

AUGUSTIN FRUCHARD

## **Une résolution élémentaire d'un problème de scission de séparatrices**

*Annales mathématiques Blaise Pascal*, tome 4, n° 1 (1997), p. 37-47

[http://www.numdam.org/item?id=AMBP\\_1997\\_\\_4\\_1\\_37\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AMBP_1997__4_1_37_0)

© Annales mathématiques Blaise Pascal, 1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales mathématiques Blaise Pascal » (<http://math.univ-bpclermont.fr/ambp/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# Une résolution élémentaire d'un problème de scission de séparatrices

Augustin Fruchard

Le 27 mars 1995

**Résumé :** Je présente une méthode pour construire des solutions analytiques de l'équation aux différences

$$(1) \quad y(x + \varepsilon) - y(x - \varepsilon) = 2\varepsilon(1 - y(x)^2),$$

proches de la fonction  $\tanh$ , et j'utilise ces solutions pour calculer la longueur des paliers des solutions fantômes de l'équation logistique.

Il s'agit d'un travail en collaboration avec Reinhard Schäfke. La plupart des résultats sont dans [5]. Les différences principales entre les deux articles sont d'une part que j'ai utilisé ici le français et l'analyse non standard ce qui de mon point de vue en facilite la lecture mais sans doute pas la publication, et d'autre part que la construction présentée ici est plus simple (mais moins puissante) que dans [5].

## Introduction.

Les solutions fantômes, ou fausses solutions ("spurious solutions" en anglais) sont des solutions d'équations aux différences avec petit pas qui ont un comportement très différent des solutions de l'équation différentielle qui a été discrétisée. Un exemple classique [1, 8, 9] est celui de l'équation logistique

$$(2) \quad y' = 1 - y^2.$$

Si on remplace la dérivée  $y' = \frac{dy}{dx}$  par la différence symétrique

$$(3) \quad \delta_\varepsilon y(x) = \frac{1}{2\varepsilon} (y(x + \varepsilon) - y(x - \varepsilon)),$$

où  $\varepsilon$  est un nombre infiniment petit strictement positif, on obtient l'équation aux différences

$$(4) \quad \delta_\varepsilon y = 1 - y^2.$$

Le système dynamique discret associé (en posant  $y_n = y(x_0 + n\varepsilon)$ ) consiste à itérer la récurrence double

$$(5) \quad y_{n+1} = y_{n-1} + 2\varepsilon(1 - y_n^2).$$

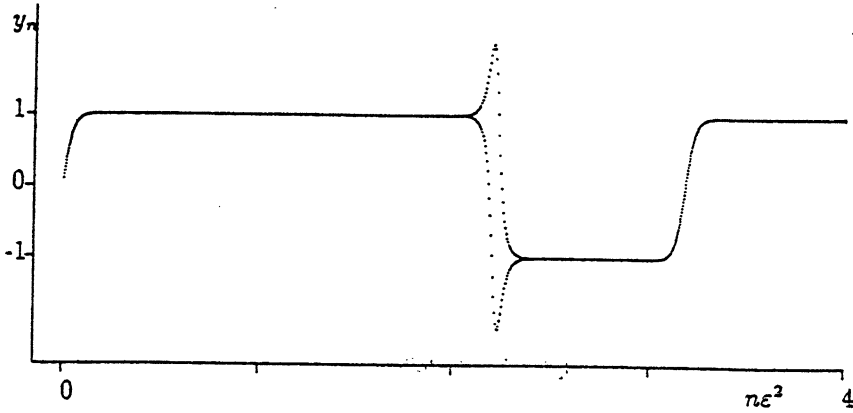


Figure 1: 1600 itérés de (5) avec conditions initiales  $y_0 = 0$  et  $y_1 = \varepsilon$ , et avec  $\varepsilon = \frac{1}{20}$ .

On sait par stroboscopie (ce qui classiquement s'appelle la convergence du schéma d'Euler) que pour  $n\varepsilon$  limité et pour les conditions initiales  $y_0$  et par exemple  $y_1 = y_0 + \varepsilon(1 - y_0^2)$ ,  $y_n$  est infiniment proche de  $\tilde{y}(x_0 + n\varepsilon)$ , où  $\tilde{y}$  est la solution de l'équation différentielle (2) de condition initiale  $\tilde{y}(x_0) = y_0$ .

