ANNALES MATHÉMATIQUES BLAISE PASCAL

YVES PÉRAIRE

Proximités et topologies

Annales mathématiques Blaise Pascal, tome 4, nº 1 (1997), p. 81-92

<http://www.numdam.org/item?id=AMBP_1997__4_1_81_0>

Ann. Math. Blaise Pascal, Vol. 4, N° 1, 1997, pp.81-92

PROXIMITES ET TOPOLOGIES.

Yves Péraire

1 Introduction.

Traditionnellement (selon Bourbaki), définir une topologie sur un ensemble consiste à se donner un notion de voisinage, c'est une réponse ensembliste au problème de l'édification d'une "théorie mathématique du lieu", les voisinages sont conçus comme éléments d'un ensemble de parties de E qui vérifie certains axiomes de base . Dans cette approche, que Bourbaki attribue à Hausdorff, faire de la topologie consiste à décrire en termes ensemblistes les propriétés des voisinages découlant de ces axiomes de définition avec en général des propriétés additionnelles, séparation compacité etc....

Nous montrerons aujourd'hui qu'une réponse différente est possible, à partir de la notion de proximité [1] . Ici une proximité est un objet de syntaxe, un prédicat, et faire de la topologie consiste à développer un discours "relativement cohérent" , sur la proximité . Notre approche est assez voisine dans son esprit de celle de T.Sari dans [Sa], mais elle va plus loin dans la *"syntaxisation de la topologie"* .

Intuitivement (mais ce n'est pas, comme on le verra, un point de vue intuitioniste), nous attendrons d'un prédicat de proximité qu'il associe à deux éléments x et y d'un univers donné une *"valeur de proximité"*, (qu'il permette d'écrire formellement, "y est proche de x ", ou "y n'est pas proche de x ") et que l'on puisse "mesurer" le degré de proximité quand y est proche de x . Il nous faudra donc utiliser un prédicat à trois places, la troisième place étant occupée par le niveau α de proximité. Notons $\rightarrow$ le prédicat de proximité. Une écriture de la forme $y \ {}^{\alpha}\!\!\rightarrow x$ se lira y est proche de x d'ordre α .

Evidemment les niveaux de proximités devront être ordonnés, il y aura une relation de domination entre les niveaux, on écrira $\alpha \sqsubseteq \beta$ si α est dominé par β et $\alpha \sqsubset \beta$ si la domination est stricte.

Il nous semble naturel d'exiger que $\rightarrow$ possède au moins les propriétés[2] suivantes

$$\text{(1) pour tout niveau } \alpha \text{ et tout } x \ : \quad x \ {}^{\alpha}\!\!\rightarrow x$$

$$\text{(2) Si } \alpha \sqsubset \beta \ : \ z \ {}^{\beta}\!\!\rightarrow y \ \text{ et } \ y \ {}^{\alpha}\!\!\rightarrow x \ \text{ impliquent } \ z \ {}^{\alpha}\!\!\rightarrow x.$$

La dernière propriété peut s'interpréter de la manière suivante ,

[1] Le terme *«proximité »* a déjà utilisé ailleurs, par V.A. Efremovic [E], Y.M. Smirnov [Sm], A.Csasar [C] et L.Haddad [H1,H2] entre autres, avec une autre acception.

[2] Nous démontrerons finalement que ces deux propriétés suffisent .

Si nous estimons que, vu de Clermont-Ferrand , Paris est proche (d'ordre α) de Clermont-ferrand et que vu de Paris Bruxelles est proche de Paris (du même ordre), je ne prendrai pas le risque de dire que Bruxelles est proche de Clermont-Ferrand avec le même niveau de proximité. Par contre, vu de Paris, Bobigny est d'un ordre de proximité β beaucoup plus grand; nous en déduirons que Bobigny reste proche de Clermont -Ferrand d'ordre α .

Il découlera immédiatement des propriétes (1) et (2)

$$\text{Si } \alpha \sqsubseteq \beta \ : \ y \ {}^{\beta}\!\!\rightarrow x \text{ implique } y \ {}^{\alpha}\!\!\rightarrow x \ ,$$

que l'on peut interpréter par : si y est très proche de x alors y est proche de x .

Il nous semble qu'un prédicat de proximité satisfaisant les propriétés ci-dessus, devrait trouver naturellement sa place dans un discours mathématique décrivant des phénomènes physiques qui font intervenir plusieurs ordres de grandeur. Il devrait également être utile dans la construction de modèles visant à prouver la consistence (relative) de certains systèmes formels qui apparaissent dans l'élaboration de systèmes experts[3] .

