ANNALES MATHÉMATIQUES BLAISE PASCAL

KINVI KANGNI
SALIOU TOURÉ

Transformation de Fourier sphérique de type δ. Applications aux groupes de Lie semi-simples

Annales mathématiques Blaise Pascal, tome 8, n° 2 (2001), p. 77-88
<http://www.numdam.org/item?id=AMBP_2001__8_2_77_0>

ANNALES MATHEMATIQUES BLAISE PASCAL, VOL. 8, N° 2, PP 77-88 (2001)

Transformation de Fourier sphérique de type δ Applications aux groupes de Lie semi-simples.

Kinvi Kangni
Saliou Touré

Résumé

Let G a connected Lie group, K a large compact subgroup of G and δ an arbitrary class of irreducible unitary representation of K. In this work, thanks to the generalized Abel transform, we construct a spherical Fourier transform of type δ and study some applications to the real special linear group SL(2, $\mathbf{R}$).

1 Introduction

Soient un groupe localement compact unimodulaire et K sous groupe compact de G. Notons $\hat{K}$ le dual unitaire de K et pour toute classe δ de $\hat{K}$, ξ_δ le caractère de δ, $d(\delta)$ le degré de δ et $\mathcal{X}_\delta = d(\delta)\,\xi_\delta$. Si $\check{\delta}$ est la classe des représentations contragrédientes de δ dans $\hat{K}$, on a $\bar{\mathcal{X}}_\delta = \mathcal{X}_{\check{\delta}}$ et on vérifie aisément, grâce aux relations d'orthogonalité de Schur que $\mathcal{X}_{\check{\delta}} * \mathcal{X}_{\check{\delta}} = \mathcal{X}_{\check{\delta}}$. On note $M_{d(\delta)}(\mathbb{C})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre $d(\delta)$ à coefficients complexes. Soit $\mathcal{K}(G)$ l'espace des fonctions complexes continues sur G à support compact. En identifiant $\mathcal{X}_\delta$ à une mesure bornée sur G, on note pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(G)$

$$\begin{aligned} {}_\delta f(x) &= \bar{\mathcal{X}}_\delta * f(x) &= \int_K \mathcal{X}_\delta(k)\; f(kx)\,dk \\ f_\delta(x) &= f * \mathcal{X}_\delta(x) &= \int_K \mathcal{X}_\delta(k^{-1})\; f(kx)\,dk \end{aligned}$$

et $\mathcal{K}_\delta(G) = \{f \in \mathcal{K}(G)\,,\ f = {}_\delta f = f_{\check{\delta}}\}$, ($dk$ étant la mesure de Haar normalisée sur K).

Soit $\mathcal{J}_C(G)$ l'ensemble des fonctions K – *centrales* f de $\mathcal{K}(G)$. Posons

$$\mathcal{K}_\delta(G) \cap \mathcal{J}_C(G) = \mathcal{K}_\delta^\natural(G).$$

$\mathcal{K}_\delta^\natural(G)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{K}(G)$. Définissons l'application f_K en posant :

$$f_K(x) = \int_K f\left(kxk^{-1}\right) dk \qquad (\forall x \in G).$$

Alors l'application $f \longmapsto \mathcal{X}_\delta * f_K$ est une projection continue de $\mathcal{K}(G)$ sur $\mathcal{K}_\delta^\natural(G)$.

Désignons par $\mathcal{D}(G)$ l'espace des fonctions régulières sur G à support compact (cf.[1]) et $\mathcal{D}'(G)$ l'espace des distributions sur G, c'est-à-dire le dual de $\mathcal{D}(G)$.

Soit E un espace vectoriel complexe de dimension finie. Une **fonction sphérique** ϕ (sur G) **de type** δ est une fonction continue quasi-bornée sur G à valeurs dans $End_C(E)$ telle que :

(i) $\phi(kxk^{-1}) = \phi(x)$

(ii) $\mathcal{X}_\delta * \phi = \phi = \phi * \mathcal{X}_\delta$

(iii) L'application $u_\phi : f \longrightarrow \phi(f) = \int_G f(x)\phi(x^{-1})\,dx$ est une représentation irréductible de l'algèbre $\mathcal{K}_\delta^\natural(G)$. La dimension de E est la hauteur de ϕ (cf. [2]).