Avec les conditions initiales  $y_0 = 0, y_1 = \varepsilon$  on observe ceci : au début le pointillé longe la solution  $\tilde{y}$  de (2) de condition initiale  $\tilde{y}(0) = 0$ , en l'occurrence la fonction  $\tanh(x)$ , et reste infiniment proche de 1 pendant un temps infiniment long. Puis les points d'indice pair et ceux d'indice impair suivent deux courbes différentes qui se trouvent être les courbes représentatives des fonctions  $-\tanh(2x) - \frac{\sqrt{3}}{\cosh(2x)}$  et  $-\tanh(2x) + \frac{\sqrt{3}}{\cosh(2x)}$  (ceci est expliqué dans une section ultérieure), pour se rejoindre dans le halo de  $-1$ . Après de nouveau un temps infiniment long le pointillé peut ou bien partir vers  $-\infty$ , ou bien recommencer un nouveau cycle.

Le fait que la solution de (5) de conditions initiales  $y_0 = 0, y_1 = \varepsilon$  ne suit pas indéfiniment la solution de (2)  $\tanh(x)$ , dû à l'instabilité du schéma de Nyström est bien connu des numériciens. Mon propos n'est pas de démontrer ce comportement ; ceci est bien expliqué dans [1, 8, 9]. Rappelons-le brièvement : si l'on pose  $u_n = y_{2n}, v_n = y_{2n+1}$  et  $Y_n = (u_n, v_n)$  on obtient la récurrence du premier ordre dans le plan

$$(6) \quad Y_{n+1} = \Phi(Y_n)$$

où la transformation  $\Phi : Y = (u, v) \rightarrow Y_1 = (u_1, v_1)$  est donnée par

$$(7) \quad \begin{aligned} u_1 &= u + 2\varepsilon(1 - v^2) \\ v_1 &= v + 2\varepsilon(1 - u^2). \end{aligned}$$

Noter au passage qu'une itération de  $Y_n$  à  $Y_{n+1}$  correspond à deux itérations de  $(y_{2n}, y_{2n+1})$  à  $(y_{2n+2}, y_{2n+3})$ .

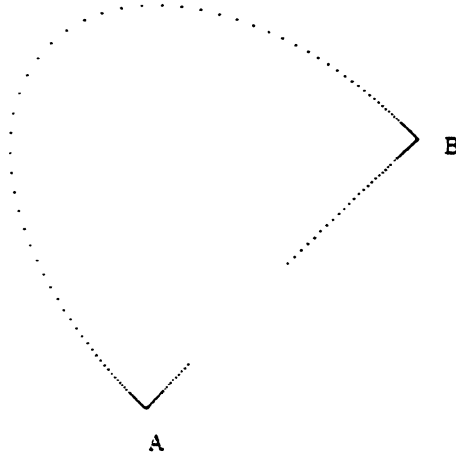


Figure 2: 2340 itérés de (6) de condition initiale  $Y_0 = (0, \varepsilon)$  avec  $\varepsilon = \frac{1}{40}$ .

On peut montrer que localement les orbites longent toujours des trajectoires du champ de vecteurs

$$(8) \quad \begin{aligned} u' &= 2(1 - v^2) \\ v' &= 2(1 - u^2). \end{aligned}$$

En effet, alors que le schéma en  $y_n$  est d'ordre 2 et instable, le schéma en  $Y_n$  est d'ordre 1 donc stable. Comme le montre Tewfik Sari dans [8] l'ombre de notre orbite de condition initiale  $Y_0 = (0, \varepsilon)$  est un enchaînement d'orbites du champ de vecteurs (8).

Notons pour l'instant que le système donné par (7) possède deux points selles en  $A = (-1, -1)$  et  $B = (1, 1)$ . La variété stable de  $B$  est notée  $W_s^+$ .

Tewfik Sari avait remarqué que les fantômes sont extrêmement instables. Par exemple le nombre de paliers avant que le pointillé ne parte vers  $-\infty$  dépend beaucoup de la précision des calculs (et même de la machine utilisée !) et aussi du nombre  $\varepsilon$ . Enfin il avait remarqué que le premier palier était, sauf cas exceptionnel, deux fois plus long que les suivants.

Si l'on postule que le système discret (6) est une perturbation d'ordre  $\varepsilon^2$  de l'équation (2), une première analyse reliant la longueur des paliers à la distance entre le point de départ et la variété  $W_s^+$  conduit à une estimation de la longueur des paliers de l'ordre de  $-\log(\varepsilon)$  (c'est effectivement le cas pour les conditions initiales  $y_0 = 0, y_1 = \tanh(\varepsilon)$ ). Or l'expérimentation sur ordinateur (avec  $y_0 = 0, y_1 = \varepsilon$ ) donne une longueur de l'ordre de  $\frac{1}{2}$ , ce qui suggère que le point  $(0, \varepsilon)$  est exponentiellement proche de  $W_s^+$ . L'expérimentation montre aussi que ce point est exactement entre la variété  $W_s^+$  et la variété instable de  $A$  (je le démontre dans la suite), ce qui suggère donc une exponentielle proximité entre ces deux variétés.