Nous remarquerons que nous n'avons pas exigé que notre relation soit symétrique, et cela aussi est conforme à une certaine intuition physique .

Ce ne sont toutefois pas ces aspects là que nous développerons, la notion de proximité que nous voulons introduire est une notion idéale portant sur des objets idéaux, les objets mathématiques, et c'est de proximité infinitésimale dont nous voulons parler en réalité.

Pour pouvoir tirer de notre notion de proximité les bénéfices attendus de l'approche non standard des mathématiques, il nous semble judicieux d'utiliser le niveau d'idéalité des ensembles, tels qu'ils sont définis dans [P2], comme mesure du niveau de proximité.

Le cadre sera celui de la théorie relative des ensembles (TRE)[4] . Le langage de la TRE est bâti à partir de deux prédicats binaires : le prédicat classique d'appartenance « $.\in$. » et un autre prédicat binaire « $.st$. » qui est un préordre total sur la collection des ensembles . Deux ensembles x et y tels que $x \; st \; y$ et $y \; st \; x$ sont dits équistandard. Une classe $[a]$ pour l' "équistandardité" s'appelle un niveau. Nous désignerons les niveaux par des lettres grecques, σ, α, β ... . Si $\beta = [b]$ et $\alpha = [a]$ sont deux niveaux nous disons que β domine α , et nous écrivons $\alpha \sqsubseteq \beta$, si $a \, st \, b$. On dira aussi que a est dominé par β, ou que a est $^{\beta}$dominé . Si, de plus, α ne domine pas β, nous dirons que β domine

[3] On peut trouver un exemple de preuve de la consistence d'un système formel pour le raisonnement approximatif sur les ordres de grandeurs dans le diagnostic de panne dans [D]. Dans ce travail le modèle est construit dans la théorie IST de Nelson [N].

[4] Théorie développée et désignée par le sigle *RIST* , Relative Internal Set Theory, dans ([P1], [P2], [P3]) .

strictement α , et nous écrirons $\alpha \sqsubset \beta$. Il existe un niveau minimum σ , que nous appellerons le *niveau standard* . C'est le niveau de tous les objets définis de la théorie classique des ensembles. Si $F(x)$ est une formule de la TRE nous écrirons :

$$\forall^{[a]} x\, F(x) \text{ pour } \forall x\, [\, x\, \mathbf{st}\ a \Rightarrow F(x)\,],$$

$$\exists^{[a]} x\, F(x) \text{ pour } \exists x\, [\, x\, \mathbf{st}\ a \wedge F(x)\,],$$

On pourra écrire

$$\exists^{[\,]} x\, F(x) \text{ pour } \exists x\, F(x)\,,\ \forall^{[\,]} x\, F(x) \text{ pour } \forall x\, F(x)$$

Un indice β, apparaissant en haut d'un quantificateur dans une formule, ou pouvant ne pas apparaître s' il s'agit du crochet vide, s'appelle un <u>niveau de quantification</u> .
On étend aux niveaux de quantification la relation de domination entre les niveaux en posant $[\,] \sqsubseteq [\,]$ et pour tout niveau α (au sens défini, plus haut) , $\alpha \sqsubset [\,]$.

Dans la suite, α étant un niveau, nous appellerons $^{\alpha}$<u>formule</u> toute formule bâtie à partir du prédicat d'appartenance, des quantificateurs $\forall^{\beta}$ et $\exists^{\beta}$, β étant un niveau de quantification dominant α , et des connecteurs logiques. On supposera également que toutes les constantes sont $^{\alpha}$dominées et toutes les variables astreintes à évoluer dans des domaines $^{\alpha}$dominés.
Si une $^{\alpha}$formule n'utilise pas d'autres niveaux de quantifications que α et [ ], on dira que c'est une $^{\alpha}$formule stricte. Les autres axiomes de la TRE peuvent être trouvés dans [P2].
Afin d'avoir une représentation mentale plus précise de l'univers, rappelons en quelques conséquences .