Soient $X_m\left(\mathcal{K}_\delta^\natural(G)\right)$ l'espace des fonctions des représentations irréductibles de $\mathcal{K}_\delta^\natural(G)$ de dimension m et $\mathcal{S}_\delta^m(G)$ l'espace des fonctions sphériques de type δ et de hauteur m. Soit $\mathcal{G}$ la transformation de Gelfand généralisée de $\mathcal{K}_\delta^\natural(G)$ i.e. l'application définie par :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{G} : \mathcal{K}_\delta^\natural(G) & \longrightarrow & M_m(\mathbb{C})^{X_m\left(\mathcal{K}_\delta^\natural(G)\right)} \\ f & \longmapsto & \mathcal{G}f \end{array}$$

avec $\mathcal{G}f(U) = U(f)$. Après identification des espaces $X_m\left(\mathcal{K}_\delta^\natural(G)\right)$ et $\mathcal{S}_\delta^m(G)$, on montre qu'il existe (cf [2]) une application notée $\mathcal{F}f$ qui s'identifie à $\mathcal{G}f$ et qui est définie par :

$$\mathcal{F}f(\phi) = \int_G f(x)\phi\left(x^{-1}\right)dx, \quad \left(\forall \phi \in \mathcal{S}_\delta^m(G)\right).$$

La fonction $f \longmapsto \mathcal{G}f$ est appelée **transformation de Fourier sphérique de type** δ. $\mathcal{F}f$ n'est rien d'autre que la transformation de Gelfand généralisée associée à $\mathcal{K}_\delta^\natural(G)$.

Si δ est triviale de dimension 1 et si (G, K) est une paire Gelfand, on retrouve la transformation de Fourier sphérique usuelle. Nous allons généraliser le théorème de Selberg suivant le dual unitaire du sous-groupe compact large K et ensuite construire la transformation de Fourier sphérique de type δ d'un groupe de Lie connexe semi-simple.

2 Transformation de Fourier sphérique de type δ sur G

Supposons que G est un groupe de Lie connexe unimodulaire et dénombrable à l'infini. Soit K un sous-groupe compact large de G. Soit $\mathcal{A}$ l'algèbre universelle enveloppante de $\mathcal{G}_c$ où $\mathcal{G}_c$ est la complexifiée de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de G. Soit $\mathcal{C}$ le centralisateur de $\mathcal{K}_c$ dans $\mathcal{A}$ où $\mathcal{K}_c$ est la complexifiée de l'algèbre de Lie $\mathcal{K}$ de K. (On rappelle que la projection canonique de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{C}$ est définie par $D \longmapsto D_K$ où $D_K = \int_K ad(k)\,.\,dk$).

Soit $D \longmapsto T_D$ l'identification de l'algèbre $\mathcal{A}$ avec l'algèbre des distributions sur G à support $\{1\}$. T_D est définie par:

$$T_D(f) = D_{\check{f}}(1) \quad \text{et} \quad \check{T}_D(f) = T_D(\check{f}) \qquad (f \in \mathcal{D}(G))$$

où pour tout $x \in G$, $\check{f}(x) = f(x^{-1})$.

Si $D \in \mathcal{C}$ alors T_D commute avec $\delta_k \quad (k \in K)$. Donc:

$$D\phi(x) = \check{T}_D(x) = \int_G \phi(xy^{-1})\, d\check{T}_D(y) = \phi(x)\, D\phi(1) \qquad \forall x \in G.$$

Théorème 2.1 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$, ϕ une fonction quasi-bornée et K – centrale de classe C^∞. Supposons qu'il existe une représentation irréductible u_ϕ de $\mathcal{C}$ dans E telle que :*

$$D\phi = \phi u_\phi(D) \quad \text{où} \quad u_\phi(D) = D\phi(1) \qquad \forall D \in \mathcal{C}.$$

Alors il existe $\delta \in \hat{K}$ telle que ϕ soit sphérique de type δ.

PREUVE: Nous allons montrer qu'il existe $\delta \in \hat{K}$ telle que $\phi * \mathcal{X}_\delta = \phi$ et établir que l'application $f \longmapsto \phi(f)$ est une représentation irréductible de $\mathcal{K}_\delta^\natural(G)$. L'espace $\mathcal{C}\phi = \{\, x\phi, \in \mathcal{C}\}$ est de dimension finie. D'autre part $\mathcal{C}$ contient un élément elliptique Δ. Il existe donc, des nombres complexes $c_k \;(0 \leq k \leq n, c_n = 1)$, tel que $\sum_k c_k \Delta^k \phi = 0$. Comme l'opérateur différentiel