Un énoncé précis sur la longueur des paliers nécessite une définition précise. La définition choisie comporte une part d'arbitraire, par exemple les nombres 0 et  $-3$ . Il eût été plus conforme à l'esprit non-standard d'introduire des objets externes intrinsèques,

par exemple en considérant le halo des indices pour lesquels notre pointillé est infiniment proche d'un des points selles  $A$  ou  $B$ , mais cela soulève des difficultés théoriques supplémentaires, ce qu'évite la définition choisie.

On suppose que  $(y_n)$  est une orbite de (5) telle que  $y_0 + y_1 > 0$  et  $y_0, y_1$  infiniment petits. On définit les longueurs de paliers récursivement de la façon suivante.

**Définition 1** — On pose  $n_0 = l_0 = 0$  et si  $n_{k-1}$  existe et est fini, on pose  $n_k = \inf\{n > n_{k-1} \mid (-1)^k(y_{2n} + y_{2n+1}) \in ]-\infty, -3[ \cup ]0, 1[ \}$ . Le nombre, éventuellement infini,  $l_k = 2\varepsilon(n_k - n_{k-1})$  est la longueur du  $k$ -ième palier.

Je vais démontrer ici le résultat suivant.

**Théorème 2** — Avec les conditions initiales  $y_0 = 0, y_1 = \varepsilon$ , on a  $l_1 \geq \frac{\pi^2}{4\varepsilon}(1 + \theta)$  et pour  $k$  standard, si le  $k$ -ième palier existe,  $l_k \geq \frac{\pi^2}{8\varepsilon}(1 + \theta)$ . Avec les conditions initiales  $y_0 = 0, y_1 = \tanh(\varepsilon)$ , on a pour tout  $k$  standard  $l_k = -\frac{3}{2} \log(\varepsilon)(1 + \theta)$ .

Pour les conditions initiales  $(0, \varepsilon)$  on a seulement une borne inférieure des longueurs de palier, et des expériences numériques combinées à des arguments de valeur intermédiaire semblent indiquer qu'il y a des valeurs de  $\varepsilon$  pour lesquelles le deuxième palier est infini, d'autres pour lesquelles le troisième palier est infini, etc. et aussi que pour tout  $k$  standard dans  $\mathbb{N}$  il existe  $\varepsilon$  infiniment petit tel que la solution a exactement  $2k$  paliers, puis tend vers  $-\infty$ . Seule l'estimation pour le premier palier est conjecturée être aussi une borne supérieure. Par contre pour les conditions initiales  $(0, \tanh(\varepsilon))$  on a bien l'égalité annoncée.

Soulignons que l'affirmation du fait qu'il existe une solution analytique complexe de (2) proche d'une solution de l'équation différentielle (1) fait partie du folklore. Elle est souvent admise sans justification, comme par exemple dans [6] (l'existence est toutefois démontrée dans [7]). S'il est clair que les solutions discrètes de (5) sont proches de solutions de (2) (convergence des schémas numériques), il n'est pas du tout évident qu'on puisse les interpoler en des solutions de (4) analytiques complexes qui restent proches de solutions de (2) et je crois qu'un aspect important de notre contribution à Reinhard Schäfke et moi-même dans le domaine des équations aux différences est d'avoir apporté un peu de lumière sur cette question.

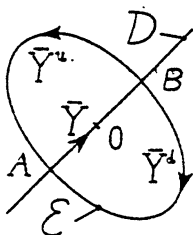
## La preuve.

Avant de démontrer ce résultat, j'ai besoin de donner quelques informations sur le champ de vecteurs (8).

### Description du champ de vecteurs (8).

L'identité  $2(1 - u^2)u' = 2(1 - v^2)v'$  fournit l'intégrale première  $u - u^3/3 - v + v^3/3 = k$ . En particulier pour  $k = 0$  la réunion de la droite  $\mathcal{D} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u = v\}$  et de l'ellipse  $\mathcal{E} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + uv + v^2 = 3\}$  est un sous-ensemble invariant.

