ANNALES MATHÉMATIQUES BLAISE PASCAL

TAOUFIQ BENKIRAN

Étude d'un système de contrôle optimal perturbé non classique

Annales mathématiques Blaise Pascal, tome 4, n° 2 (1997), p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=AMBP_1997__4_2_1_0>

© Annales mathématiques Blaise Pascal, 1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales mathématiques Blaise Pascal » (http://math.univ-bpclermont.fr/ambp/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Math. Blaise Pascal, Vol. 4, N° 2, 1997, pp.1-9

ETUDE D'UN SYSTEME DE CONTROLE OPTIMAL PERTURBE NON CLASSIQUE

TAOUFIQ BENKIRAN
UNIV.CADI AYYAD, FAC.SCIENCES SEMLALIA,
U.F.R. MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES,
B.P.S.15, 40002, MARRAKECH,
MAROC

Abstract. This article deals with the study of existence and behavior of the optimal control and the state of a perturbed boundary optimal control linear system which arises in aerodynamics.

Résumé : Dans cet article, nous étudions (sous certaines conditions) l'existence et le comportement de la solution d'un problème de contrôle optimal perturbé non classique qui apparaît naturellement en aérodynamique.

0. Introduction et position du problème :

Dans tout ce qui suit Ω désignera un ouvert borné de R^n, de frontière $\Gamma = \partial\Omega$ variété indéfiniment différentiable de dimension (n-1), Ω étant localement d'un seul côté de Γ. Soit U_{ad} un sous-espace fermé de $L^2(\Gamma)$.
Pour $v \in L^2(\Gamma)$, on considère le problème aux limites perturbé suivant :

$$(S_\varepsilon)(v) \qquad \begin{cases} -\triangle y_\varepsilon(v) = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial}{\partial\nu} y_\varepsilon(v) + \varepsilon y_\varepsilon(v) = v \quad \text{sur } \Gamma \\ y_\varepsilon(v) \in H^1(\Omega) \end{cases}$$

Notons par T_ε l'application :

$$(1) \qquad \begin{aligned} T_\varepsilon :\ L^2(\Gamma) &\to L^2(\Gamma) \\ v &\mapsto y_\varepsilon(v)_\Gamma \end{aligned}$$

où $y_\varepsilon(v)_\Gamma$ désigne la trace de la solution $y_\varepsilon(v)$ du problème $(S_\varepsilon)(v)$ sur $\Gamma = \partial\Omega$.
On considère aussi le problème de contrôle optimal suivant :

$$(m_\varepsilon) \qquad J_\varepsilon(u_\varepsilon) = \operatorname{Inf}\{J_\varepsilon(v); \quad v \in U_{ad}\}$$

La fonction coût J_ε est donnée par :

$$(2) \qquad J_\varepsilon(v) = \|T_\varepsilon(v) - z\|^2 = < T_\varepsilon(v) - z, T_\varepsilon(v) - z >$$

$\|.\|$ désigne la norme dans l'espace $L^2(\Gamma)$, z un élément non nul de $L^2(\Gamma)$.
Notons par :

$$(3) \qquad U_0 = \left\{ v \in L^2(\Gamma); \int_\Gamma v d\Gamma = 0 \right\}, \qquad V = \left\{ y \in H^1(\Omega); \int_\Gamma y_\Gamma d\Gamma = 0 \right\}$$

Dans cet article, nous commençons par l'étude du comportement de la solution $y_\varepsilon(v)$ du problème $(S_\varepsilon)(v)$ (paragraphe I), nous étudions aussi l'existence, l'unicité du contrôle u_ε dans U_{ad} et le comportement de la fonction $(u_\varepsilon, y_\varepsilon(u_\varepsilon))$ dans l'espace $L^2(\Gamma)\times H^1(\Omega)$ dans un premier temps lorsque U_{ad} est un sous-espace de U_0 (paragraphe II), puis lorsque U_{ad} est un sous espace de $L^2(\Gamma)$ tel que $U_{ad}\cap U_0 \neq U_{ad}$ (paragraphe III). Nous terminons cet article par des remarques et des conclusions.

I. Etude du comportement de la solution du problème $(S_\varepsilon)(v)$.

Nous consacrons ce premier paragraphe à l'énoncé et la démonstration de certains résultats utilisés dans la suite.

