

JACQUES BOSGIRAUD

## **Exemple de test statistique non standard**

*Annales mathématiques Blaise Pascal*, tome 4, n° 1 (1997), p. 9-13

[http://www.numdam.org/item?id=AMBP\\_1997\\_\\_4\\_1\\_9\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AMBP_1997__4_1_9_0)

© Annales mathématiques Blaise Pascal, 1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales mathématiques Blaise Pascal » (<http://math.univ-bpclermont.fr/ambp/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## EXEMPLE DE TEST STATISTIQUE NON STANDARD

Jacques BOSGIRAUD

**Résumé :** Si  $X$  est un caractère gaussien  $N(m, \sigma)$  où  $\sigma$  est connu, standard, on étudie le test non standard  $m \lesssim m_0$  contre  $m \gtrsim m_0$  où  $m_0$  est standard.

On introduit les notions de halo d'efficacité et de courbe standard d'efficacité de ce test. On termine en étudiant le cas où le seuil de signification est infinitésimal.

**Mots clefs :** test statistique, analyse non standard.

**Abstract :** Let  $X$  be a normally  $N(m, \sigma)$  distributed characteristic (where  $\sigma$  is a known standard number). One studies the non standard test :  $m \leq m_0$  against  $m \gtrsim m_0$  (where  $m_0$  is a standard number).

One introduces the notions of operating characteristic hal and of standard operating characteristic of this test. Then one studies the case where the signifiante level is an infinitesimal number.

### 1 - Introduction.

Rappelons le principe du test d'hypothèse :  $(H_0) : m \leq m_0$  contre  $m > m_0$  : si  $w$  est un échantillon de taille  $n$  et  $\bar{X}(w)$  la moyenne empirique sur cet échantillon, on rejette  $(H_0)$  si  $\bar{X}(w) > m_0 + \frac{u \cdot \sigma}{\sqrt{n}}$ ;  $u$  étant défini par  $F(u) = 1 - \alpha$  où  $F$  est la fonction de répartition

de la loi normale réduite et  $\alpha$  le seuil du test.

La courbe d'efficacité de ce test a pour équation

$$L_0(m) = F\left(u + \frac{m_0 - m}{\sigma/\sqrt{n}}\right).$$

Plus généralement, notons  $L_a(m) = F\left(u + \frac{m_0 + a - m}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$  la courbe d'efficacité du test :

$m \leq m_0 + a$  contre  $m > m_0 + a$ . Dans la suite  $(H_0)$  représentera toujours l'hypothèse nulle:  $m \leq m_0$  ou  $m \leq m_0 + \varepsilon$  ou  $m \lesssim m_0$ .

## 2 - Le test non standard.

Si  $\varepsilon \simeq 0$ ,  $\varepsilon \geq 0$ , le test de l'hypothèse  $m \leq m_0 + \varepsilon$  contre  $m > m_0 + \varepsilon$  est défini par :

On rejette  $(H_0)$  si  $\bar{X}(w) > m_0 + \varepsilon + \frac{u \cdot \sigma}{\sqrt{n}}$ , et l'équation de la courbe d'efficacité est donnée par :

$$L_\varepsilon(m) = F\left(u + \frac{\varepsilon + m_0 - m}{\sigma/\sqrt{n}}\right).$$

Le principe de permanence de Cauchy (voir [1]) nous incite donc à définir le test d'hypothèse  $(H_0) m \lesssim m_0$  contre  $m \not\lesssim m_0$  par :

On rejette  $(H_0)$  si  $\bar{X}(w) \not\lesssim m_0 + \frac{u \cdot \sigma}{\sqrt{n}}$

L'évènement  $\left(\bar{X} \not\lesssim m_0 + \frac{u \cdot \sigma}{\sqrt{n}}\right)^c$  est externe et on ne peut donc "a priori" définir sa probabilité et donc une courbe d'efficacité.

## 3 - Halo d'efficacité.

L'ensemble des courbes  $(L_\varepsilon)_{\substack{\varepsilon \geq 0 \\ \varepsilon \simeq 0}}$  forme un halo.

**Démonstration :** Si  $\varphi$  est une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , notons  $\varphi^+$  son épigraphe,  $\varphi^-$  son ipographe et par  $\varphi$  son graphe. Il suffit d'écrire :  $\bigcup_{\substack{\varepsilon \simeq 0 \\ \varepsilon \geq 0}} L_\varepsilon = L_0^+ \cap \bigcap_{p \in {}^\sigma \mathbb{N}} L_{\frac{1}{p}}^-$  pour prouver

que cet ensemble est un halo.

Notons  $\Lambda$  ce halo et  $\lambda(m)$  la "tranche" définie par  $\lambda(m) = \{y \in \mathbb{R} : (m, y) \in \Lambda\}$ . L'application  $m \mapsto \lambda(m)$  sera dite "halo d'efficacité".

Étudions  ${}^0\lambda(m)$  (l'ombre de  $\lambda(m)$ ) pour  $n \simeq \infty$  et  $\alpha$  standard.

A noter qu'alors le test est défini par :

On rejette ( $H_0$ ) si  $\bar{X}(w) \underset{\neq}{>} m_0$ .