Les points stationnaires sont deux centres en  $(-1, 1)$  et  $(1, -1)$  et deux points selles en  $A = (-1, -1)$  et  $B = (1, 1)$ . La variété stable de  $B$  et la variété instable de  $A$  sont des parties de  $\mathcal{D}$  qui est paramétrée par la solution  $\bar{Y}(x) = (\tanh(2x), \tanh(2x))$  et les solutions  $(\operatorname{cotanh}(2x), \operatorname{cotanh}(2x))$  et  $(-\operatorname{cotanh}(-2x), -\operatorname{cotanh}(-2x))$ , alors que la variété stable de  $A$  et la variété instable de  $B$  sont des parties de  $\mathcal{E}$  paramétrées par les solutions  $\bar{Y}^u(x) = (-\tanh(4x) - \frac{\sqrt{3}}{\cosh(4x)}, -\tanh(4x) + \frac{\sqrt{3}}{\cosh(4x)})$  et  $\bar{Y}^d(x) = (-\tanh(4x) + \frac{\sqrt{3}}{\cosh(4x)}, -\tanh(4x) - \frac{\sqrt{3}}{\cosh(4x)})$  ( $u$  et  $d$  pour "up" et "down" dans la version anglaise).



Pour trouver cette trajectoire on remarque d'abord que le changement de variables  $u = z + w, v = z - w$  conduit au système

$$(9) \quad \begin{aligned} z' &= 2(1 - z^2 - w^2) \\ w' &= 4zw. \end{aligned}$$

qui transforme notre ellipse en l'ellipse  $3z^2 + w^2 = 3$ . On trouve sur celle-ci l'équation  $z' = 4(z^2 - 1)$  qui admet  $z(x) = -\tanh(4x)$  comme solution. La fonction  $w(x)$  correspondante est  $w(x) = \sqrt{3}/\cosh(4x)$ .

Retenons que la solutions  $\bar{Y}$  est holomorphe et à valeurs limitées dans la bande  $B_{\pi/4}$  (où  $B_h = \{x \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im}(x)| < h\}$ ) alors que les solutions sur l'ellipse  $\bar{Y}^u$  et  $\bar{Y}^d$  sont holomorphes et à valeurs limitées dans  $B_{\pi/8}$ .

### Preuve du théorème 2.

Celle-ci se fait en plusieurs étape, dont la plus importante est la suivante.

**Lemme 3** — Il existe une solution entière  $y^+$  de l'équation aux différences symétrique (1) telle que  $\lim_{\operatorname{Re}(x) \rightarrow +\infty} y^+(x) = 1$  et pour tout  $x$  dans le  $S$ -intérieur de  $B_{\pi/2}$ ,  $y^+(x) \simeq \tanh(x)$ .

Je reviendrai à la construction de cette solution à la fin de l'article. Voyons auparavant comment s'en déduit le théorème 2.

2 — Quitte à effectuer une translation de la variable  $x$  d'un infiniment petit  $\alpha$  on peut supposer de plus :  $y^+(\frac{\alpha}{2}) + y^+(-\frac{\alpha}{2}) = 0$ . En effet, si  $y$  est une solution donnée par le lemme 3, la fonction  $\varphi(x) = y(x + \frac{\alpha}{2}) + y(x - \frac{\alpha}{2})$  est infiniment proche de la fonction

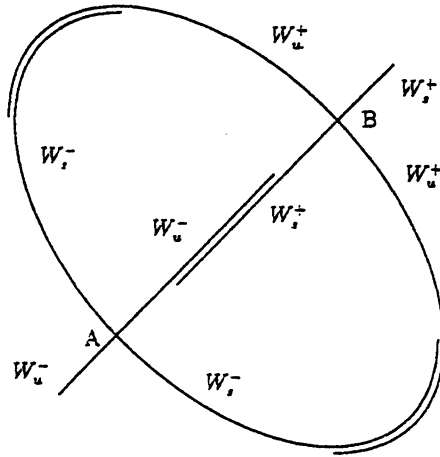


Figure 3: Schéma des variétés "stables et instables".

2  $\tanh(x)$  ainsi que sa dérivée, donc il existe  $\alpha$  infiniment petit tel que  $\varphi(x + \alpha) = 0$ . On pose alors  $y^+(x) = y(x + \alpha)$ .

3 — Si l'on pose  $y^-(x) = -y^+(-x)$ , alors  $y^-$  est aussi une solution de (1) (la fonction  $1 - y^2$  est paire), infiniment proche de  $\tanh(x)$  dans le S-intérieur de  $B_{\pi/2}$  et telle que  $\lim_{\text{Re}(x) \rightarrow -\infty} y^-(x) = -1$ . De plus on a pour tout  $n$  dans  $\mathbb{Z}$ ,  $y^+(\frac{\varepsilon}{2} + n\varepsilon) = y^-(\frac{\varepsilon}{2} + n\varepsilon)$  : ces deux fonctions coïncident en  $\pm \frac{\varepsilon}{2}$  et sont solutions de la même équation aux différences donc coïncident aux points  $\frac{\varepsilon}{2} + n\varepsilon$ .