Lemme 1 (cf. [6]) :

Pour $\rho \geq 0$, nous considérons l'application :

$$(4) \qquad \begin{aligned} \Psi_\rho \ &: H^1(\Omega) \longrightarrow R^+ \\ y &\to \sqrt{\|\nabla y\|^2_{L^2(\Omega)} + \rho \int_\Gamma |y_\Gamma|^2 \, d\Gamma} \end{aligned}$$

(i) Ψ_0 est une norme dans V équivalente à la norme usuelle $\|.\|_{H^1(\Omega)}$ dans $H^1(\Omega)$.

(ii) Si $\rho > 0$,l'application Ψ_ρ est une normedans $H^1(\Omega)$ équivalente à la norme usuelle $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$.

(c.à.d. il existe deux constantes A et B telles que: $A\|y\|_{H^1(\Omega)} \leq \Psi_\rho(y) \leq B\|y\|_{H^1(\Omega)}$ pour $y \in H^1(\Omega)$).

Proposition 1 :

Pour tout v de l'espace $L^2(\Gamma)$ et $\varepsilon > 0$, le problème $(S_\varepsilon)(v)$ admet une seule solution $y_\varepsilon(v)$ donnée par :

$$(5) \qquad y_\varepsilon(v) = \frac{1}{\varepsilon\,|\Gamma|} \int_\Gamma v d\Gamma + y_\varepsilon(P_0(v))$$

La fonction $(y_\varepsilon(v) - \frac{1}{\varepsilon|\Gamma|} \int_\Gamma v d\Gamma)$ converge dans l'espace $H^1(\Omega)$ vers la solution $y_0(P_0(v)) = y_0$ du problème $(Q_0)(P_0(v))$:

$$(Q_0)(P_0(v)) \qquad \begin{cases} -\triangle\, y_0 = 0 & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial}{\partial\nu} y_0 = P_0(v) & \text{sur } \Gamma \\ y_0 \in V \end{cases}$$

Et nous avons :

$$(6) \qquad \left\| y_\varepsilon(v) - \frac{1}{\varepsilon\,|\Gamma|} \int_\Gamma v d\Gamma - (y_{0+} + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \ldots + \varepsilon^k y_k) \right\|_{H^1(\Omega)} \leq C_k \sqrt{\varepsilon^{k+1}}$$

où pour $k \geq 1$, $y_k(v) = y_k$ désigne la solution du problème $(Q_k)(v)$:

$$(Q_k)(v) \qquad \begin{cases} -\triangle\, y_k = 0 & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial}{\partial\nu} y_k = -y_{k-1} & \text{sur } \Gamma \\ y_k \in V \end{cases}$$

où $P_0(v) = v - \frac{1}{|\Gamma|}\int_\Gamma v d\Gamma$ désigne la projection orthogonale de v sur l'espace U_0 et C_k une constante positive indépendante de ε.

Preuve :

Pour $\varepsilon > 0$ et $v \in L^2(\Gamma)$, le problème $(S_\varepsilon)(v)$ admet une seule solution $y_\varepsilon(v)$(cf. [2], [6]).Nous avons donc :

$$0 = \int_\Omega \Delta y_\varepsilon(v).1dx = \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial\nu} y_\varepsilon(v)_\Gamma d\Gamma = \int_\Gamma (v - \varepsilon T_\varepsilon(v))d\Gamma$$

c.à.d.

$$\int_\Gamma T_\varepsilon(v)d\Gamma = \frac{1}{\varepsilon}\int_\Gamma v d\Gamma \tag{7}$$

Cette égalité nous permet de postuler le développement asymptotique de $y_\varepsilon(v)$ suivante :

$$y_\varepsilon(v) = \varepsilon^{-1}y_{-1}(v) + y_0(v) + \varepsilon y_1(v) + \varepsilon^2 y_2(v) + ... \tag{8}$$

En reportant ce développement dans l'équation $(S_\varepsilon)(v)$ et en groupant les termes en ε, nous obtenons :

*$y_{-1}(v) = y_{-1}$ est la solution du problème $(Q_{-1})(v)$:

$$(Q_{-1})(v) \qquad \begin{cases} -\Delta y_{-1} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial}{\partial\nu} y_{-1} = 0 & \text{sur } \Gamma \\ \int_\Gamma y_{-1} d\Gamma = \int_\Gamma v d\Gamma & \end{cases}$$

c.à.d.

$$y_{-1} = \frac{1}{|\Gamma|}\int_\Gamma v d\Gamma \tag{9}$$

* $y_0(P_0(v)) = y_0$ est la solution du problème $(Q_0)(P_0(v))$.