$\sum\limits_k c_k \Delta^k$ est elliptique alors ϕ est analytique. Montrons que ϕ vérifie l'équation fonctionnelle :

$$\int_K \phi\left(xkyk^{-1}\right) dk = \phi(x)\ \phi(y) \qquad \forall x, y \in G.$$

Soit x fixé dans G, il existe un voisinage $\mathcal{O}$ de zéro dans $\mathcal{G}$ tel que pour tout $Y \in \mathcal{O}$ on a :

$$\begin{aligned}
\int_K \phi(xk \exp Y k^{-1})\, dk &= \int_K \phi(x \exp(Ad(k)\, Y))\, dk \\
&= \int_K \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (Ad(k)\, Y)^m \phi(x)\, dk \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (Y_K)^m \phi(x) \\
&= \phi(x) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (Y_K)^m \phi(1) \right) \text{(d'après l'hypothèse)} \\
&= \phi(x)\ \phi(x \exp Y)
\end{aligned}$$

(car $D\phi(1) = D_K \phi(1)$, $D \in \mathcal{A}$ et ϕ est centrale par K).

Comme ϕ est analytique, on peut alors l'étendre sur tout le groupe G. Supposons que ϕ n'est pas identiquement nulle. Il existe donc $\delta \in \hat{K}$ telle que $\phi * \mathcal{X}_\delta (1) \neq 0$.

En effet, pour tout $x \in G$, on a : $\phi * \mathcal{X}_\delta (x) = \int_K \phi(xk) \mathcal{X}_\delta (k)\, dk = \int_K \left(\int_K \phi(xk'kk'^{-1})\, dk' \right) \mathcal{X}_\delta (k)\, dk = \phi(x) (\phi * \mathcal{X}_\delta)(1)$. Donc si $\phi * \mathcal{X}_\delta (1) = 0$, pour tout $\delta \in \hat{K}$, $\phi * \mathcal{X}_\delta$ serait nul d'où une contradiction.

Fixons donc δ telle que $\phi * \mathcal{X}_\delta (1) \neq 0$. Comme $\mathcal{X}_\delta$ est centrale par K, $\phi * \mathcal{X}_\delta (1)$ commute avec $D\phi(1)$ $(D \in \mathcal{C})$. Donc d'après le lemme de Schur, $\phi * \mathcal{X}_\delta (1)$ est un opérateur scalaire non nul M_δ. Par conséquent

$$\phi M_\delta = \phi * \mathcal{X}_\delta = (\phi * \mathcal{X}_\delta) * \mathcal{X}_\delta = \phi M_\delta^2.$$

Et on en déduit que : $\phi = \phi * \mathcal{X}_\delta$. Comme $\phi = \phi_K$ et $\phi * \mathcal{X}_\delta = \phi$, l'application $f \longmapsto \phi(f)$ est une représentation de $\mathcal{K}_\delta^\natural (G)$ dans E. Montrons que cette représentation est irréductible. L'espace $\mathcal{D}(G)$ est faiblement dense dans $\mathcal{D}'(G)$ et tout opérateur de la forme $D\phi(1)$ $(D \in \mathcal{C})$ peut être approché par les opérateurs $\phi(f)$ où on peut supposer $f \in \mathcal{D}_\delta^\natural (G)$. Donc

$$Hom(E, E) = \left\{ \int_K f(x) \phi(x)\, dx, \quad f \in \mathcal{K}_\delta^\natural (G) \right\}$$

i.e. U est topologiquement complètement irréductible donc irréductible. Par conséquent $f \longmapsto \phi(f)$ est irréductible et ϕ est sphérique de type δ. $\square$

Dans la suite de ce travail, nous désignons par G un groupe de Lie connexe semi-simple de centre fini, KAN une décomposition d'Iwasawa de G où K, A et N sont des sous-groupe de G avec K compact; A abélien et N nilpotent ayant pour algèbres de Lie respectives $\mathcal{K}$, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{N}$. Pour tout $x \in G$, on désigne par $\kappa(x)$ et $H(x)$ les uniques éléments de K et $\mathcal{A}$ respectivement tel que:

$$x = \kappa(x) \exp(H(x))\, n, \; n \in N.$$

Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie, φ un système de racines réduit dans $E, \sigma : E \longrightarrow E$ une isométrie involutive telle que $\sigma\varphi = \varphi\,(\sigma \neq \pm 1)$. La paire (φ, σ) est appelée σ *-- système* de racines. Notons:

$$E_{\pm} = \{\gamma \in E, \sigma(\gamma) = \pm\gamma\}$$

et λ un élément du système de racines S dans $E_{\pm}$.