4 — Le lemme 4.1 de [4] montre alors que pour tout  $x$  réel limité,

$$|y^+(x) - y^-(x)| \leq \exp\left(\frac{-\pi^2 + \theta}{2\varepsilon}\right)$$

5 — En posant  $Y_n = (y_{2n}, y_{2n+1})$ , les points A et B sont aussi des points selles du système discret du plan  $Y_{n+1} = \Phi(Y_n)$  ( $\Phi$  donné par (7)) et possèdent des variétés stables et instables proches des variétés correspondantes du champ de vecteurs. La variété stable de B,  $W_s^+$ , étant paramétrée par  $t \rightarrow (y^+(t), y^+(t + \varepsilon))$  et la variété instable de A,  $W_u^-$ , étant paramétrée par  $t \rightarrow (y^-(t), y^-(t + \varepsilon))$ , ces deux variétés sont exponentiellement proches. De manière précise, si  $S$  désigne la bande  $S = \{Y = (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq u + v \leq 1\}$  alors pour la distance de Hausdorff,

$$\text{dist}(W_s^+ \cap S, W_u^- \cap S) \leq \exp\left(\frac{-\pi^2 + \theta}{2\varepsilon}\right).$$

6 — Le point  $(0, \varepsilon)$  est entre ces deux variétés : si  $\beta \simeq 0$  est tel que  $y^+(\beta) = 0$  alors le point  $M = (0, y^+(\beta + \varepsilon))$  est sur  $W_s^+$  et le point  $N = (0, y^-(\beta - \varepsilon))$  est sur  $W_u^-$ . Le calcul suivant  $y^+(\beta + \varepsilon) + y^-(\beta - \varepsilon) = y^+(\beta + \varepsilon) - y^+(\beta - \varepsilon) = 2\varepsilon(1 - y^+(\beta)^2) = 2\varepsilon$  montre que le point  $(0, \varepsilon)$  est le milieu du segment  $[M, N]$ . Ceci entraîne  $\text{dist}((0, \varepsilon), W_s^+) \leq \exp\left(\frac{-\pi^2 + \theta}{2\varepsilon}\right)$ .

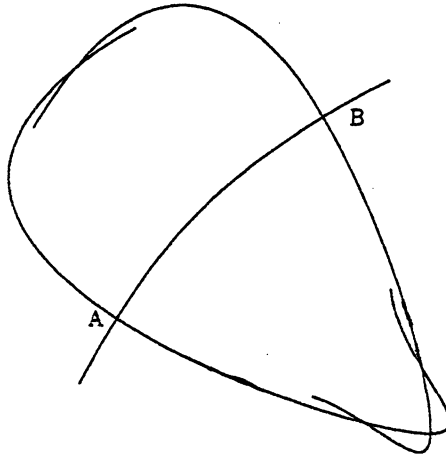


Figure 4: Les "vraies" variétés pour  $\varepsilon = \frac{1}{4}$ .

Or cette distance est intimement liée à la longueur du premier palier comme le montre le résultat suivant.

**Lemme 4** — Si on pose  $d_n^s = \text{dist}(Y_n, W_s^+)$  et  $d_n^u = \text{dist}(Y_n, W_u^+)$  alors on a  $\log d_{n_1}^u = (1 + \theta) \log d_0^s$  et  $l_1 = -\frac{1+\theta}{2} \log d_0^s$ . De même concernant le point A,  $\log \text{dist}(Y_{n_2}, W_u^-) = (1 + \theta) \log \text{dist}(Y_{n_1}, W_s^-)$  et  $l_2 = -\frac{1+\theta}{2} \log \text{dist}(Y_{n_1}, W_s^-)$ .