Et pour tout $k \geq 1$, $y_k(v) = y_k$ est la solution du problème $(Q_k)(v)$.

D'autre part la fonction $\Phi_{\varepsilon,k}(v)$ définie par :

$$\Phi_{\varepsilon,k}(v) = \Phi_{\varepsilon,k} = y_\varepsilon(v) - \frac{1}{\varepsilon|\Gamma|}\int_\Gamma v d\Gamma - (y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + ... + \varepsilon^k y_k)$$

est la solution du problème $(S_{\varepsilon,k})(v)$:

$$(S_{\varepsilon,k})(v) \qquad \begin{cases} -\Delta \Phi_{\varepsilon,k} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial}{\partial\nu}\Phi_{\varepsilon,k} + \varepsilon\Phi_{\varepsilon,k} = -\varepsilon^{k+1}y_k & \text{sur } \Gamma \\ \Phi_{\varepsilon,k} \in V & \end{cases}$$

Grâce à la formulation variationnelle du problème $(S_{\varepsilon,k})(v)$ et l'inégalité de Poincaré, nous obtenons alors :

$$\|\nabla\Phi_{\varepsilon,k}\|^2_{L^2(\Omega)} + \varepsilon\|\Phi_{\varepsilon,k\Gamma}\|^2 \leq \frac{\varepsilon^{k+1}}{2}(\|\Phi_{\varepsilon,k\Gamma}\|^2 + \|y_{k\Gamma}\|^2)$$

c.à.d.

$$\|\nabla\Phi_{\varepsilon,k}\|_{L^2(\Omega)} \leq \|y_{k\Gamma}\| \sqrt{\varepsilon^{k+1}}$$

Par conséquent, pour k ≥ 0, il existe une constante C_k indépendante de ε telle que :

$$\|\Phi_{\varepsilon,k}\|_{H^1(\Omega)} \leq C_k\sqrt{\varepsilon^{k+1}} \tag{10}$$

Remarques 1 :
(i) Si v $\in U_0$ (c.à.d. $P_0(v) = v$), $y_\varepsilon(v)$ converge dans l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ vers la solution $y_0(v)$ du problème aux limites $(Q_0)(v)$:

$$(Q_0)(v) \qquad \begin{cases} -\Delta\, y_0(v) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial}{\partial\nu} y_0(v) = v & \text{sur } \Gamma \\ y_0(v) \in V \end{cases}$$

(ii) Si v $\notin U_0$ (c.à.d. $\int_\Gamma v d\Gamma \neq 0$), alors $T_\varepsilon(v)$ n'est pas bornée dans l'espace $L^2(\Gamma)$.
Lemme 2 :
L'application T_ε est linéaire, continue, injective, auto adjoint et pour tout v de $L^2(\Gamma)$:

$$T_\varepsilon(v) = \frac{1}{\varepsilon\,|\Gamma|}\int_\Gamma v d\Gamma + y_\varepsilon(P_0(v))_\Gamma \tag{11}$$

où $P_0(v)$ désigne la projetion orthogonale de v sur l'espace U_0.
Preuve :
* La formulation variationnelle du problème $(S_\varepsilon)(v)$ s'écrit :

$$\|\nabla y_\varepsilon(v)\|^2_{L^2(\Omega)} + \varepsilon\,\|T_\varepsilon(v)\|^2 = \int_\Gamma vT_\varepsilon(v)d\Gamma \leq \|T_\varepsilon(v)\| \cdot \|v\|$$

donc T_ε est continue.
* Soit v $\in L^2(\Gamma)$ telle que: $T_\varepsilon(v) = 0$, alors $y_\varepsilon(v)$ est la solution du problème $(D_\varepsilon)(v)$:

$$(D_\varepsilon)(v) \qquad \begin{cases} -\Delta\, y_\varepsilon(v) = 0 & \text{dans } \Omega \\ y_\varepsilon(v)_\Gamma = T_\varepsilon(v) = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

par conséquent $y_\varepsilon(v) = 0$ c.à.d. v = 0.
* Soit (v, w) $\in L^2(\Gamma)\times L^2(\Gamma)$:

$$\int_\Omega \nabla y_\varepsilon(v).\nabla y_\varepsilon(w)dx = \langle T_\varepsilon(v), w - \varepsilon T_\varepsilon(w)\rangle = \langle T_\varepsilon(w), v - \varepsilon T_\varepsilon(v)\rangle$$

Alors : $\langle T_\varepsilon(v), w\rangle = \langle v, T_\varepsilon(w)\rangle$

* Soit $v = (v_0 + v_1) \in L^2(\Gamma)$, avec $v_0 = P_0(v) = v - \frac{1}{|\Gamma|}\int_\Gamma v d\Gamma$ et $v_1 = \frac{1}{|\Gamma|}\int_\Gamma v d\Gamma$, alors :

$$T_\varepsilon(v) = T_\varepsilon(v_0+v_1) = T_\varepsilon(v_0) + T_\varepsilon(v_1)$$

avec $T_\varepsilon(v_1) = \frac{1}{\varepsilon|\Gamma|}\int_\Gamma v d\Gamma$ et $T_\varepsilon(v_0) = T_\varepsilon(P_0(v))$.

Remarques 2 :

(i) Posons, pour $z \in L^2(\Gamma)$, $z_0 = P_0(z) = z - \frac{1}{|\Gamma|}\int_\Gamma z d\Gamma$ et $z_1 = \frac{1}{|\Gamma|}\int_\Gamma z d\Gamma$, alors la fonction coût J_ε devient :

$$J_\varepsilon(v) = \|T_\varepsilon(v_0) - z_0\|^2 + \|T_\varepsilon(v_1) - z_1\|^2 = \|T_\varepsilon(v_0) - z_0\|^2 + \frac{1}{|\Gamma|\,\varepsilon^2}\left[\int_\Gamma (v - \varepsilon z)\, d\Gamma\right]^2$$

(ii) Si $v \notin U_0$, le problème $(S_0)(v)$:

$$(S_0)(v) \qquad \begin{cases} -\Delta y_0 = 0 & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial}{\partial\nu} y_0 = v & \text{sur } \Gamma \\ y_0 \in H^1(\Omega) \end{cases}$$

n'admet pas de solution.

(iii) Si $v \in U_0$ (c.à.d. $P_0(v) = v$), le problème $(S_0)(v)$ admet une infinité de solutions, $y_{-1} = 0$ et $y_\varepsilon(v)$ converge dans $H^1(\Omega)$ vers y_0 vérifiant :

$$(Q_0)(v) \qquad \begin{cases} -\Delta y_0 = 0 & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial}{\partial\nu} y_0 = v & \text{sur } \Gamma \\ y_0 \in V \end{cases}$$

II. Etude de l'existence et le comportement de la solution du système $(S_\varepsilon)(v)$ et (m_ε) lorsque l'espace des contrôles admissibles U_{ad} est un sous-espace de U_0 :

Théorème 1 :

On suppose que U_{ad} est un sous espace de U_0 de dimension finie. Alors on a :

(i) Le problème de contrôle optimal perturbé (m_ε) admet une solution unique u_ε qui converge dans l'espace $L^2(\Gamma)$ vers la solution u du problème de contrôle limite (m_0) :

$$(m_0) \qquad \begin{cases} J_0(u) = \mathrm{Min}\,\{J_0(v), \quad v \in U_{ad}\}, \\ J_0(v) = \|y_0(v)_\Gamma - z\|^2 = \langle y_0(v)_\Gamma - z,\ y_0(v)_\Gamma - z\rangle \end{cases}$$

où $y_0(v)$ est la solution du problème $(Q_0)(v)$.

(ii) L'état $y_\varepsilon(u_\varepsilon)$ du système $(S_\varepsilon)(v)$ et (m_ε) converge dans $H^1(\Omega)$ vers l'état limite $y_0(u)$ du système $(Q_0)(u)$ et (m_0).