Le tableau ci-dessous précise  ${}^0\lambda(m)$  suivant les valeurs de  $m$ :

$m$	$m \underset{\neq}{<} m_0$	$m \simeq m_0$		
		$(m - m_0)\sqrt{n} \simeq -\infty$	$(m - m_0)\sqrt{n}$ appréciable $< 0$	$(m_0 - m)\sqrt{n} \simeq 0$
${}^0\lambda(m)$	$\{1\}$	$\{1\}$	$[a, 1]$ avec $1 - \alpha < a < 1$	$[1 - \alpha, 1]$

$m \simeq m_0$ (suite)		$m \underset{\neq}{>} m_0$
$(m - m_0)\sqrt{n}$ appréciable $> 0$	$(m - m_0)\sqrt{n} \simeq +\infty$	
$[a, 1]$ avec $0 < a < 1 - \alpha$	$[0, 1]$	$\{0\}$

**Démonstration :** Notons  $g = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}$  (c'est un réel  $i$ -grand) et  $x = m - m_0$ ;  $\lambda(m)$  est l'intervalle externe  $\{F(u - xg + \varepsilon g) : \varepsilon \simeq 0, \varepsilon \geq 0\}$ , donc  ${}^0\lambda(m)$  est un intervalle fermé standard  $[a, b]$  dont les éléments standards sont les nombres  ${}^0F(u - xg + \varepsilon g) = F({}^0(u - xg + \varepsilon g))$  (puisque  $F$  est standard continue).

Ainsi  $a = F({}^0(u - xg)) = F(u - {}^0(xg))$  et donc :  $a = 0$  si  $x \cdot g \simeq +\infty$ ,  $a = 1$  si  $xg \simeq -\infty$  et  $a \in ]0, 1[$  si  $xg$  est limité, avec en particulier  $a = 1 - \alpha$  si et seulement si  $xg \simeq 0$ .

D'autre part, si  $x \underset{\neq}{>} 0$ , alors  $u - xg + \varepsilon g \simeq -\infty$  pour tout  $\varepsilon \simeq 0$  et donc  $b = 0$ ; si  $x \underset{\neq}{<} 0$ , alors  $u - xg + \varepsilon g \simeq +\infty$  pour tout  $\varepsilon \simeq 0$  et donc  $b = 1$ ; enfin si  $x \simeq 0$ , en choisissant (par exemple)  $\varepsilon = g^{1/2} + x$ ,  $u - xg + \varepsilon g \simeq +\infty$  et donc  $b = 1$ .

#### 4 - Courbe standard d'efficacité :

Définissons la fonction standard  $\tilde{L} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  par :

$\forall {}^st m \in \mathbb{R}, \tilde{L}(m) = \sup {}^0\lambda(m)$ .  $\tilde{L}$  sera dite courbe standard d'efficacité.

Si  $n$  est appréciable  $\tilde{L} = L_0$ , mais si  $n$  est  $i$ -grand,  $\tilde{L}$  est défini par (voir §3):

$$\begin{aligned} \tilde{L}(m) &= 1 & \text{si } m \leq m_0, \\ \tilde{L}(m) &= 0 & \text{si } m > m_0. \end{aligned}$$

Notons que  $\tilde{L}(m)$  est égal à  $\lim_{n \rightarrow \infty} L_0(m)$ , sauf dans le cas où  $m = m_0$  puisque  $\tilde{L}(m_0) = 1$  et que  $L_0(m) = 1 - \alpha$ , pour tout  $n$ .

$\tilde{L}$  a l'avantage d'être standard, mais ne fait pas apparaître clairement les résultats du §3 sur le halo de  $m_0$ , d'où la notion de courbe d'efficacité standard.

**Définition :** On appelle courbe d'efficacité standard l'application  $\hat{L} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  définie par :

$$\forall m \in \mathbb{R} \quad \hat{L}(m) = \sup^0 \lambda(m).$$

C'est un objet externe ; pour  $n$  i-grand,

$$\begin{aligned} \hat{L}(m) &= 1 & \text{pour } m \underset{\sim}{\leq} m_0 & \text{ et} \\ \hat{L}(m) &= 0 & \text{pour } m \underset{\neq}{\geq} m_0. \end{aligned}$$

**Remarque :** En un sens défini par Nelson ([2]), pour  $n$  i-grand,  $\bar{X} \simeq m$  presque sûrement.

Cela est à mettre en relation avec la valeur de  $\hat{L}(m)$  pour  $n$  i-grand.

### 5 - Cas où le seuil $\alpha$ est infinitésimal.

Dans ce cas  $u$  est i-grand, mais  $u < -2l_n\alpha$ , donc en liant le seuil et la taille de l'échantillon par une relation du type  $n \sim \frac{1}{\alpha^q}$  ( avec  $0 < q < 1$  ), le critère de rejet de

$(H_0) : \bar{X}(w) \underset{\neq}{\geq} m_0 + \frac{u \cdot \sigma}{\sqrt{n}}$  s'écrit encore :  $\bar{X}(w) \underset{\neq}{\geq} m_0$ .

${}^0F(u) = 1$ , et donc le tableau du §3 doit être modifié de la façon suivante ;

( $\theta$  représente  $u + \frac{m_0 - m}{\sigma} \sqrt{n}$  ).

$m$	$m \leq m_0$	$m > m_0$ et $m \simeq m_0$			$m \underset{\neq}{\geq} m_0$
		$(m - m_0)\sqrt{n}$ limité	$(m - m_0)\sqrt{n} \simeq \infty$ $\theta \simeq +\infty$   $\theta$ limité   $\theta \simeq -\infty$		
${}^0\lambda(m)$	{1}	{1}	{1}	$[F({}^0\theta), 1]$	[0, 1]
				[0, 1]	{0}

Le principe de la démonstration reste le même que pour le tableau du §3.

Remarquons qu'en particulier si  $m \in \alpha - gal(m_0)$  alors  ${}^0\lambda(m) = \{1\}$ .

## REFERENCES

- [1] F. Diener, G. Reeb : *Analyse non standard*, Hermann, Paris , 1989.
- [2] E. Nelson : *Radically Elementary Probability Theory*, Princ. Univ. Press, 1987.

Université de Paris 8  
Département de Mathématiques  
93526 Saint-DENIS Cedex 0