La preuve de ce lemme est dans la prochaine section. Achéons pour l'instant la preuve du théorème 2. Pour la condition initiale  $Y_0 = (0, \varepsilon)$  on a  $d_0^s \leq \exp(\frac{-\pi^2 + \theta}{2\varepsilon})$  et pour  $Y_0 = (0, \tanh(\varepsilon))$  on a  $d_0^s = \frac{\varepsilon^2}{3} \sqrt{2}(1 + \theta) = \varepsilon^{3+\theta}$ . Ceci donne le résultat pour les premiers paliers. En ce qui concerne les paliers suivants, les étapes 1 — à 5 — ci-dessus s'adaptent et, compte tenu du fait que les solutions  $\tilde{Y}^u$  et  $\tilde{Y}^d$  sont holomorphes limitées dans  $B_{\pi/8}$ , les deux variétés  $W_s^-$  et  $W_u^+$  du système discret qui sont proches de l'ellipse satisfont

$$\text{dist}(W_s^- \cap S, W_u^+ \cap S) \leq \exp\left(\frac{-\pi^2 + \theta}{4\varepsilon}\right).$$

Pour le point de départ  $(0, \varepsilon)$ , puisque la distance  $d_{n_1}^u = d(Y_{n_1}, W_u^+)$  est au plus d'ordre  $\exp(\frac{-\pi^2 + \theta}{2\varepsilon})$ , on en déduit que  $d(Y_{n_1}, W_s^-) \leq \exp(\frac{-\pi^2 + \theta}{4\varepsilon})$ , ce qui donne  $l_2 \geq \frac{\pi^2 + \theta}{8\varepsilon}$  et il en est de même des autres paliers s'ils existent.

Pour le point départ  $(0, \tanh(\varepsilon))$  on a  $d_{n_1}^u = \varepsilon^{3+\theta}$  et de plus le point  $Y_{n_1}$  est à l'intérieur de la zone entourée par  $W_s^-$  et  $W_u^+$ , donc le deuxième palier est lui aussi de longueur  $\frac{-3+\theta}{2} \log(\varepsilon)$  et le pointillé repasse ensuite près de l'origine. Il en est de même des paliers suivants. Ceci achève la preuve du théorème.

**Preuve du lemme 4.**



Il s'agit de comparer le comportement des orbites de (6) avec les trajectoires du champ de vecteurs (8). La référence [2] contient des résultats analogues (mais nettement plus précis!). Si cette preuve est reléguée à l'appendice dans l'article [5], c'est d'une part parce que le sujet est éloigné du coeur de l'article (construction de solutions analytiques d'équations aux différences) mais surtout parce que l'utilisation de l'asymptotique classique a abusivement compliqué un texte qui, écrit dans le contexte de l'analyse non-standard, est à la fois clair et mathématiquement rigoureux sous son apparence heuristique. La preuve a d'ailleurs été écrite une première fois dans le formalisme non standard avant d'être traduite en termes classiques.

1 — On démontre tout d'abord que le pointillé  $(Y_n)$  longe  $\bar{Y}$ , puis reste un temps infiniment long dans le halo de  $B$  et enfin, ou bien  $(Y_n)$  tend vers  $B$ , ou bien  $(Y_n)$  longe l'ellipse  $\mathcal{E}$  en suivant l'une des solutions  $\bar{Y}^u$  ou  $\bar{Y}^d$ . La preuve est de Tewfik Sari. Brièvement par stroboscopie et par permanence il existe  $\nu$  avec  $\nu\varepsilon$  infiniment grand tel que pour tout  $n \leq \nu$ ,  $Y_n \simeq \bar{Y}(n\varepsilon)$ . Si on considère un disque standard de rayon arbitrairement petit centré en  $B$  et si le pointillé quitte ce disque, l'ombre du premier point de sortie d'indice supérieur à  $\nu$  est sur l'ellipse  $\mathcal{E}$  (sinon par stroboscopie le pointillé longerait la trajectoire du champ de vecteur passant en ce point et donc en remontant le temps ressortirait du disque en-dehors du halo de  $\mathcal{D}$ ). On aurait ainsi un point d'indice inférieur à  $\nu$  qui ne serait pas infiniment proche de  $\mathcal{D}$ ). Il s'ensuit par stroboscopie que  $(Y_n)$  longe l'une des solutions  $\bar{Y}^u$  ou  $\bar{Y}^d$ . Une dernière permanence sur le rayon du disque permet de conclure.

2 — Avec les notations du lemme  $d_n^s = \text{dist}(Y_n, W_s^+)$  et  $d_n^u = \text{dist}(Y_n, W_u^+)$  on vérifie les estimations suivantes :

Assertion 1 — Si  $Y_n$  est limité alors  $d_{n+1}^s = (1 + \theta)d_n^s$  et  $d_{n+1}^u = (1 + \theta)d_n^u$ .

Assertion 2 — Si pour tout  $k$  dans  $\{m \dots n\}$   $Y_k \simeq B$  alors  $d_n^s = d_m^s \exp((4 + \theta)(n - m)\varepsilon + \theta)$  et  $d_n^u = d_m^u \exp(-(4 + \theta)(n - m)\varepsilon + \theta)$ .