Preuve :

(i) L'éxistence et l'unicité du contrôle u_ε sont des conséquences des conditions suivantes (cf. [4]) :

* L'application $v \mapsto J_\varepsilon(v)$ est s.c.i. (c.à.d. semi-continue inférieurement) dans l'espace U_{ad} et strictement convexe :

Soit $(v,w) \in L^2(\Gamma) \times L^2(\Gamma)$, tel que $2J_\varepsilon(\frac{v+w}{2}) = J_\varepsilon(v) + J_\varepsilon(w)$ c.à.d.

$$< T_\varepsilon(v) + T_\varepsilon(w) -2z, T_\varepsilon(v) + T_\varepsilon(w) - 2z > =$$
$$= 2\,\|T_\varepsilon(v) - z\|^2 + 2\,\|T_\varepsilon(w) - z\|^2 =$$
$$= \|T_\varepsilon(v) - z\|^2 + \|T_\varepsilon(w) - z\|^2 + 2 < T_\varepsilon(w) - z, T_\varepsilon(v) - z >$$

$\|T_\varepsilon(v - w)\|^2 = \|T_\varepsilon(v) - z\|^2 + \|T_\varepsilon(w) - z\|^2 - 2<T_\varepsilon(w) - z, T_\varepsilon(v) - z> = 0$, par conséquent $v = w$.

* Soit (v_n) la suite de U_{ad} telle que : $\lim_{n\to+\infty} \|v_n\| = +\infty$.
Comme U_{ad} est un sous-espace de dimension finie alors $G(T_\varepsilon^{-1}) = \{(T_\varepsilon(v),v);\ v \in U_{ad}\}$ est un fermé de $L^2(\Gamma)xL^2(\Gamma)$, par conséquent T_ε^{-1} est linéaire, continue donc il existe une constante $K_\varepsilon > 0$ telle que (cf. [3]) :

$$\|v\| \leq K_\varepsilon\,\|T_\varepsilon(v)\| \quad \text{pour tout v dans } U_{ad}$$

En particulier, $\|v_n\| \leq K_\varepsilon\,\|T_\varepsilon(v_n)\|$, donc $\lim_{n\to+\infty} J_\varepsilon(v_n) = +\infty$
Soit $\{\phi_i, 1 \leq i \leq n\}$ une base orthonomée de U_{ad}, le contrôle u_ε s'écrit alors sous la forme suivante :

$$u_\varepsilon = \sum_{1\leq i\leq n} < u_\varepsilon, \phi_i > \phi_i \tag{12}$$

et donc $T_\varepsilon(u_\varepsilon) = \sum_{1\leq i\leq n} < u_\varepsilon, \phi_i > T_\varepsilon(\phi_i)$, d'autre part $J_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq J_\varepsilon(v)$ pour tout v $\in U_{ad}$, en particulier $J_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq J_\varepsilon(0) = \|z\|$, alors $\|T_\varepsilon(u_\varepsilon)\| \leq 2\|z\|$ c.à.d. pour $1\leq i \leq n$, $<u_\varepsilon,\phi_i>$ tend vers a_i, par conséquent u_ε converge dans $L^2(\Gamma)$ vers $u = \sum_{1\leq i\leq n} a_i\phi_i \in U_0$.
En faisant donc appel à la proposition 1, $y_\varepsilon(\phi_i)$ converge dans $H^1(\Omega)$ vers la solution $y_0(\phi_i)$ du problème $(Q_0)(\phi_i)$ (pour $1 \leq i \leq n$), par conséquent $y_\varepsilon(u_\varepsilon) = \sum_{1\leq i\leq n} <u_\varepsilon,\phi_i>$ $y_\varepsilon(\phi_i)$ converge dans $H^1(\Omega)$ vers la solution $y_0(u) = \sum_{1\leq i\leq n} a_i y_0(\phi_i)$ du problème $(Q_0)(u)$.
En utilisant le théorème de trace et la continuité de la norme dans $L^2(\Gamma)$, nous obtenons pour tout v $\in U_{ad}$:

$$J_0(u) = \lim_{\varepsilon\to 0} J_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq \lim_{\varepsilon\to 0} J_\varepsilon(v) = J_0(v) \tag{13}$$

c.à.d. u est la solution du problème (m_0).
Remarque 3 (cf. [1]):
Si l'espace des contrôles admissibles U_{ad} est un sous-espace de U_0 de dimension infinie (par exemple $U_{ad} = U_0$) le problème (m_ε) n'admet pas en général de solution dans U_{ad}.