1 <u>Le principe d'homogénéité</u>[5] (ou de transfert)

Si $E^{(\alpha 1,\alpha 2,\dots\alpha n)}$ est un $^{\alpha}$énoncé (une $^{\alpha}$formule sans variable libre) utilisant les niveaux de quantification $\alpha 1$, $\alpha 2,\dots\alpha n$, alors pour tous niveaux de quantification $\beta 1$,$\beta 2,\dots\beta n$, dominant α tels que ($\alpha i \sqsubseteq \alpha j \Leftrightarrow \beta i \sqsubseteq \beta j$) on a :

$$E^{(\alpha 1,\alpha 2,\dots\alpha n)} \Leftrightarrow E^{(\beta 1,\beta 2,\dots\beta n)} .$$

2- Si $P^{(\alpha 1,\alpha 2,\dots\alpha n)}(X)$ est une $^{\sigma}$formule alors il existe un ensemble standard $\mathcal{E}$ tel que si A est standard alors $A \in \mathcal{E}$ si et seulement si $P^{(\alpha 1,\alpha 2,\dots\alpha n)}(A)$. On peut dire que la

[5] L' adjectif *homogène* s'impose à nous pour qualifier l'univers; cela signifie que celui-ci possède la même "structure" à quelque niveau que l'on se place.

formule $P^{(\alpha 1,\alpha 2,\dots\alpha n)}(A)$ définit une certaine propriété des objets standard du domaine de X. Le principe d'homogénéïté impose que si $A \in \mathcal{E}$ et $[A] \sqsubseteq \alpha$, alors $A \in \mathcal{E}$ si et seulement si $P^{(\beta 1,\beta 2,\dots\beta n)}(A)$, les βi étant choisis dominant α et tels que ($\alpha i \sqsubseteq \alpha j \Leftrightarrow \beta i \sqsubseteq \beta j$). On dira que l'on a étendu par homogenéité aux éléments de tous niveaux la définition des éléments de $\mathcal{E}$.

La suite de cette contribution prendra la forme d'un cours de topologie, pouvant s'adresser dans un futur lointain à des étudiants de Licence, agrémenté comme il se doit de quelques exercices.

2 Cours élémentaire et exercices de topologie générale.

Soit $F^{(\sigma,[\,])}(y,x)$ une ${}^{\sigma}$formule stricte à deux variables libres et soit la relation ternaire $\rightarrow$ définie par : $y \;{}^{\alpha}\!\!\rightarrow x$ si et seulement si $[x] \sqsubseteq \alpha \;\&\; F^{(\alpha)}(y,x)$.

Définition 1

Un ensemble standard X étant donné, la relation ternaire $\rightarrow$ reliant deux éléments y et x de X et un niveau α dominant x définie comme plus haut , est appelée une proximité et $(X,\rightarrow)$ un espace proximal si

(P1) : Pour tout $x \in X$, si $[x] \sqsubseteq \alpha$ alors $x \;{}^{\alpha}\!\!\rightarrow x$.

(P2) : Pour tous x , y, $z \in X$, si $\alpha \sqsubset \beta$, alors $z \;{}^{\beta}\!\!\rightarrow y$ et $y \;{}^{\alpha}\!\!\rightarrow x$ impliquent $z \;{}^{\alpha}\!\!\rightarrow x$.

Proposition.

Si $[x] \sqsubseteq \alpha \sqsubset \beta$, alors $y \;{}^{\beta}\!\!\rightarrow x$ implique $y \;{}^{\alpha}\!\!\rightarrow x$ (P3).

Les définitions 1 et 2 s'étendent par homogénéité au cas où X possède un niveau α quelconque. On a alors

Définitions :

Soit $(X , \rightarrow)$ un espace proximal ${}^{\alpha}$dominé

1) On dira qu'une partie ${}^{\alpha}$dominée Y de X est

fermée si : $\forall y, x \in X \; [\, (y \;{}^{\alpha}\!\!\rightarrow x \;\&\; y \in Y) \Rightarrow x \in Y \,]$

ouverte si : $\forall^{\alpha} x \in Y \;\; \forall y \in X \,[\, (y \;{}^{\alpha}\!\!\rightarrow x \;\&\; x \in Y) \Rightarrow y \in Y \,]$

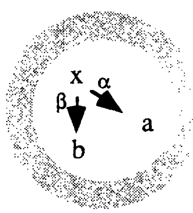
compacte si : $\forall y \in Y \ \exists x \in Y \ (\ y \overset{\alpha}{\to} x \ )$

2) On dira que $(X, \to)$ est

Séparé si : $\forall z, y, x \in X \ [\ (z \overset{\alpha}{\to} x \ \ \& \ \ z \overset{\alpha}{\to} y \ ) \Rightarrow x = y \ ]$
Accessible : $\forall^{\alpha} y, x \in X \ [\ y \overset{\alpha}{\to} x \ \ \Rightarrow x = y \ ]$

3) Un niveau β étant fixé avec $\alpha \sqsubset \beta$, si X est séparé on dira que X est