L'assertion 1 vient du fait que l'application  $\Phi$  a pour ombre l'identité. La preuve de l'assertion 2 consiste à conjuguer la transformation  $\Phi$  à une transformation  $\varphi : Z_n = (c_n, d_n) \rightarrow Z_{n+1}$  dont les variétés stable et instable sont respectivement l'axe  $0c$  et l'axe  $0d$ , et de vérifier que cette conjugaison peut se faire par un difféomorphisme presque standard tangent à une rotation. Les valeurs propres de  $\Phi$  étant  $\lambda = 1 + 4\varepsilon(2\varepsilon - \sqrt{1 + 4\varepsilon^2}) = \exp(-(4 + \theta)\varepsilon)$  et  $\mu = 1 + 4\varepsilon(2\varepsilon + \sqrt{1 + 4\varepsilon^2}) = \exp((4 + \theta)\varepsilon)$  on obtient  $c_n = c_m \exp(-(4 + \theta)(n - m)\varepsilon + \theta)$  et  $d_n = d_m \exp((4 + \theta)(n - m)\varepsilon + \theta)$ . On conclut en utilisant  $d_k^s = c_k(1 + \theta)$  et  $d_k^u = d_k(1 + \theta)$ . Les détails sont contenus dans la preuve de la proposition A.4 de [5].

Ce "dégauchissage" des variétés stable et instable rejoint la méthode de E. Fontich et C. Simo [3], qui est une adaptation de la méthode des formes normales de Birkhoff : ces deux auteurs démontrent l'existence de formes normales ayant un comportement uniforme en  $\varepsilon$  dans une situation analogue. Ici il ne s'agit pas de forme normale puisque les conditions imposées à  $\varphi$  sont beaucoup plus faibles, mais cette mise en forme nous suffit.

Le résultat peut s'interpréter de la façon suivante. Le comportement d'une orbite du système discret partant d'un point à une distance  $d$  infiniment petite d'une variété stable (par exemple  $W_s^+$ ) est analogue au comportement d'une trajectoire du champ de vecteurs (3) partant à la même distance  $d$  de la variété stable correspondante (ici la droite  $\mathcal{D}$ ) qui lui-même est analogue au comportement d'une trajectoire du linéarisé du champ au point selle (ici  $B$ ) partant à la distance  $d$  de la variété stable. Le temps passé près du point selle est donc de l'ordre de  $\frac{-\log d}{k}$  où  $k$  est la valeur propre positive du linéarisé (ici 4). (Il entre encore en ligne de compte un facteur 2, dû au fait que la longueur des paliers était exprimée relativement à  $y_n$  et non à  $Y_n = (y_{2n}, y_{2n+1})$ .)

3 — On déduit des deux assertions précédentes l'assertion suivante.

Assertion 3 — On a  $d_{n_1}^s = d_0^s \exp((4 + \theta)n_1\varepsilon)$  et  $d_{n_1}^u = d_0^u < \exp(-(4 + \theta)n_1\varepsilon)$ .

Compte tenu du fait que  $d_0^u = \sqrt{2} + \theta$  et que  $d_{n_1}^s = \sqrt{6} + \theta$  on en déduit le lemme (les estimations concernant le point A sont similaires).

### Preuve du lemme 3.

Revenons à la construction de solutions analytiques de l'équation (1). La méthode suivie dans [5] est de réécrire l'équation (1) sous la forme intégrale  $y = \delta_\varepsilon^{-1}(1 - y^2)$ , où  $\delta_\varepsilon^{-1}$  est un inverse de l'opérateur  $\delta_\varepsilon$ , et d'utiliser un théorème de point fixe (non pas directement à cet opérateur puisque celui-ci n'est pas contractant en général, mais après quelques modifications qui sont exposées dans l'article). Il est aussi possible de suivre la méthode des formes normales de E. Fontich et C. Simo [2]. La méthode que j'expose ici, la plus simple à mon avis, est le fruit de nos récentes réflexions avec Reinhard Schäfke et repose sur le procédé de série majorante.

Le changement d'inconnue  $y^+ = 1 + 2z$  conduit à  $\delta_\varepsilon z = -2z(1 + z)$ . En posant  $t = e^{az}$  et  $q = e^{a\varepsilon}$  avec  $a$  tel que  $q - q^{-1} = 4\varepsilon$  (c'est-à-dire  $a = \frac{1}{2} \operatorname{argsinh}(2\varepsilon)$ ) et en posant  $\varphi(t) = z(x)$  on obtient l'équation aux  $q$ -différences

$$(10) \quad \varphi(qt) - \varphi(q^{-1}t) = (q - q^{-1})\varphi(t)(1 + \varphi(t))$$

dont la seule série formelle solution  $\varphi(t) = \sum_{n \geq 0} \varphi_n t^n$  vérifie la récurrence  $\varphi_1 = 1$  et pour  $n \geq 2$

$$(q^n - q^{-n})\varphi_n = (q - q^{-1})\varphi_n + (q - q^{-1})K_n,$$

où  $K_n$  est le coefficient du terme de degré  $n$  dans le développement en série de  $\varphi(t)^2$ .

