX

car pour  $t > t_i$ ,  $p_m(t) = 0$ . On en déduit aisément que  $\Lambda_{ij} = \Lambda_{ji}^T$ , ce qui démontre que  $\Lambda$  est symétrique. De plus, sous certaines conditions sur  $A$  (non restrictives dans le cas de modèles océanographiques, voir Bennett, [2]), on peut montrer que le noyau reproduisant est défini positif, et donc  $\Lambda$  aussi.

L'existence et l'unicité de  $\hat{m}$  en découle directement ( $R$  est également symétrique défini positif). La solution optimale du problème primal  $\hat{y}$  et la variable adjointe  $\hat{p}$  vérifient les équations (3.6). On peut donc décomposer  $\hat{y}$  sous la forme  $\tilde{y} + \check{y}$  avec  $\check{y}$  solution de

$$\begin{cases} \frac{d\check{y}}{dt} + A(t)\check{y}(t) = Q\hat{p}(t), \\ \check{y}(0) = P_0\hat{p}(0). \end{cases} \quad (5.12)$$

Puisque  $(\Lambda + R)\hat{m} = d$ , on a  $\Lambda\hat{m} = d - R\hat{m} = Hy_{\hat{m}}$ . Or on constate que  $y_{\hat{m}}$  et  $\check{y}$  vérifient la même équation d'évolution avec la même condition initiale. Il y a donc égalité, et  $\hat{y} = \tilde{y} + y_{\hat{m}}$ . Enfin, par définition,  $\hat{m} = R^{-1}(d - \Lambda\hat{m}) = R^{-1}((z - H\tilde{y}) - Hy_{\hat{m}}) = R^{-1}(z - H(\tilde{y} + y_{\hat{m}}))$ .  $\square$

Pour résoudre (5.10), étant donné que  $(\Lambda + R)$  est symétrique défini positif, une méthode de gradient permet d'approcher assez rapidement la solution. Il faut donc définir la fonctionnelle quadratique associée :

$$J_\Lambda(m) = \frac{1}{2}\langle (\Lambda + R)m, m \rangle - \langle d, m \rangle, \quad (5.13)$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne ici le produit scalaire usuel sur  $\mathbb{R}^{dN}$ .

**Théorème 5.2:** *En posant  $u_m = y_m(0)$  et  $v_m = Qp_m$ , on peut redéfinir  $J$  comme étant une fonction de  $m$  uniquement :*

$$J(m) = J(u_m, v_m) = \frac{1}{2}\langle \Lambda m, m \rangle + \frac{1}{2}\langle R^{-1}(\Lambda m - d), \Lambda m - d \rangle. \quad (5.14)$$

On a alors

$$\min_{m \in \mathbb{R}^{dN}} J(m) = \max_{\mathbb{R}^{dN}} (-J_\Lambda(m)) = -\min_{\mathbb{R}^{dN}} J_\Lambda(m) = \frac{1}{2}\langle (\Lambda + R)^{-1}d, d \rangle, \quad (5.15)$$

et les minima sont réalisés au même point  $m$ .

PREUVE: Commençons par expliciter le second membre de (5.14) :

$$\begin{aligned}
 \langle \Lambda m, m \rangle &= \sum_{i=0}^N \langle H_i y_m(t_i), m_i \rangle = \int_0^T \langle y_m(t), \sum_{i=1}^N H_i^T m_i \delta(t - t_i) \rangle dt \\
 &= \int_0^T \langle y_m(t), -\frac{dp}{dt}(t) + A(t)^T p(t) \rangle dt \\
 &= \int_0^T \langle \frac{dy_m}{dt}(t) + A(t)y_m(t), p(t) \rangle dt - \langle y_m(T), p_m(T) \rangle + \langle y_m(0), p_m(0) \rangle \\
 &= \int_0^T \langle Q p_m(t), p_m(t) \rangle dt + \langle P_0 p_m(0), p_m(0) \rangle,
 \end{aligned}$$

et on retrouve les deux premiers termes de  $J$  de (2.2), par définition de  $u_m$  et  $v_m$ .