<u>localement compact</u> si : $\forall a, x \in X \ [\ x \overset{\alpha}{\to} a \ \Rightarrow \ \exists b \ (x \overset{\beta}{\to} b \ \ \& \ b \overset{\alpha}{\to} a) \ ]$
<u>régulier</u> si : $\forall a , b , x \in X \ [\ (x \overset{\alpha}{\to} a \ \ \& \ x \overset{\beta}{\to} b \ ) \Rightarrow \ b \overset{\alpha}{\to} a \ ]$



On peut mémoriser ces règles en énonçant :
X est localement compact si le $^{\alpha}$halo d'un point standard est compact, il est régulier si ce $^{\alpha}$halo est fermé [6]

4) Si $(X', \to')$ est un autre espace proximal $^{\alpha}$dominé et si $f : X \longrightarrow X'$ est une application standard, f est dite continue si $y \overset{\alpha}{\to} x$ implique $f(y) \overset{\alpha}{\to}' f(x)$.

<u>Exemples de proximité.</u>

1- Sur $X = \mathscr{P}(E)$, E étant un ensemble standard non vide muni d'une proximité $\to$, la relation $\to_{\_}$ définie de manière homogène en posant , si A_0 , $A \in \mathscr{P}(E)$ avec $[A_0] = \sigma$:

$$A \overset{\sigma}{\to}_{\_} A_0 \quad \text{ssi} \quad \forall^{\sigma} a_0 \in A_0 \ \exists a \in A \ [\ a \overset{\sigma}{\to} a_0 \ ],$$

est une proximité.

<u>Démonstration</u>

La vérification de (P1) est triviale, vérifions (P2).
Soient A_0 , A_1 , A_2 tels que $A_2 \overset{\beta}{\to}_{\_} A_1 \overset{\alpha}{\to}_{\_} A_o$, avec $\alpha \sqsubset \beta$.

---

[6] Le $^{\alpha}$halo d'un point standard a est la collection des points de X $^{\alpha}$proches de a . Ce n'est pas un ensemble, le procédé mnémotechnique proposé ci-dessus suppose que l'on assimile ce halo à une partie $^{\beta}$dominée de X .

$$\begin{tikzcd}
 & a_1 \ (\beta)\text{ , transfert de Borde} \arrow[dl, "\alpha"'] & \\
(\alpha)\ a_0 & & a_2 \arrow[ul, "\beta"'] \arrow[ll, "\alpha"]
\end{tikzcd}$$

Si a_0 est un élément ${}^{\alpha}$dominé de A_0, alors $A_1 \ {}^{\alpha}\!\!\to_{-} A_0$, implique qu'il existe un élément a_1 de A_1 qui, grâce au transfert de Borde[7] , peut être choisi ${}^{\beta}$dominé (comme les paramètres A_1 et A_0) tel que $a_1 \ {}^{\alpha}\!\!\to a_0$. La condition $A_2 \ {}^{\beta}\!\!\to_{-} A_1$, implique qu'il existe un élément a_2 de A_2 tel que $a_2 \ {}^{\beta}\!\!\to a_1$. La propriété (P2) de la proximité $\to$ entraîne que $a_2 \ {}^{\alpha}\!\!\to a_0$.
On a donc $A_2 \ {}^{\alpha}\!\!\to_{-} A_0$.

2- Sur l'ensemble $\mathscr{F}$ des parties compactes de E , E standard non vide muni d'une proximité de $\to$, la relation $\to_+$ définie de manière homogène en posant, si A_0 , $A \in \mathscr{F}$ avec $[A_0] = \sigma$:

$$A \ {}^{\sigma}\!\!\to_{+} A_0 \quad \text{ssi} \quad \forall\, a \in A \ \ \exists^{\sigma} a_0 \in A_0 \ [a \ {}^{\sigma}\!\!\to a_0 \,]$$

est une proximité.

<u>Démonstration</u>.
La vérification de (P1) est triviale, vérifions (P2).
Soient A_0, A_1 , A_2 tels que $A_2 \ {}^{\beta}\!\!\to_{+} A_1 \ {}^{\alpha}\!\!\to_{+} A_0$, avec $\alpha \sqsubset \beta$.
Pour tout $a \in A_2$ il existe $a_1 \in A_1$ et $a_0 \in A_0$ tels que $a \ {}^{\beta}\!\!\to a_1 \ {}^{\alpha}\!\!\to a_0$. On conclut en appliquant la propriété (P2) de la proximité sur E.