Pour toute forme linéaire complexe μ sur $\mathcal{A}$, Harish Chandra a construit une représentation continue U^{μ} (en général non unitaire) de G dans l'espace de Hilbert $L^2(K)$ induite par un caractère de AN et définie par:

$$U^{\mu}(x) f(k) = \exp\left\{-(\mu + 2\rho) H\left(x^{-1}k\right)\right\} f\left(\kappa\left(x^{-1}k\right)\right)$$

où $\rho = \sum\limits_{\lambda > 0} m(\lambda)\, \lambda$, et où $m(\lambda)$ est la multiplicité de λ dans S.

Considérons la transformation d'Abel généralisée $f \longrightarrow F_f^{\delta}$ (cf.[4]) définie pour tout $h \in A$ par:

$$F_f^{\delta}(h) = h^{\rho} \int_K \int_N f(k\, hn)\; u_{\check{\delta}}\left(k^{-1}\right) dn\, dk \quad \text{où} \quad h^{\rho} = \exp\left[\rho\,(\log h)\right]$$

(δ étant un élément du dual unitaire du groupe compact K). Nous allons, grâce à cette transformation d'Abel, définir la transformation de Fourier sphérique de type δ du groupe de Lie semi-simple G et étudier quelques applications au groupe de Lie $SL(2, \mathbb{R})$.

Théorème 2.2 *Soit μ une forme linéaire sur A. L'application $f \longrightarrow \phi_{\delta}^{\mu}(f)$ de $\mathcal{K}_{\delta}^{\natural}(G)$ à valeurs dans $M_{d(\delta)}(\mathbb{C})$ définie par:*

$$\phi_{\delta}^{\mu}(f) = \int_A F_f^{\delta}(h)\, h^{\mu+\rho}\, dh$$

est une transformation de Fourier sphérique de type δ.

PREUVE: Pour toute $f \in \mathcal{K}_\delta^\natural(G)$, on a:

$$\begin{aligned}\phi_\delta^\mu(f) &= \int_A F_f^\delta(h)\ h^{\mu+\rho}\ dh \\ &= \int_K \int_A \int_N h^{\mu+2\rho} f(khn)\ u_{\check\delta}(k^{-1})\, dk\, dh\, dn \\ &= \int_G \int_K h^\mu f(x)\, u_\delta(\,\mathrm{K}(k^{-1}x^{-1}k))\ dx\ dk\end{aligned}$$

car pour tout $x = khn \in G$, $dx = h^{2\rho}\, dk\, dh\, dn$. Posons:

$$\phi_\delta^\mu(f) = \int_K h^\mu\, u_\delta\left(\mathrm{K}\left(k^{-1}xk\right)\right)\ dk = \int_K u_\delta\left(\mathrm{K}\left(k^{-1}xk\right)\right)\ \exp\left[\mu\left(H\left(xk\right)\right)\right]\ dk$$

Il reste à montrer que la fonction $x \longmapsto \phi_\delta^\mu(x)$ de G dans End (E_δ) est une fonction sphérique de type δ. ϕ_δ^μ est centrale par K (évident). Pour tout $x \in G$, on a : $\mathcal{X}_\delta * \phi_\delta^\mu(x) = \phi_\delta^\mu(x)$. En effet, $\mathcal{X}_\delta * \phi_\delta^\mu(x) = \int_K \mathcal{X}_\delta(k)\ \phi_\delta^\mu(k^{-1}x)\, dk$
$= \int_K \int_K \mathcal{X}_\delta(k)\, u_\delta\ (\mathrm{K}(k'^{-1}xk^{-1}k'))\ \exp[\mu(H(xk^{-1}k'))]\ dk\, dk'$
$= \int_K \int_K \mathcal{X}_\delta(k)\, u_{\check\delta}\ (\mathrm{K}(k'^{-1}k^{-1}xk'))\ \exp[\mu(H(x\,k'))]\ dk\, dk'$
$= d(\delta) \int_K \int_K tr(u_\delta(k))\ u_{\check\delta}(k'^{-1})\ u_{\check\delta}(k^{-1})\ u_{\check\delta}\ \ (xk')\ \exp[\mu(H(xk'))]\ dk\, dk'$
$= \int_K u_\delta(\mathrm{K}(k^{-1}xk))\ \exp[\mu(H(xk))]\ dk = \phi_\delta^\mu(x)$
car pour tout $T \in End_{\mathbb{C}}(E_\delta)$, on a

$$T = d(\delta) \int_K u_\delta\left(k^{-1}\right)\ tr\left(u_\delta(k)\, T\right)\ dk.$$