III. Etude de l'existence et le comportement de la solution du système $(S_\varepsilon)(v)$ et (m_ε) lorsque l'espace des contrôles admissibles U_{ad} est un sous-espace de $L^2(\Gamma)$ tel que $U_{ad}\cap U_0 \neq U_{ad}$.

Dans ce paragraphe, on suppose que U_{ad} est un sous-espace de $L^2(\Gamma)$ tel que $U_{ad}\cap U_0 \neq U_{ad}$ et alors nous avons un système limite $(S_0)(v)$ et (m_0) à états multiples. Nous commençons par l'étude du système suivant (pour un élément fixe w de U_0):

$$(S_0)(w) \qquad \begin{cases} -\Delta\, y(w) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial}{\partial\nu} y(w) = w & \text{sur } \Gamma \\ y(w) \in H^1(\Omega) \end{cases}$$

et

$$(\mathrm{N})(\mathrm{w}) \qquad \begin{cases} \mathrm{I}_w(\mathrm{y}) = \mathrm{Min}\,\{\mathrm{I}_w(\mathrm{s});\ \ \mathrm{s} \in \mathrm{E}(\mathrm{w})\} \\ \\ \qquad \mathrm{I}_w(\mathrm{s}) = \|\mathrm{s}_\Gamma - \mathrm{z}\|^2 \end{cases}$$

avec $\qquad \mathrm{E}(\mathrm{w}) = \left\{\mathrm{y} \in \mathrm{H}(\Omega);\ \Delta\mathrm{y} = 0 \text{ dans } \Omega \text{ et } \frac{\partial}{\partial\nu}\mathrm{y} = \mathrm{w} \text{ sur } \Gamma\right\}$

Proposition 2 :
Pour un élément fixe v de U_0, le système $(S_0)(v)$ et $(N)(v)$ admet une seule solution y(v) dans E(v) donnée par :

$$\text{(14)} \qquad \mathrm{y}(\mathrm{v}) = \mathrm{y}_0(\mathrm{v}) + \frac{1}{|\Gamma|}\int_\Gamma \mathrm{z}\,d\Gamma$$

où $y_0(v)$ est la solution du problème $(Q_0)(v)$.

Preuve :
L'existence et l'unicité de la solution du système $(S_0)(v)$ et $(N)(v)$ sont assurées par (cf.[4]). L'application I_v est continue et strictement convexe. Soit (s_n) une suite de E(v) vérifiant $\lim_{n\to+\infty} \|s_n\|_{H^1(\Omega)} = +\infty$.
Comme $s_n \in E(v)$, alors $\|\nabla s_n\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Gamma v.s_n d\Gamma$ et grâce à l'inégalité de Poincaré et le lemme 1 (pour $\rho = \frac{1}{2}$) nous obtenons :

$$\text{(15)} \qquad A^2\,\|s_n\|^2_{H^1(\Omega)} \leq \Psi_{\frac{1}{2}}(s_n)^2 \leq \|s_{n\Gamma}\|^2 + \frac{1}{2}\,\|v\|^2$$

par conséquent : $\lim_{n\to+\infty} I_v(s_n) = +\infty$.
D'autre part la solution $y_0(v)$ du problème $(Q_0)(v)$ est un élément de E(v), et tout autre élément s de E(v) s'écrit sous la forme $s = y_0(v) + \delta$ (avec δ une constante), alors la fonction coût I_v devient :

$$\text{(16)} \qquad \begin{aligned} \mathrm{I}_v(\mathrm{s}) &= \langle(\mathrm{y}_0(\mathrm{v}) - \mathrm{z}) + \delta,\, (\mathrm{y}_0(\mathrm{v}) - \mathrm{z}) + \delta\rangle \\ &= \|\mathrm{y}_0(\mathrm{v})_\Gamma - \mathrm{z}\|^2 - 2\delta \textstyle\int_\Gamma \mathrm{z}\,d\Gamma + \delta^2\,|\Gamma|\,. \end{aligned}$$