Puisque  $q > 1$  la suite  $c_n = \frac{q - q^{-1}}{(q^n - q^{-n}) - (q - q^{-1})}$  est décroissante donc majorée par  $c_2 = \frac{1}{q + q^{-1} - 1} \leq 1$ , donc  $|\varphi_n| \leq |K_n|$ . Noter aussi que seuls les  $\varphi_k$  pour  $k \leq n - 1$  interviennent dans  $K_n$ .

Soit  $\hat{\varphi}$  une solution de l'équation  $\hat{\varphi}(t) = t + \hat{\varphi}(t)^2$ , par exemple  $\hat{\varphi}(t) = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - t}$  où l'on choisit la détermination principale de la racine. On a  $\hat{\varphi}(t) = t + \sum_{n \geq 2} \hat{\varphi}_n t^n$  où  $\hat{\varphi}_n$  est

le coefficient du terme de degré  $n$  dans le développement de  $\hat{\varphi}(t)^2$ . Une récurrence montre que pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ ,  $|\varphi_n| \leq \hat{\varphi}_n$ , donc la série  $\varphi$  a un rayon de convergence au moins égal à  $\frac{1}{4}$ .

Ceci nous fournit une solution  $y^+$  tendant vers 1 quand  $\text{Re}(x)$  tend vers  $+\infty$ , et limitée dans un demi-plan standard  $P = \{x \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(x) > k\}$  avec  $k$  quelconque supérieur à  $\log 2$ . Au besoin en effectuant une translation de la variable  $x$  on peut supposer  $y^+(x_0) = \tanh(x_0)$  pour un certain réel  $x_0 > k$ . La stroboscopie montre que pour  $n$  dans  $\mathbb{Z}$  tel que  $n\varepsilon$  est limité,  $y^+(x_0 + n\varepsilon) \simeq \tanh(x_0 + n\varepsilon)$ , le théorème de Robinson-Callot entraîne que  $y^+(x) \simeq \tanh(x)$  pour tout  $x$  dans le S-intérieur de  $P$ , l'équation aux différences permet de prolonger  $y^+$  en une fonction entière, et à nouveau la stroboscopie montre que  $y^+(x) \simeq \tanh(x)$  dans le S-intérieur de  $B_{\pi/2}$ .

## References

- [1] S.N. Chow, E.M. de Jager and R. Lutz, *The ghost solution of the logistic equation and a singular perturbation problem* Advances in Computational Methods for boundary and interior layers, Dublin (1984) 15-20.
- [2] E. Fontich and C. Simo, *The splitting of separatrices for analytic diffeomorphisms*, Ergod.Th. & Dynam.Sys, 10 (1990) 295-318.
- [3] E. Fontich and C. Simo, *Invariant manifolds for near identity maps and splitting of separatrices*, Ergod.Th. & Dynam.Sys, 10 (1990) 319-346.
- [4] A. Fruchard, *Les fonctions périodiques de période infiniment petite*, C. R. Acad. Sci. 318 Série I, 227-230 (1994).
- [5] A. Fruchard et R. Schäfke, *Exponentially small splitting of separatrices for difference equations with small step size*, prépublication IRMA 7, rue René Descartes 67084 Strasbourg Cedex, France, (1994).
- [6] V.F. Lazutkin, I.G. Schachmannski and M.B. Tabanov, *Splitting of separatrices for standard and semistandard mappings*, Physica D, 40 235-248, (1989).
- [7] V.F. Lazutkin, *Exponential splitting of separatrices and an analytic integral for the semistandard map*, prépublication n° 7, Université Paris VII (1991).
- [8] T. Sari, *Stroboscopy, averaging and long time behaviour in dynamical systems*, preprint Université de Sidi Bel Abbès (1990) Algérie.
- [9] M. Yamaguti and S. Ushiki, *Chaos in numerical analysis of ordinary differential equations*, Physica 3D (1981) 618-626.

Augustin FRUCHARD

Université de la Rochelle

Département de Mathématiques

Avenue Marillac

17042 LA ROCHELLE CEDEX 1