D'autre part,

$$\left(\phi_\delta^\mu(x)\right)_{ij} = \int_K \sum_t^{d(\delta)} a_{it}\left(k^{-1}\right) a_{tj}\left(\mathrm{K}\left(x^{-1}k\right)\right) \exp\left[\mu\left(H\left(xk\right)\right)\right]\ dk.$$

où $(a_{ij}(k))$ est la matrice de $u_\delta(k)$ par rapport à une base de E_δ.

$$\begin{aligned}\left(\phi_\delta^\mu(x)\right)_{ij} &= \sum_t^{d(\delta)} \int_K a_{it}(k^{-1})\, a_{jt}(\mathrm{K}(k^{-1}x)) \exp\left[\mu\left(H\left(xk\right)\right)\right]\ dk. \\ &= \sum_t^{d(\delta)} \left(a_{it}, U^{-\mu-2\rho}(x^{-1})\, a_{jt}\right) = \sum_t^{d(\delta)} \left(U^\mu(x)\, a_{it}, a_{jt}\right).\end{aligned}$$

Par conséquent ϕ_δ^μ est quasi- bornée, (il suffit de prendre pour semi-norme sur G, l'application $x \longmapsto \|U^\mu(x)\|$).

Montrons que l'application $f \longmapsto \phi_\delta^\mu(f)$ est une représentation irréductible de l'algèbre $\mathcal{K}_\delta^\natural(G)$. Pour toutes $f,\ g \in \mathcal{K}_\delta^\natural(G)$, on a:

$$\begin{aligned}
\phi_\delta^\mu(f*g) &= \int_A h^{\mu+\rho} F_{f*g}^\delta(h)\ dh = \int_A h^{\mu+\rho} F_f^\delta * F_g^\delta(h)\ dh \\
&= \int_A \int_A h^{\mu+\rho} F_f^\delta(h\, h'^{-1})\, F_g^\delta(h')\ dh\ dh' \\
&= \int_A \int_A (h\, h'^{-1})^{\mu+\rho}\, F_f^\delta(h\, h'^{-1})\ h'^{\mu+\rho} F_g^\delta(h')\ dh\ dh' \\
&= \phi_\delta^\mu(f)\, \phi_\delta^\mu(g)\,.
\end{aligned}$$

Donc ϕ_δ^μ est une représentation de l'algèbre $\mathcal{K}_\delta^\natural(G)$ qui est irréductible car $u_\delta \in \delta$. Ainsi la fonction ϕ_δ^μ est sphérique de type δ. Par conséquent l'application: $f \longmapsto \phi_\delta^\mu(f) = \mathcal{F}f(\phi_\delta^\mu)$ est une transformation de Fourier sphérique de type δ. □

Corollaire 2.1 *Avec les notations du théorème (2.1), si δ est la classe triviale de dimension 1, on a:*

$$\mathcal{F}f(\phi^\mu) = \Psi_\mu(f)$$

où Ψ_μ est une fonction zonale sphérique.

En effet, $\mathcal{F}f(\phi^\mu) = \int_G \int_K f(x)\, e^{\mu(H(x^{-1}k))} dx\ dk = \int_G f(x)\,(1, U^{-\mu-2\rho}(x^{-1})\,1)\ dx = \int_G f(x)\,(U^\mu(x)\,1,1)\ dx = \int_G f(x)\,\Psi_\mu(x)\ dx = \Psi_\mu(f)$,
où $\Psi_\mu : x \longmapsto (U^\mu(x)\,1,1)$ est une fonction zonale sphérique sur G.

3 Applications au groupe $SL(2,\mathbb{R})$

Considérons le groupe spécial linéaire $G = SL(2,\mathbb{R})$. Il est bien connu que G est un groupe de Lie semi-simple. Les éléments:

$$X_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\ ,\quad X_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\ ,\quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

forment une base de l'algèbre de Lie $sl(2,\mathbb{R})$ de G.

