ANNALES MATHÉMATIQUES BLAISE PASCAL

A. EL KINANI

M. OUDADESS

Applications bi-semi-linéaires et commutativité dans les algèbres de Banach involutives

Annales mathématiques Blaise Pascal, tome 6, n° 2 (1999), p. 15-20

<http://www.numdam.org/item?id=AMBP_1999__6_2_15_0>

Ann. Math. Blaise Pascal, Vol. 6, N° 2, 1999, pp.15-20

APPLICATIONS BI-SEMI-LINEAIRES ET COMMUTATIVITE DANS LES ALGEBRES DE BANACH INVOLUTIVES

A. EL KINANI, M. OUDADESS

Abstract: We examine involutive Banach algebras satisfying an analogous inequality of Le Page.We consider, for that, bi-semi-linear mappings and use Liouville theorem for harmonic functions.

Résumé: Nous examinons des algèbres de Banach involutives vérifiant l'analogue de l'inégalité de Le Page; ce en considérant des applications bi-semi-linéaires et en utilisant le théorème de Liouville pour les fonctions harmoniques.

INTRODUCTION.

Le théorème de Le Page sur la commutativité des algèbres de Banach A vérifiant la condition (C): $\|xy\| \leq \alpha \|yx\|$ pour tous x, y dans A, a été généralisé dans beaucoup de directions. L'une d'elles consiste à considérer dans (C) une application bilinéaire à gauche. Dans tous les cas, l'ingrédient de base est le théorème de Liouville pour les fonctions holomorphes. Très peu de résultats ont été obtenus dans les algèbres de Banach involutives. Ceci s'explique par le fait que l'involution ne conserve pas l'holomorphie. Nous adoptons ici une approche par les applications bi-semi-linéaires et appliquons le théorème de Liouville pour les fonctions harmoniques. Nous obtenons des résultats de deux types; des résultats de commutativité mais surtout des résultats qui assurent qu'un endomorphisme semi-linéaire est en fait une involution généralisée. On notera par $C(A)$ le centre de A; par ρ le rayon spectral et υ le rayon numérique respectivement.

I. RESULTATS PRINCIPAUX.

Voici le théorème général de cet article.

Théorème I.1: Soient $(A, \|.\|)$ une algèbre de Banach complexe, M un espace vectoriel topologique séparé qui est un A-module à gauche topologique, X un espace vectoriel topologique séparé, $h : A \times M \to X$ une application bi-semi-linéaire continue, (E, p) un espace vectoriel normé, $S : X \to E$ une application linéaire continue et $q : M \to R^+$ une application quelconque. Si pour tout $a \in A$ et tout $m \in M$,

$$p(S(h(a,m))) \leq q(am) \qquad (1)$$

alors

(i) $S(h(b,am)) = S(h(ba,m)),\ \forall a,b \in A, \forall m \in M$.

(ii) Si A admet une unité approchée à gauche $(e_i)_i$, alors

$$\lim_i S(h(e_i, am)) = S(h(a,m)), \forall a \in A, \forall m \in M.$$

(iii) Si **(1)** est vérifiée pour tout $a \in A^1 = A \oplus \mathbb{C}$ et tout $m \in M$, alors

$$S(h(e,am)) = S(h(a,m)), \forall a \in A, \forall m \in M;$$ où e est l'unité de A^1.

Preuve: Si A est non unitaire, on travaille dans $A^1 = A \oplus \mathbb{C}$. Notons que, dans ce cas M est aussi un A^1-module topologique à gauche.
(i) Pour a et b dans A et m dans M, on considère l'application de $\mathbb{C}$ dans E définie par

$$f(\lambda) = S\left(h\left(be^{-\lambda a},\ e^{\lambda a}m\right)\right).$$

On vérifie que, pour tout $\varphi \in E'$, $\varphi \circ f$ est harmonique . De plus elle est bornée car

$$|\varphi(f(\lambda))| \le \|\varphi\|\, q(bm),\ \ \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Elle est donc constante par le théorème de Liouville. D'où, par le théorème de Hahn-Banach,

$$f(\lambda) = f(0),\ \ \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Le résultat s'obtient alors, en dérivant par rapport à la partie réelle de λ (ou la partie imaginaire).
(ii) Elle découle de l'égalité $S(h(e_i, am)) = S(h(e_i a, m))$, pour tout i , vu que S et h sont continues.
(iii) Il suffit de prendre $b = e$ dans **(i)**.