I_v est minimum pour $\delta = \frac{1}{|\Gamma|}\int_\Gamma z d\Gamma$, par conséquent l'état du système $(S_0)(v)$ et $(N)(v)$ est donné par la formule (14) et $I_v(y(v)) = J_0(v) - \frac{1}{|\Gamma|}\,[\int_\Gamma z d\Gamma]^2$.
Nous étudions maintenant le système de contrôle perturbé $(S_\varepsilon)(v)$ et (m_ε), nous avons alors le théorème suivant :

Théorème 2 :
On suppose que l'espace des contrôles admissibles U_{ad} est un sous-espace de $L^2(\Gamma)$ de dimension finie et tel que $U_{ad} \cap U_0 \neq U_{ad}$. Alors nous avons :
(i) Le problème (m_ε) admet une solution unique u_ε dans U_{ad} caractérisée par :

$$\text{(17)} \qquad \int_\Gamma u_\varepsilon d\Gamma = \varepsilon \int_\Gamma z d\Gamma$$

et qui converge dans $L^2(\Gamma)$ vers un élément u appartenant à $U_{ad} \cap U_0$.
(ii) L'état $y_\varepsilon(u_\varepsilon)$ du système perturbé (S_ε) et (m_ε) converge dans $H^1(\Omega)$ vers l'état y(u)

du système $(S_0)(u)$ et $(N)(u)$.

Preuve :

(i)Le problème (m_ε) admet une solution unique u_ε(cf.théorème 1).

D'autre part pour $v \in U_{ad}$, la solution du problème $(S_\varepsilon)(v)$ s'écrit sous la forme : $y_\varepsilon(v) = \varepsilon^{-1}\alpha + y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \ldots$, avec $\alpha = \frac{1}{|\Gamma|}\int_\Gamma v d\Gamma$, par conséquent (comme $y_k \in V$) :

$$(18) \qquad f(\alpha) = J_\varepsilon(v) = \frac{\alpha^2}{\varepsilon^2}|\Gamma| - \frac{2\alpha}{\varepsilon}\int_\Gamma z d\Gamma + \|z - y_0\|^2 + 2\varepsilon \leq y_1, y_0 - z> + \ldots$$

Alors $J_\varepsilon(u_\varepsilon) = \mathrm{Min}\left\{f(\alpha);\ \alpha = \frac{1}{|\Gamma|}\int_\Gamma v d\Gamma \in R, \text{ avec } v \in U_{ad}\right\} = f(\alpha_\varepsilon)$ où $\alpha_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{|\Gamma|}\int_\Gamma z d\Gamma = \frac{1}{|\Gamma|}\int_\Gamma u_\varepsilon d\Gamma$ (c.à.d. $f'(\alpha_\varepsilon) = 0$) et nous avons :

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon) = \|z - y_0\|^2 - \frac{1}{|\Gamma|}\left(\int_\Gamma z d\Gamma\right)^2 + 2\varepsilon\,[< y_1, y_0 - z> + \ldots] =$$

$$(19) \qquad = \left\|y_0 + \frac{1}{|\Gamma|}\int_\Gamma z d\Gamma - z\right\|^2 + 2\varepsilon\,[< y_1, y_0 - z> + \ldots] =$$

$$= I_u(y(u)) + 2\varepsilon\,[< y_1, y_0 - z> + \ldots]$$

Par conséquent $u \in U_{ad} \cap U_0$ (car $|\int_\Gamma u_\varepsilon d\Gamma| \leq \varepsilon\,|\int_\Gamma z d\Gamma|$).