Soient $\theta,\ t,\ \xi$ trois nombres réels. Posons:

$$u_\theta = \exp\theta\, X_0\ ,\quad a_t = \exp t\, X_1\ , n_\xi = \exp \xi X_2$$

et désignons par K, A, N les trois sous-groupes de $SL(2,\mathbb{R})$ définis par

$$K = \{u_\theta\ ,\ \theta \in \mathbb{R}\} \approx \mathbb{R}/4\pi\mathbb{Z},\ A = \{a_t\ ,\ t \in \mathbb{R}\} \approx \mathbb{R} \quad \text{et} \quad N = \{n_\xi\ ,\ \xi \in \mathbb{R}\}.$$

On montre aisément que (cf [3])

$$u_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta/2 & \sin\theta/2 \\ -\sin\theta/2 & \cos\theta/2 \end{pmatrix}\ ,\quad a_t = \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix}\ ,\quad n_\xi = \begin{pmatrix} 1 & \xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que tout élément $g \in SL(2,\mathbb{R})$ se décompose de façon unique sous la forme $g = u_\theta a_t n_\xi$(décomposition d'Iwasawa) et que l'application $f : (u,\ a,\ n) \longrightarrow uan$ est un difféomorphisme analytique de $K \times A \times N$ sur $SL(2,\mathbb{R})$.

Pour tout élément $g \in SL(2,\mathbb{R})$ et $\theta \in \mathbb{R}$, soit $gu_\theta = u_{g\cdot\theta} a_{t(g,\theta)}\ n_{\xi(g,\theta)}$ la décomposition d'Iwasawà de gu_θ où $g.\theta$ désigne l'angle de la rotation dans la décomposition d'Iwasawa de gu_θ.

Si

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R}),$$

on a:

$$e^{i(g\cdot\theta)/2} = \frac{(a-ic)\cos\theta/2 + (-b+id)\sin\theta/2}{|(a-ic)\cos\theta/2 + (-b+id)\sin\theta/2|} \tag{2}$$

et

$$\begin{aligned} e^{t(g,\theta)} &= \left|(a-ic)\cos\frac{\theta}{2} + (-b+id)\sin\frac{\theta}{2}\right|^2 \\ \xi(g,\theta) &= e^{-t(g,\theta)}\left[(ab+cd)\cos\theta + 1/2\,(a^2+b^2+c^2-d^2)\sin\theta\right]. \end{aligned}$$

On rappelle que le groupe $SL(2,\mathbb{R})$ s'identifie, grâce à la transformation de Cayley, au groupe $SU(1,1) = \{g \in M_2(\mathbb{C})\,, g^* e_1 g = e_1 \text{ et } \det g = 1\}$ avec $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, et que tout $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R})$ peut s'écrire sous la forme $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar\beta & \bar\alpha \end{pmatrix}$ avec

$$\alpha = \frac{1}{2}\left[(a+b) + i\,(b+c)\right] \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1}{2}\left[(a-b) - i\,(b+c)\right]$$

Les classes de représentations unitaires irréductibles de $SO(2)$ correspondent bijectivement au groupe des caractères de $\mathbb{R}/4\pi\mathbb{Z}$ et donc à $\mathbb{Z}$.

Soient $\mathcal{X}_n \, (n \in \mathbb{Z})$ une classe de représentations unitaires irréductibles du sous-groupe compact $SO(2)$ de $G = SL(2, \mathbb{R})$ identifié à $SU(1,1)$ et $\mathcal{K}_n^{\natural}(G)$ l'espace induit par $\mathcal{X}_n$.

Théorème 3.1 *Soit μ une forme linéaire sur A. La transformation de Fourier sphérique de type $\mathcal{X}_n$ sur G est définie par:*

$$\phi_n^{\mu}(f) = \frac{1}{4\pi} \int_G \int_0^{4\pi} \left(\frac{-\beta e^{i\theta} + \alpha}{|-\beta e^{i\theta} + \alpha|} \right)^{2n} f(g) \exp\left[\mu (\log a_t)\right] dg d\theta$$

où

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \in SU(1,1) \quad (\forall f \in \mathcal{K}_n^{\natural}(G)).$$

PREUVE: Soit $f \longmapsto F_f^{<n>}$ la transformation d'Abel généralisée sur G suivant la classe $\mathcal{X}_n$. On a:

$$F_f^{<n>}(t) = \frac{e^{t/2}}{4\pi} \int_0^{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u_\theta a_t n_\xi)\, e^{-in\theta}\, d\xi\, d\theta.$$