Remarque: L'arbitre a remarqué qu'on peut utiliser le théorème de Liouville sur les fonctions entières vu que les fonctions $\overline{\varphi \circ f} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\varphi \in E'$, sont holomorphes; et qu'on peut aussi utiliser la fonction holomorphe $k(\lambda) = S\left(h\left(be^{-\bar{\lambda} a}, e^{\bar{\lambda} a} m\right)\right)$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Remarque: Dans le cas où h est bilinéaire, les fonctions f et g sont holomorphes. Les résultats s'appliquent alors à tout produit sur l'algèbre A. Cette situation a été examinée dans [3] et dans un cas particulier dans [4].

Remarque: Si M est un A-module à droite, on obtient des conclusions analogues sous la condition:

$$p(S(h(a,m))) \le q(ma) \qquad \textbf{(2)}$$

Remarque: Au lieu d'une norme, on peut prendre dans le théorème II.1, une semi-norme p. Avec la même preuve et en utilisant le théorème de Hahn-Banach, on a
(i) $p[S(h(b,am)) - S(h(ba,m))] = 0,\ \forall a,b \in A, \forall m \in M$
(ii) Si A admet une unité approchée à gauche $(e_i)_i$, alors

$$p\left[\lim_i S(h(e_i, am)) - S(h(a,m))\right] = 0, \forall a \in A, \forall m \in M.$$

(iii) Si (1) est vérifiée pour tout $a \in A^1$ et tout $m \in M$, alors

$$p[S(h(e,am)) - S(h(a,m))] = 0, \forall a \in A, \forall m \in M$$; où e est l'unité de A^1.

En vue des applications, nous particularisons l'application h.

Corollaire I.2: Si $X = B$ est une algèbre de Banach de produit Δ, $\varphi : A \to B$ et $\psi : M \to B$ des applications semi-linéaires et $h(a,m) = \varphi(a)\Delta\psi(m)$, alors les conclusions du théorème précédent sont:

(i) $S(\varphi(b)\Delta\psi(am)) = S(\varphi(ba)\Delta\psi(m)), \forall a,b \in A, \forall m \in M$

(ii) Si A admet une unité approchée à gauche $(e_i)_i$, alors $\lim_i S(\varphi(e_i)\Delta\psi(am)) = S(\varphi(a)\Delta\psi(m)), \forall a \in A, \forall m \in M$.

(iii) Si **(1)** est vérifiée pour tout $a \in A^1$ et tout $m \in M$, alors $S(\varphi(e)\Delta\psi(am)) = S(\varphi(a)\Delta\psi(m)), \forall a \in A, \forall m \in M$; où e est l'unité de A^1.

En particularisant plus, on obtient le résultat suivant que nous appliquons au cas des involutions.

Corollaire I.3: On suppose que $M = A$, que A et B sont unitaires d'unités respectives e et e' et que S est l'application identité.

1) Si $\varphi(e) = e'$, alors $\psi(ab) = \varphi(a)\Delta\psi(b)$. Si de plus $\psi(e) = e'$, alors $\varphi = \psi$. Dans ce cas φ est un morphisme d'anneaux semi-linéaire.

2) Si $\varphi = \psi$, $u\Delta v = v.u$ et $\varphi(e) = e'$, alors $\varphi(ab) = \varphi(b)\varphi(a)$

L'assertion **(iii)** du corollaire I.2 nous donne une version plus générale que l'analogue d'un résultat de G. Niestegge ([8]).

Corollaire I.4: Soient φ, $\psi : A \to A$ deux applications semi-linéaires continues. Alors les assertions suivantes sont équivalentes

(1) $\|\psi(y)\varphi(x) + \psi(y)\| \leq \alpha\ \|xy + y\|$, pour tous x, y dans A et un $\alpha > 0$ donné.

(2) $\psi(xy) = \psi(y)\varphi(x)$ pour tous $x, y \in A$.

Remarques: 1) Dans le cas où φ est l'application identité, alors ψ est ce qu'on peut appeler un antimultiplicateur à droite.

2) Si $\varphi = \psi$, c'est ce qu'on peut appeler un antimorphisme généralisé.

3) Si pour un endomorphisme semi-linéaire et continu $x \mapsto x^*$ sur l'espace vectoriel A, on a $\|y^*x^* + y^*\| \leq \alpha\ \|xy + y\|$ et si il vérifie $(x^*)^* = x$, pour tout $x \in A$, alors c'est une involution d'algèbre.