3- Construction du compactifié d'Alexandroff.
Si $(X \to)$ est un espace proximal standard localement compact, si $\#$ est un ensemble standard non élément de X alors la relation $\mapsto$ sur $X \cup \{\#\}$ définie par

a) si $a, b \in X$: $[\, a \ {}^{\sigma}\!\!\to b \ \Leftrightarrow a \ {}^{\sigma}\!\!\mapsto b \,]$,
b) $\# \ {}^{\sigma}\!\!\mapsto a \Leftrightarrow a = \#$,
c) si $a \in X$: $[\, a \ {}^{\sigma}\!\!\mapsto \# \Leftrightarrow \forall b \in X \ \neg (a \ {}^{\sigma}\!\!\mapsto b) \,]$,

est une proximité , l'espace proximal $(X \cup \{\#\}, \mapsto)$ est compact.

[7]Pascal Borde (Université Blaise Pascal) a établi que si $\Phi(x)$ est une formule ${}^{\alpha}$quantifiée dont tous les paramètres sont ${}^{\beta}$dominés avec $\alpha \sqsubseteq \beta$, alors $\exists$ x $\Phi(x)$ équivaut à $\exists^{\beta}$ x $\Phi(x)$. Voir [B] .

Démonstration.

La propriété (P1) pour $\mapsto$ est une conséquence de la propriété (P1) pour $\rightarrow$ et de $\# \overset{\sigma}{\mapsto} \#$.

Montrons la propriété (P2) .

Soient a, b e t c trois éléments de $X \cup \{\#\}$ tels que $c \overset{\beta}{\rightarrow} b \overset{\alpha}{\rightarrow} a$:

i) Si $c = \#$ alors nécessairement $b = \#$ et $a = \#$ et, par homogénéité, $\# \overset{\alpha}{\mapsto} \#$ pour tout niveau α.

ii) Si $c \in X$ et $b = \#$ alors nécessairement $a = \#$. On n' a $c \overset{\alpha}{\rightarrow} d$ pour aucun $d \in X$ car alors la locale compacité de X nous permettrait de conclure à l'existence d'un $e \in X$ tel que $c \overset{\beta}{\rightarrow} e$ et cela contredirait $c \overset{\beta}{\mapsto} \#$ donc $c \overset{\alpha}{\mapsto} \#$.

iii) Si $c \in X$, $b \in X$ et $a = \#$, alors si on avait $c \overset{\alpha}{\rightarrow} d$ avec $d \in X$, on aurait $b \overset{\alpha}{\rightarrow} d$ et cela contredit $b \overset{\alpha}{\mapsto} \#$. Donc $c \overset{\alpha}{\mapsto} \#$.

iv) Si $a, b, c \in X$, (P2) appliquée à $\rightarrow$ conduit à $c \overset{\alpha}{\rightarrow} a$.

La compacité de $X \cup \{\#\},\mapsto)$ est une conséquence immédiate de la définition de $\mapsto$.

Quelques exercices.

1 - Soit $(X, \rightarrow)$ un espace proximal séparé. Montrez que

i) la proximité est localement compacte si et seulement si tout point admet un système fondamental de voisinages compacts, ii) elle est régulière si et seulement si tout point admet un système fondamental de voisinages fermés.

2 - Soit E un espace standard , $\rightarrow_-$, $\rightarrow_+$ et $\rightarrow = sup \{\rightarrow_- , \rightarrow_- \}$ les proximités définies comme ci-dessus. Soit l'application $F : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ définie par $F(A) = adh(A)$

a) Montrez que F est continue pour $\rightarrow_-$.

b) Montrez que si $(E, \rightarrow)$ est régulier, alors F est continue pour $\rightarrow_+$ et $\rightarrow$.

3- Soient $(E, \rightarrow)$ et $(E', \rightarrow')$ deux espaces proximaux. Montrez que si $f : E \rightarrow E'$ est continue, alors il en est de même de $F : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E')$, $A \rightarrow f(A)$, quand $\mathcal{P}(E)$ et $\mathcal{P}(E')$ sont équipés respectivement de $\rightarrow_-$ et $\rightarrow'_-$, ou de $\rightarrow_+$ et $\rightarrow'_+$, ou de $\rightarrow$ et $\rightarrow'$.

4 - Soit sur l'espace standard localement compact E, les relations $\rightarrow'_+$ *et* $\rightarrow_{K^+}$ définies sur l'ensemble $\mathcal{F}(E)$ des parties fermées non vide de E par : Si A_0 est standard

$$A \overset{\sigma}{\rightarrow}_{K^+} A_0 \text{ ssi : } \forall^{\sigma,compact} K \subset E\,[A \cap K \neq \emptyset \Rightarrow A_0 \cap K \neq \emptyset].$$

$$A \overset{\sigma}{\rightarrow}'_+ A_0 \text{ ssi : } \forall a \in A\,[(\exists^\sigma a_0 \in E\,(a \overset{\sigma}{\rightarrow} a_0)) \Rightarrow a_0 \in A_0].$$

a) Vérifier que $\rightarrow'_+$ est une proximité moins fine que $\rightarrow_+$.