Donc la transformation de Fourier sphérique de type $\mathcal{X}_n$ est définie par:

$$\phi_n^{\mu}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_f^{<n>}(t)\, e^{t/2} \exp\left[\mu (\log a_t)\right] dt$$

(On rappelle que si $g = u_\theta a_t n_\xi$, on a $dg = \frac{1}{4\pi} e^{t/2} dt\, d\xi$). Par conséquent

$$\begin{aligned}
\phi_n^{\mu}(f) &= \tfrac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u_\theta a_t n_\xi)\, \mathcal{X}_n(u_{-\theta})\, e^t \exp\left[\mu (\log a_t)\right]\, d\theta\, dt\, d\xi \\
&= \int_G f(g)\, \mathcal{X}_n(\mathrm{K}(g^{-1})) \exp\left[\mu (\log a_t)\right]\, dg \\
&= \tfrac{1}{4\pi} \int_G \int_0^{4\pi} f(g)\, \mathcal{X}_n(\mathrm{K}(u_{-\theta} g^{-1} u_\theta)) \exp\left[\mu (\log a_t)\right]\, dg\, d\theta \\
&= \tfrac{1}{4\pi} \int_G \int_0^{4\pi} f(g) \exp\left[in(-\theta + g^{-1}\theta) + \mu (\log a_t)\right]\, dg\, d\theta \\
&= \tfrac{1}{4\pi} \int_G \int_0^{4\pi} f(g) \left[\exp(-ig^{-1} \cdot \theta/2 + i\theta/2)\right]^{2n} \exp\left[\mu (\log a_t)\right]\, dg\, d\theta
\end{aligned}$$

On déduit de (2) que si $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \in SU(1,1)$ on a:

$$e^{i(g \cdot \theta)/2} = \frac{\alpha e^{i\theta/2} + \beta e^{-i\theta/2}}{|\alpha e^{i\theta/2} + \beta e^{-i\theta/2}|} \tag{3}$$

En posant : $u(g,\xi) = \dfrac{\beta\xi+\alpha}{|\beta\xi+\alpha|}$ pour $\xi = e^{-i\theta}$, on a

$$\exp\left[-ig^{-1}\cdot\theta/2 + i\theta/2\right] = u\left(g^{-1}, e^{i\theta}\right).$$

Par conséquent :

$$\phi_n^{\mu}(f) = \frac{1}{4\pi}\int_G\int_0^{4\pi} u\left(g^{-1},e^{i\theta}\right)^{2n}\exp\left[\mu\left(\log a_{t(g^{-1},\theta)}\right)\right]\, dg\, d\theta.$$

□

Théorème 3.2 *Soit $\omega \in G$ et $u_\alpha\, a_s\, u_\beta$ une décomposition de Cartan de ω. Pour toute fonction $f \in \mathcal{K}_n^{\natural}(G)$ on a :*

$$\phi_n^{\mu}({}_{\omega}f) = \frac{1}{e^{in(\alpha+a_s\cdot\beta)+s/2}}\phi_n^{\mu}(f).$$

où ${}_{\omega}f$ est définie pour tout $x \in G$ par ${}_{\omega}f(x) = f(\omega^{-1}x)$et $a_s\cdot\beta$ est l'angle de la rotation dans la décomposition d'Iwasawa de $a_s\, u_\beta$.

PREUVE: Considérons la transformation d'Abel généralisée $f \longmapsto F_f^{<n>}$ suivant la classe $\mathcal{X}_n$. Montrons que pour toute $f \in \mathcal{K}_n^{\natural}(G)$ et $t \in \mathbb{R}$ on a :

$$F_{{}_{\omega}f}^{<n>}(t) = e^{s/2}\mathcal{X}_n\left(u_{-\alpha-a_s\cdot\beta}\right)\ F_f^{<n>}(t) \qquad (\forall\omega = u_\alpha a_s u_\beta \in G).$$

$$\begin{aligned}
F_{{}_{\omega}f}^{<n>}(t) &= \frac{e^{t/2}}{4\pi}\int_0^{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} {}_{\omega}f\left(u_\theta a_t n_\xi\right)\mathcal{X}_n\left(u_\theta^{-1}\right)\, d\xi\, d\theta \\
&= \frac{e^{t/2}}{4\pi}\int_0^{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\omega^{-1}u_\theta a_t n_\xi\right)\mathcal{X}_n\left(u_{-\theta}\right)\, d\xi\, d\theta \\
&= \frac{e^{t/2}}{4\pi}\int_0^{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(u_{-\beta}a_s^{-1}u_{-\alpha}u_\theta a_t n_\xi\right)\mathcal{X}_n\left(u_{-\theta}\right)\, d\xi\, d\theta
\end{aligned}$$