Un autre cas particulier est le suivant

Corollaire I.5: Soit $\varphi : A \to A$ une application semi-linéaire continue. Si pour tous $a, b \in A$, on a:

$$p(S(\varphi(ba))) \leq q(ab), \qquad \textbf{(3)}$$

alors

(i) $S(\varphi(yzx)) = S(\varphi(zxy)), \ \forall x, y, z \in A$

(ii) Si A admet une unité approchée à gauche $(e_i)_i$, alors
$$\lim_i S(\varphi(xye_i)) = S(\varphi(yx)), \forall\, x,y \in A.$$
(iii) Si **(3)** est vérifiée pour tout $a \in A^1$ et tout $b \in A$, alors
$$S(\varphi(xy)) = S(\varphi(yx)), \forall x,y \in A.$$

Remarque: Si on prend $S = Id$ et φ injective, alors
1) $A^2 \subset C(A)$ par (i). C'est l'analogue d'un résultat de [9].
2) L'assertion (ii) implique que A est commutative. C'est l'analogue d'un résultat de [9]
3) L'assertion **(iii)** implique que A est commutative.
4) Si on prend $\varphi(\varphi(x)) = x$, pour tout $x \in A$, on retombe sur la condition de Le Page

Vu que $\rho(ab) = \rho(ba)$, la condition
$$p(S(\varphi(x)) \leq \alpha\,\rho(x), \ \forall x \in A \qquad \textbf{(4)}$$
implique
$$p(S(\varphi(ba)) \leq \alpha\,\rho(ab)\ , \ \forall a \in A^1, \forall b \in A \qquad \textbf{(5)}$$

Et l'on obtient le résultat suivant

Corollaire I.6: L'une quelconque des conditions suivantes implique $\varphi(xy) = \varphi(yx)$, pour tous $x,y \in A$.
1) $p(\varphi(x)) \leq \alpha\,\rho(x), \forall x \in A$
2) $\upsilon(\varphi(x)) \leq \alpha\,\rho(x), \forall x \in A$
3) $\|\varphi(x)\| \leq \alpha\,\rho(x), \forall x \in A$

L'assertion **(iii)** du corollaire I.5 nous donne l'analogue du résultat principal de G. Niestegge ([8]) pour les applications semi-linéaires.

Corollaire I.7: Soit $\varphi : A \to A$ une application semi-linéaire continue. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.
(1) Il existe $k > 0$ tel que $\|\varphi(xy + y\| \leq k\|yx + y\|, \forall x,y \in A$
(2) $\varphi(xy) = \varphi(yx), \forall x,y \in A$.

II. APPLICATIONS AUX ALGEBRES DE BANACH INVOLUTIVES

Les résultats de la section I. s'appliquent même quand on n'a pas une involution d'algèbre.

La proposition suivante est une réécriture, dans le cas où S est l'identité, du corollaire I.2 dans le cas des endomorphismes semi-linéaires d'espaces vectoriels.

Proposition II. 2: Soient $(a,b) \mapsto ab$ et $(a,b) \mapsto a\Delta\, b$ deux produits d'algèbres de Banach sur A et soient $*$ et # deux endomorphismes semi-linéaires d'espaces vectoriels sur A. Si

$$p(a^*\Delta\ b^\#) \leq q(ab), \forall a,b \in A \qquad (6)$$

alors

(i) $x^*\Delta(yz)^\# = (xy)^*\ \Delta\, z^\#\ ,\ \forall x,y,z \in A.$

(ii) Si A admet une unité approchée à gauche $(e_i)_i$ pour le premier produit, alors $\lim\limits_{i} e_i^*\ \Delta(xy)^\# = x^*\Delta y^\#$.

(iii) Si **(6)** est vérifiée pour tout $x \in A^1$ et tout $y \in A$, alors $e^*\ \Delta\ (xy)^\# = x^*\Delta\, y^\#$; où e est l'unité de A^1.

Conséquences:

1) Si de plus A est une algèbre unitaire pour chacun des deux produits, d'unités respectifs e et e_Δ si $e^* = e_\Delta = e^\#$, alors les deux endomorphismes coïncident, par (i).

2) Si les deux endomorphismes coïncident et si $e^* = e_\Delta$, alors $(yz)^* = y^*\ \Delta\ z^*$, pour tous y,z de A. Si les deux produits coïncident alors $(yz)^* = y^*z^*$, pour tous y,z de A; mais que si Δ est le produit opposé du premier, on a $(yz)^* = z^*\, y^*$, pour tous y,z de A.