b) Etablir que $A \overset{\sigma}{\rightarrow}_{K^+} A_0 \Leftrightarrow A \overset{\sigma}{\rightarrow}'_+ A_0$.

c) Soit la proximité $\rightarrow' = sup\,\{\rightarrow_-, \rightarrow'_+\}$. Montrez que $(E, \rightarrow')$ est un espace séparé (On appelle sa topologie la <u>topologie de Fell</u>)

5 - Soit E un ensemble . On appelle proximité d'Efremovic une relation binaire symétrique δ sur $\mathcal{P}(E)$ vérifiant les propriétés suivantes

α) Pour tout A, $\neg\,(\emptyset\,\delta A)$,

β) si $A \subset A'$, $B \subset B'$ et $A\,\delta B$ alors $A'\,\delta\,B'$,

χ) si $A\,\delta\{\cup B_i\}_{i \in I}$, où I est un ensemble d'indices fini , alors il existe $i \in I$ tel que $A\,\delta B_i$,

δ) Si $\neg\,(A\,\delta B)$ alors il existe C tel que $\neg\,(A\,\delta C)$ et $\neg\,((\complement_E C)\,\delta B)$,

ε) Si $A \cap B \neq \emptyset$ alors $A\,\delta B$.

a) Montrez que si E est un espace proximal, la relation définie par $A\,\delta\,B$ si et seulement si $adh\,A \cap adh\,B \neq \emptyset$, est une proximité d'Efremovic .

b)[8] Montrer que pour toute proximité d'Efremovic il existe un espace proximal compact X contenant E tel que $A\,\delta\,B$ si et seulement si $adh\,A \cap adh\,B \neq \emptyset$, les adhérences étant relatives à la proximité sur X .

Nous abandonnerons ici notre cours de topologie

[8] Des solutions classiques à la question b) de cet exercice sont données dans [H2] et [Sm]. une solution qui utiliserait les méthodes présentées ici reste à trouver. On trouve dans [Ch] une généralisation de ce résultat aux cas ou la condition δ est absente. L'espace X prolongeant E n'est plus alors compact mais régulier.

3 Equivalence entre l'approche de la topologie au moyen des proximités et l'approche classique.

Définition 2

Si X est un espace topologique standard avec $\mathcal{O}$ pour ensemble d'ouverts , on appelle proximité associée à $\mathcal{O}$ la proximité définie par : $y \overset{\alpha}{\to} x$ ssi $[x] \sqsubseteq \alpha$ et $\forall^{\alpha} U \in \mathcal{O} [x \in U \Rightarrow y \in U]$.

On vérifie sans peine qu'une relation $\to$ définie comme ci-dessus vérifie les propriétés (P1) et (P2) des proximités .

Nous allons montrer que toute proximité peut être déduite d'une topologie. Notre preuve sera précédée d'un lemme.

Lemme.

Soit $F^{(\sigma)}(y,x)$ une $^{\sigma}$formule stricte. Si la relation $\to$ définie par $y \overset{\alpha}{\to} x$ ssi $[x] \sqsubseteq \alpha$ & $F^{(\alpha)}(y,x)$ vérifie (P3), alors la relation $\to$ peut être définie au moyen d'une formule $\mu^{(\sigma)}(y,x)$ $^{\sigma}$monadique[9] .

Démonstration.

En effet, on aura alors pour tout x standard $y \overset{\alpha}{\to} x \Rightarrow y \overset{\sigma}{\to} x$. Qui s'écrit :

$\forall^{\sigma} x\ \forall y [(\forall^{\alpha} u_1\, \exists^{\alpha} v_1\, I(u_1, v_1, y, x)) \Rightarrow \forall^{\sigma} u_2\, \exists^{\sigma} v_2\, I(u_2, v_2, y, x)]$

avec I interne ayant ses paramètres standard. On sait qu'il existe une partie finie du domaine de v_2 dominée par α et contenant tous les éléments standard de ce domaine donc on peut écrire

$\exists^{\alpha.fini}\, \underline{v}_2\ \forall^{\sigma} u_2\ \forall^{\sigma} x\ \forall y\ [(\forall^{\alpha} u_1\, \exists^{\alpha} v_1\, I(u_1, v_1, y, x)) \Rightarrow \exists\, v_2 \in \underline{v}_2\, I(u_2, v_2, y, x)]$. Cela implique