Par un calcul matriciel direct on a :

$$\begin{aligned}
u_{-\beta}a_s^{-1}u_{-\alpha}u_\theta a_t n_\xi &= u_{a_s^{-1}\cdot(\theta-\alpha)-\beta}\, a_{t\left(a_s^{-1},\theta-\beta\right)}\, n_{\xi\left(a_s^{-1},\theta-\beta\right)}\, a_t n_\xi \\
&= u_{\theta'}\, a_{t'}\, n_{\xi'}\, a_t\, n_\xi \\
&= u_{\theta'}\, a_{t'}\, a_{t'}\, a_t^{-1} n_{\xi'}\, a_t\, n_\xi \;=\; u_{\theta'}\, a_{t'+t}\, n_{\xi' e^{-1}+\xi}
\end{aligned}$$

avec $\theta' = a_s^{-1}\cdot(\theta-\alpha)-\beta$; $t' = t\left(a_s^{-1},\theta-\beta\right)$ et $\xi'\left(a_s^{-1},\theta-\beta\right)$.

Par conséquent

$$\begin{aligned} F_{\omega}^{<n>}(t) &= \frac{e^{t/2}}{4\pi}\int_0^{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(u_{\theta'}a_{t'\prime+t}n_{\xi' e^{-t}+\xi}\right)\mathcal{X}_n\left(u_{-\theta}\right)\,d\xi\,d\theta. \\ &= \frac{e^{t/2}}{4\pi}\int_0^{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(u_{\theta}a_t n_{\xi}\right)e_e^{-in[\alpha+a_s\theta+\beta]}e^{t\left(a_s^{-1},\gamma\right)}\,d\xi\,d\theta \end{aligned}$$

avec $\gamma = a_s.(\theta+\beta)+\alpha$. Comme $a_s = \begin{pmatrix} e^{s/2} & 0 \\ 0 & e^{-s/2} \end{pmatrix}$, on a:

$$e^{t\left(a_s^{-1},\gamma\right)} = e^{s/2} \text{ et } e^{-in\,a_s.\theta} = e^{-s}e^{-in\theta} \text{ (d'après (3))}$$

Ainsi:

$$\begin{aligned} F_{\omega}^{<n>}(t) &= \frac{e^{t/2}}{4\pi}.e^{-in\left(\alpha+a_s.\beta\right)}\int_0^{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\left(u_\theta a_t n_\xi\right)\,e^{-s/2}\right)\mathcal{X}_n\left(u_{-\theta}\right)\,d\xi\,d\theta. \\ &= e^{-s/2}\mathcal{X}_n\left(u_{-\alpha-a_s.\beta}\right)\,F_{\omega}^{<n>}(t). \end{aligned}$$

D'après le théorème (2.1) on a:

$$\begin{aligned} \phi_n^{\mu}\left({}_{\omega}f\right) &= \frac{1}{e^{s/2}}\mathcal{X}_n\left(u_{-\alpha-a_s.\beta}\right)\phi_n^{\mu}(f) \\ &= \frac{1}{e^{in\left(\alpha+a_s.\beta\right)+s/2}}\phi_n^{\mu}(f). \end{aligned}$$

□

Remerciements: Nous remercions l'expert anonyme pour ses conseils et suggestions qui ont permis d'améliorer le présent travail.

Références

[1] F. Bruhat. Distribution sur un groupe localement compact et application à l'étude des représentations des groupes p-adiques. *Bull. Soc. Math. France*, 89:43–75, 1961.

[2] K. Kangni et S. Touré. Transformation de fourier sphérique de type δ. *Ann. Math. Blaise Pascal*, 3:117–133, 1996.

[3] M. Sugiura. *Unitary Representations and Harmonic Analysis.* Kodansha Scientific Books, New-York, 1975.

[4] G. Warner. *Harmonic Analysis on Semi-simple Groups.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1972.

Kinvi Kangni
Université de Cocody
UFR-Mathématiques
et Informatique
22 BP. 1214
Abidjan 22
Côte d'Ivoire

Saliou Touré
Université de Cocody
UFR-Mathématiques
et Informatique
22 BP. 1214
Abidjan 22
Côte d'Ivoire