Remarque: La conséquence **2)** montre que si $x \mapsto x^*$ est un endomorphisme semi-linéaire d'espaces vectoriels tel que $e^* = e$, alors $(ab)^* = b^*a^*$ si, et seulement si $\|b^*a^*\| \leq \alpha\ \|a.b\|$, pour un $\alpha > 0$ et tous a,b de A. Ceci améliore le corollaire 8 de Baker et Pym ([2]) où ceux-ci considèrent la condition

$$\|b^*a^* - d^*c^*\| \leq \alpha\ \|ab - cd\|, \forall a,b,c,d \in A.$$

Remarques: Supposons qu'on ait un endomorphisme semi-linéaire d'espaces vectoriels. continu tel que

$$\| uv\| \leq \alpha\ \| u^*v^*\|,\ \forall u,v \in A \qquad (7)$$

1) Si on suppose $(x^*)^* = x$, pour tout x dans A, alors (7) est équivalente à

$$\|u^*v^*\| \leq \alpha\ \|uv\|,\ \forall u,v \in A \qquad \mathbf{(8)}$$

et on a toutes les conséquences de la proportion précédente.

2) Si on suppose $(xy)^* = y^*x^*$, alors (7) devient

$$\| uv\| \leq \alpha\ \| vu\|,\ \forall u,v \in A \qquad (9)$$

On se ramène ainsi à la condition de Le Page.

3) La condition (7) n'implique pas, en général, la commutativité. En effet elle est toujours vérifiée pour un endomorphisme semi-linéaire d'espaces vectoriels isométrique tel que $(xy)^* = x^*y^*$. C'est le cas par exemple dans la complexifiée de l'algèbre des quaternions.

Une application du corollaire I.5, dans le cas des endomorphismes semi-linéaires d'espaces vectoriels continus est la suivante.

Proposition II. 3: Soit $x \mapsto x^*$ un endomorphisme semi-linéaire d'espaces vectoriels continu sur A. Si

$$p\left((ba)^*\right) \leq q(ab), \quad \forall a, b \in A \qquad \textbf{(10)}$$

alors

(i) $(yzx)^* = (zxy)^*, \quad \forall x, y, z \in A$

(ii) Si A admet une unité approchée à gauche $(e_i)_i$, alors $\lim\limits_i (xye_i)^* = (yx)^*, \forall x, y \in A$

(iii) Si **(10)** est vérifié pour tout $a \in A^1$ et tout $b \in A$, alors $(xy)^* = (yx)^*$.

REFERENCES

[1] **F. F. Bonsall and J. Duncan:** Numerical ranges of operators on normed spaces and of elements of normed algebras. London Math. Soc. Lecture Note Series, N° 2 (1971).
[2] **J. W. Baker and J. S. Pym:** Remark on continuous bilinear mappings. Proc. Edinburgh. Math. Soc. (2) 17, (1970-1971), 245-248.
[3] **A. El Kinani and M. Oudadess:** Bilinear mappings and commutativity in Banach algebras, Tübinger Berichte Zur Functionalanalysis 6 (1996/97) 54-58.
[4] **A El Kinani and M. Oudadess:** Un Critère généralisé de Le Page et commutativité. C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada. V. XVIII, N. 2, 3, April-June 1996 avril-juin.
[5] **R. A. Hirschfeld and W. Zelazko:** On spectral norm Banach algebras. Bull. Acad. Polonaise. Sc. Math. Astr. Phys. Vol XVI, n° 3, (1968), 195-199.
[6] **C. Le Page:** Sur quelques conditions impliquant la commutativité dans les algèbres de Banach . C. R. A. S. Paris, Ser. A-B; 265, (1967), A 235-A 237.
[7] **Gh. Mocanu:** A remark on a commutativity criterion in Banach algebras. Stud. Cerc. Mat. 21, (1969), 947-952.
[8] **G. Niestegge:** A note on criteria of Le Page and Hirschfeld-Zelazko for the commutativity of Banach algebras. Studia . Math. T. LXXIX, (1984), 87-90.
[9] **M. Oudadess:** Commutativité de certaines algèbres de Banach. Bol. Soc. Math. Mexicana, Vol. 28 , n°1, (1983), 9-14.

Ecole Normale Supérieure de Takaddoum. B.P. 5118, 10 105 Rabat, Maroc