De plus,  $\Lambda m - d = H y_m - (z - H \tilde{y}) = H(\tilde{y} + y_m) - z$  et  $\tilde{y} + y_m$  est solution de (2.1) avec  $u = u_m$  et  $v = v_m$ . On retombe donc bien sur  $J_o(u_m, v_m)$ .

Dérivons  $J(m)$  :

$$\nabla J(m) = \Lambda m + \Lambda R^{-1}(\Lambda m - d)$$

donc au minimum  $m^*$  de  $J$ , on a

$$\nabla J(m^*) = 0 \text{ (i.e.) } m^* + R^{-1}(\Lambda m^* - d) = 0 \text{ (i.e.) } R^{-1}(R + \Lambda)m^* = R^{-1}d,$$

d'où on tire que

$$\min_{m \in \mathbb{R}^{dN}} J(m) = J(m^*) \text{ avec } m^* = (\Lambda + R)^{-1}d = \hat{m},$$

$$\text{et } J(\hat{m}) = \frac{1}{2} \langle d - R\hat{m}, \hat{m} \rangle + \frac{1}{2} \langle \hat{m}, R\hat{m} \rangle = \frac{1}{2} \langle d, \hat{m} \rangle = \frac{1}{2} \langle (\Lambda + R)^{-1}d, d \rangle.$$

$$\begin{aligned}
 &\text{Par construction de } J_\Lambda, \text{ on a clairement } \min_{\mathbb{R}^{dN}} J_\Lambda(m) = J_\Lambda(\hat{m}) = -\frac{1}{2} \langle d, \hat{m} \rangle \\
 &= -\frac{1}{2} \langle (\Lambda + R)^{-1}d, d \rangle. \quad \square
 \end{aligned}$$

Le théorème 5.2 démontre l'équivalence des deux approches en terme de construction des solutions, ainsi que l'égalité des solutions construites et des extréma des fonctionnelles.

## 6 Conclusion

En pratique, la dimension de l'espace des observations est de l'ordre de  $10^5$  (les observations ne sont pas disponibles à tout instant, ni en tout point de

l'espace). Nous sommes donc ramenés à chercher le minimum d'une fonction-coût sur un espace de plus faible dimension (un à deux ordres de grandeur en moins par rapport à l'espace de contrôle), avec la prise en compte de l'erreur modèle, ce qui était numériquement impossible dans la première approche. Nous avons donc une méthode qui permet *a priori* de trouver plus rapidement un meilleur résultat.

Le problème qui se pose actuellement est de mettre en œuvre ce genre de méthode sur des problèmes hautement non linéaires, et notamment sur toutes les différentes équations que l'on peut trouver en océanographie, dérivées des équations de Navier-Stokes. Dans un cas non linéaire, il convient de linéariser les équations autour d'un état de référence, et il est alors possible d'étendre l'approche duale à ce cadre, mais il n'y a alors plus de résultat de *dualité* (au sens des extréma liés) entre les deux fonctionnelles. La recherche d'un minimum approché de la fonctionnelle duale reste plus rapide que dans l'approche primale, mais rien ne nous assure que le résultat obtenu sera meilleur. De plus, il faut être conscient qu'avec les progrès techniques de ces dernières années, la quantité d'observations disponibles sur un océan ne cesse de croître, et il devrait arriver un moment où la dimension de l'espace d'observations va dépasser celle de l'espace de contrôle.

Des tests sont actuellement en cours sur un modèle quasi-géostrophique barocline afin de comparer les deux approches dans un cadre assez proche de celui utilisé par les océanographes et de mettre en place une généralisation de la méthode duale pour des équations non linéaires.

## Références

- [1] L. Amodei. Solution approchée pour un problème d'assimilation de données météorologiques avec prise en compte de l'erreur modèle. *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. 321, série II: 1087–1094, 1995.
- [2] A.F. Bennett. *Inverse methods in physical oceanography*. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [3] A. Bensoussan. *Filtrage optimal des systèmes linéaires*. Dunod, Paris, 1971.
- [4] C.G. Broyden. A new double-rank minimization algorithm. *Notices American Math. Soc.*, 16: 670, 1969.