(ii) La fonction $\chi_\varepsilon = \left[y_\varepsilon(u_\varepsilon) - \frac{1}{|\Gamma|}\int_\Gamma z d\Gamma - y_0(u)\right]$ est solution du problème $(Y_\varepsilon)(u_\varepsilon)$

$$(Y_\varepsilon)(u_\varepsilon) \qquad \begin{cases} -\Delta \chi_\varepsilon = 0 & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial}{\partial\nu}\chi_\varepsilon = (u_\varepsilon - u) - \varepsilon y_\varepsilon(u_\varepsilon)_\Gamma & \text{sur } \Gamma \\ \chi_\varepsilon \in V \end{cases}$$

La formulation variationnelle de $(Y_\varepsilon)(u_\varepsilon)$ sur $H^1(\Omega)$ donne :

$$\|\chi_\varepsilon\|^2_{H^1(\Omega)} \leq C\,\|\nabla\chi_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)} = C\int_\Gamma \chi_\varepsilon\,[(u_\varepsilon - u) - \varepsilon T_\varepsilon(u_\varepsilon)]\,d\Gamma \leq C\beta\,\|(u_\varepsilon - u) - \varepsilon T_\varepsilon(u_\varepsilon)\|$$

(car $\|\chi_{\varepsilon\Gamma}\| = \left\|T_\varepsilon(u_\varepsilon) - \frac{1}{|\Gamma|}\int_\Gamma z d\Gamma - y_0(u)_\Gamma\right\| \leq \beta$ et $\chi_\varepsilon \in V$), donc $y_\varepsilon(u_\varepsilon)$ converge dans $H^1(\Omega)$ vers $y_0(u) + \frac{1}{|\Gamma|}\int_\Gamma z d\Gamma$.

Remarques 4 :

(i) En général pour $v \notin U_0$, J_ε ne converge pas mais : $\lim_{\varepsilon\to 0} J_\varepsilon(u_\varepsilon) = I_u(y(u)) = J_0(u) - \frac{1}{|\Gamma|}\left(\int_\Gamma z d\Gamma\right)^2$ ($u_\varepsilon \notin U_0$ et $u \in U_0$).

(ii) L'espace des contrôles admissibles U_{ad} est un sous-espace de $L^2(\Gamma)$ de dimension finie, le contrôle optimal u_ε vérifie nécessairement la condition d'optimalité suivante :

$$(20) \qquad J'_\varepsilon(u_\varepsilon).w = 2< T_\varepsilon(u_\varepsilon) - z, T_\varepsilon(w)> = 0 \qquad \forall w \in U_{ad}$$

(iii) Si l'espace des contrôles admissibles U_{ad} est un sous espace de dimension infinie (par exemple $U_{ad} = L^2(\Gamma)$) le problème (m_ε) n'admet pas en général de solution dans

U_{ad}.
(iv) Si U_{ad} est remplacé par un ensemble K fermé, convexe et borné de

$$U_1 = \left\{ v \in L^2(\Gamma);\ \int_\Gamma v d\Gamma \geq a > 0 \right\},$$

vers u $\in$K et la fonction $y_\varepsilon(u_\varepsilon)$ - $\frac{1}{\varepsilon|\Gamma|}\int_\Gamma u_\varepsilon d\Gamma$ converge dans $H^1(\Omega)$ vers la solution $y_0(P_0(u))$ du problème $(Q_0)(P_0(u))$.

$$(Q_0)(P_0(u)) \qquad \begin{cases} -\Delta y_0 = 0 & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial}{\partial \nu} y_0 = P_0(u) & \text{sur } \Gamma \\ y_0 \in V \end{cases}$$

(v) Ces résultats restent valables si nous remplaçons U_{ad} par l'espace affine D + U_{ad}, où D est un convexe, fermé borné de $L^2(\Gamma)$.

Références

1.T.Benkiran, On a non Classical Perturbed Boundary Optimal Control System, Libertas Mathematica, Vol.XVI (1996).
2.T.Benkiran, Etude d'un problème de perturbation singulière non classique, Bolletino U.M.I. (7) 11-A (1997), 93-103.
3.H.Brezis, Analyse fonctionnelle, Théorie et Applications, Masson, Paris 1983.
4.J.L.Lions, Contrôle optimal des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles, Dunod Gauthier-Villars, Paris 1968.
5.J.L.Lions, Perturbations singulières dans les problèmes aux limites et en contrôle optimal, Springer-Verlag, Berlin 1973.
6.J.L.Lions and E.Magenes, Problèmes aux limites non homogènes et applications, Vol.1, 2, Dunod, Paris 1969.

Manuscrit reçu en Mars 1997