$\forall^{\sigma} x\ \forall^{\sigma} u_2\ \exists^{\alpha.fini}\, \underline{v}_2\ \forall y\ [(\forall^{\alpha} u_1\, \exists^{\alpha} v_1\, I(u_1, v_1, y, x)) \Rightarrow \exists\, v_2 \in \underline{v}_2\, I(u_2, v_2, y, x)]$ qui équivaut à

$\forall^{\sigma} x\ \forall^{\sigma} u_2\ \exists^{\sigma.fini}\, \underline{v}_2\ \forall y [(\forall^{\sigma} u_1\, \exists^{\sigma} v_1\, I(u_1, v_1, y, x)) \Rightarrow \exists\, v_2 \in \underline{v}_2\, I(u_2, v_2, y, x)]$,

par le principe de construction cela nous donne l'existence d'une application standard, ω_2

[9] On dit que $\mu^{(\sigma)}(y,x)$ est $^{\sigma}$monadique si elle est équivalente à une formule de la forme $\forall^{\sigma} u\ H(u,y,x)$, H étant une formule du langage des mathématiques classiques (sans le prédicat « . st . »)

telle

que pour tout x et u_2 $\omega_2(x,u_2)$ soit fini et satisfaisant à

$\forall^\sigma x\ \forall^\sigma u_2\ \forall y\ [\ (\ \forall^\sigma u_1\ \exists^\sigma v_1\ I(u_1,v_1,y,x)\ ) \Rightarrow \exists\, v_2 \in \omega_2(x,u_2)\ I(u_2,v_2,y,x)\ ]$,

$\forall^\sigma x\ \forall y\ [\ (\ \forall^\sigma u_1\ \exists^\sigma v_1\ I(u_1,v_1,y,x)\ ) \Rightarrow \forall^\sigma u_2\ \exists\, v_2 \in \omega_2(x,u_2)\ I(u_2,v_2,y,x)\ ]$.

Si x et u_2 sont standard $\omega_2(x,u_2)$ étant fini et standard, tous ses éléments sont standard. Donc

$\forall^\sigma x\ \forall y\ [\ (\ \forall^\sigma u_1\ \exists^\sigma v_1\ I(u_1,v_1,y,x)\ ) \Leftrightarrow \forall^\sigma u_2\ \exists\, v_2 \in \omega_2(x,u_2)\ I(u_2,v_2,y,x)\ ]$.

Si on considère la formule monadique $\forall^\sigma u_2\ \exists\, v_2 \in \omega_2(x,u_2)\ I(u_2,v_2,y,x)$, que l'on notera $\mu^{(\sigma)}(y,x)$ on a pour tout x standard et tout y , $F^{(\sigma)}(y,x) \Leftrightarrow \mu^{(\sigma)}(y,x)$

Théorème 1.
Toute proximité est la proximité associée à un espace topologique.

<u>Démonstration</u>.

Soit E un ensemble standard, soit $\rightarrow$ une proximité et soit $\mu^{(\sigma)}(y,x) \equiv \forall^\sigma u\ H(u,y,x)$ une formule monadique la définissant. On définit pour tout x d'une manière homogène un système fondamental $\mathcal{V}(x)$ de voisinage en posant, si x est standard et si F est une partie finie du domaine U de u, $V_F(x) = \{y \in X : \forall u \in F\ H(u,y,x)\ \}$, $\mathcal{V}(x) = \{V_F(x)\}$.

Il découle de (P1) que $x \in V_F(x)$ pour tout $V_F(x) \in \mathcal{V}(x)$, et que $\mathcal{V}(x)$ est stable pour les intersections finies .

Montrons que si $V_F(x) \in \mathcal{V}(x)$ alors il existe un voisinage V de x tel que $V_F(x)$ soit un voisinage de chaque point de V. Considérons pour cela une partie finie F' de U contenant tous les points $^\sigma$dominés de U, posons $[F'] = \sigma'$ et soit F'' une partie fine de U contenant tous les éléments $^{\sigma'}$dominés de U. Il est clair que $W = V_{F'}(x) \subset V_F(x)$, D'autre part pour tout y $^{\sigma'}$dominé de $V_{F'}(x)$ et tout $z \in V_{F''}(y)$, on a $z \overset{\sigma'}{\rightarrow} y$ et $y \overset{\sigma}{\rightarrow} x$ donc, grâce à (P2), $z \overset{\sigma}{\rightarrow} x$. Cela implique $V_{F''}(y) \subset V_F(x)$. Cela entraîne que $V_F(x)$ est un voisinage de y pour tout y $^{\sigma'}$limité et donc (par transfert) pour tout y de W. Notons $\mapsto$ la proximité associée à la topologie définie par les $\mathcal{V}(x)$, on a directement $\forall y,\ x \in E\ [\ y \overset{\sigma}{\rightarrow} x \Leftrightarrow y \overset{\sigma}{\mapsto} x\ ]$. Les proximités coïncident donc.

Nous ne développerons pas ici la question de la définition des structures uniformes, toutefois appellons uniformité une relation $\approx$ vérifiant

$$(U1): \text{ si } \alpha \sqsubset \beta \text{ on a } y \;{}^{\beta}{\approx}\; x \Rightarrow y \;{}^{\alpha}{\approx}\; x$$
$$(U2): \text{les relations } {}^{\alpha}{\approx} \text{ sont des relations d'équivalence .}$$

Si U est un ensemble standard d'entourage de la diagonale d'un ensemble standard non vide E, la relation $\approx$ définie par $x \;{}^{\alpha}{\approx}\; y$ si et seulement si $\forall^{\alpha}\, u \in U\; [\,(x,y) \in u\,]$ est une uniformité. On démontre facilement que toute uniformité est de ce type. La clef de la preuve est le lemme suivant, qui se démontre d'une manière analogue au lemme précédent.

Lemme

Soit $F^{(\sigma)}(y,x)$ une ${}^{\sigma}$formule stricte. Si la relation $\approx$ définie par $y \;{}^{\alpha}{\approx}\; x$ ssi $F^{(\alpha)}(y,x)$ vérifie
(U1), alors la formule $F^{(\sigma)}(y,x)$ est ${}^{\sigma}$monadique .

Théorème 2

Toute uniformité est l'uniformité associée à une structure uniforme.

Remarque.

On peut rapprocher les théorèmes 1 et 2 des théorèmes 8-9 et 10-6 de [H1]. Ces résultats, bien antérieurs aux nôtres, ont pour cadre l'analyse non standard de A.Robinson basée sur la notion d'élargissement, et peuvent être vus aujourd'hui comme une sorte d'incarnation dans les ensembles de notre discours sur la proximité. Leur énoncé est le suivant :

Si E est un ensemble $*E$ un élargissement de E, et $G \subset *E \times *E$ un graphe, alors

||| G est la monade d'une topologie si et seulement si G est le graphe d'un pré-ordre sur $*E$, fermé pour la P-topologie sur $*E \times *E$ et demi-ouvert dans $*E \times *E$. .

||| G est la monade d'une structure uniforme si et seulement si G est le graphe d'un pré-ordre sur $*E$, fermé pour la S-topologie sur $*E \times *E$.

REFERENCES

[B] **P. Borde**, Une approche de la théorie de l'intégration avec les outils de la théorie relative des ensembles. Thèse de doctorat de l'Université Blaise Pascal, (1996).

[Ch] **M. Chicourrat**, Extensions de prétopologies et de proximités dans l'espace des ultrafiltres, Thèse de Doctorat de l'Université de Perpignan, (1992).

[Cs] **A. Császár**, Fondements de la topologie générale, Gauthier-Villars, Paris, 1960.

[D] **Ph.Dague**, Order of Magnitude Revisited. Congrès sur les systèmes experts. Avignon, Avril 1986.

[E] **V.A. Efremovic**, Infinitesimal spaces - Dokl. Acad. Nauk SSSR, 76 (1951), 341-343 (en Russe)

[H1] **L.Haddad**, Comments on nonstandard topology,, Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Clermont n°16 (1978).

[H2] ----------- Sur quelques points de topologie générale. Théorie des Nasses et des tramails, Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Clermont n°44 (1970).

[N] **E.Nelson.** Internal Set Theory, B.A.M.S. 83, n°6 nov. 77.

[P1] **Y. Péraire.** Théorie relative des ensembles internes. Osaka Journal Of Math.Vol. 29, n°2 (1992)

[P2] --------- Formules absolues dans la théorie relative des ensembles internes . Rivista di matematica pura ed applicata n°18 1996 (à paraître).

[P3] --------- Some extensions of the principles of idealization transfer and choice in the relative internal set theory. Archive for Mathematical Logic n° 34 p. 269-277 (1995).

[Sa] **T. Sari**, Nonstandard Analysis in practice, ch. 6, General Topology, Springer Universitex, 1995, à paraître .

[Sm] **Y.M. Smirnov**, On proximity spaces, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 38, 1964, p.5-35

Yves Péraire.
Université Blaise Pascal
Laboratoire de mathématiques pures
Complexe Scientifique des Cézeaux,
63177 Aubière, Cédex, FRANCE.

@-mail : peraire @ ucfma. univ.-bpclermont-fr