ANNALES MATHÉMATIQUES BLAISE PASCAL

ANTOINE DELCROIX

Sur une classe d'algèbre de fonctions généralisées application aux systèmes différentiels

Annales mathématiques Blaise Pascal, tome 4, n° 1 (1997), p. 27-35
<http://www.numdam.org/item?id=AMBP_1997__4_1_27_0>

Ann. Math. Blaise Pascal, Vol. 4, N° 1, 1997, pp.27-35

SUR UNE CLASSE D'ALGEBRE DE FONCTIONS GENERALISEES APPLICATION AUX SYSTEMES DIFFERENTIELS

Antoine DELCROIX

1. INTRODUCTION ET NOTATIONS

1.1. Introduction

Les travaux autour des algèbres de fonctions généralisées se sont multipliés ces dernières années afin de résoudre des problèmes différentiels qui n'admettent pas de solution au sens des distributions ([2], [3], [7], [10], [12]). Au cœur de ces problèmes se trouve souvent l'impossibilité de donner un sens au produit de distributions. Cette difficulté se contourne en injectant l'espace $\mathcal{D}'(\Omega)$ des distributions sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ dans une algèbre $\mathcal{G}(\Omega)$, appelée algèbre de fonctions généralisées, où l'on peut effectuer le produit des (représentants) des distributions. L'algèbre des fonctions $C^\infty(\Omega)$ s'injecte également dans $\mathcal{G}(\Omega)$ et les opérations de $\mathcal{G}(\Omega)$, restreintes à $C^\infty(\Omega)$, prolongent celles de $C^\infty(\Omega)$ à un "infiniment petit près" (voir une discussion complète sur ce sujet dans [10]).

Une des premières constructions a été l'algèbre de fonctions généralisées simplifiée de J.F. Colombeau [3] (notée dans la suite $\mathcal{G}_S(\Omega)$), équivalente au *non intrinsic settings* de D. Scarpalezos [12]. Cette construction possède un caractère très opérationnel, comme le montrent les nombreuses applications ([2], [3], [11]). Mais l'algèbre $\mathcal{G}_S(\Omega)$ ne suffit pas pour décrire les solutions de problèmes dans lesquels l'opérateur est singulièrement perturbé par un paramètre ε[1]. Certaines solutions de ces problèmes croissent exponentiellement vite par rapport à $1/\varepsilon$ alors que les éléments de $\mathcal{G}_S(\Omega)$ sont à croissance modérée par rapport à $1/\varepsilon$.

Parmi les constructions d'algèbres généralisées, l'algèbre de Yu. Egorov [7] permet de décrire les solutions de tels problèmes, puisqu'on y dispose d'une notion d'exponentielle "généralisée". Cependant, contrairement à l'algèbre $\mathcal{G}_S(\Omega)$, cette algèbre semble moins reliée à des propriétés asymptotiques familières [4].

Nous avons construit par ailleurs une algèbre "plus petite" que celle de Yu. Egorov (notée $\mathcal{A}_{\mathrm{Exp}}(\Omega)$ dans la suite) exactement adaptée au problème de la définition d'une exponentielle généralisée [5]. Son principe de construction est en fait similaire à celui de l'algèbre $\mathcal{G}_S(\Omega)$ de J.F. Colombeau [3].

Les deux algèbres $\mathcal{A}_{\mathrm{Exp}}(\Omega)$ et $\mathcal{G}_S(\Omega)$ sont des algèbres définies comme quotient d'une sous-algèbre $\mathcal{A}(\Omega)$ de $\mathcal{X}(\Omega) = C^\infty(\Omega)^{]0,1]}$ et d'un idéal $\mathcal{I}(\Omega)$ de $\mathcal{A}(\Omega)$. Dans chaque cas, la sous-algèbre $\mathcal{A}(\Omega)$ est définie à partir d'une propriété de croissance modérée par rapport à une certaine échelle asymptotique et l'idéal $\mathcal{I}(\Omega)$ à partir de la propriété duale de décroissance rapide par rapport à cette même échelle asymptotique.

Nous définissons ci-dessous cette notion d'échelle asymptotique et la construction des algèbres à partir de ces échelles. Nous proposons de les appeler *algèbres asympto-*

[1]Un problème différentiel dépendant d'un "petit" paramètre ε est dit singulièrement perturbé lorsque la valeur $\varepsilon = 0$ du paramètre fait chuter l'ordre du problème.

tiques ou *algèbres de type Colombeau*, puisqu'elles reposent sur l'idée initiale de J.F. Colombeau. Nous montrerons que les algèbres citées plus haut entrent effectivement dans ce cadre. Enfin nous parlerons de problème différentiel dans de telles algèbres, ce qui est actuellement le champ d'application le plus prometteur.

Nous avons choisi ici de présenter les objets en termes non standard, ce qui conduit à des définitions plus légères, mais surtout à la possibilité de lier ces constructions algébriques à des propriétés asymptotiques non standard (voir [4] pour ce lien dans le cas de l'algèbre $\mathcal{G}_S(\Omega)$. Dans la suite, nous construirons nos algèbres sur $\mathrm{C}^\infty(\Omega)$ où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Selon une remarque, dont l'auteur est redevable à D. Scarpalezos, on peut construire plus généralement des espaces généralisés à partir d'espaces vectoriels topologiques localement convexes et métrisables, dont la topologie est donc donnée par une famille dénombrable de semi-normes croissantes. Ceci permet d'envisager d'aborder d'autres types de problèmes sous l'angle des espaces généralisés, comme par exemple dans [1] des problèmes de processus stochastiques.

1.2. Notations et conventions

Nous utilisons l'Internal Set Theory de Nelson [9]. On désigne dans la suite par :

- $\oslash$, un réel infiniment petit quelconque,
- $\pounds$, un réel limité quelconque,
- $@$, un élément de $\mathbb{R}$ appréciable quelconque.

La notation $x \simeq 0$ signifie que x est un réel infiniment petit, $x \gtrsim 0$ signifie que x est un réel infiniment petit strictement positif.

Enfin, on rappelle que le *standardisé* d'un ensemble (interne ou externe) E, défini par une propriété $\mathcal{P}(\cdot)$ ($E = \{x \mid \mathcal{P}(x)\}$), est l'unique ensemble standard, éventuellement vide, noté ${}^S E$, dont les éléments standard vérifient la propriété $\mathcal{P}(\cdot)$.

2. ALGEBRE ASYMPTOTIQUE

2.1. Définition des échelles asymptotiques

Définition 2.1. *Une* échelle asymptotique *est une suite standard $g = (g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions $g_n : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ satisfaisant les conditions suivantes :*
i. $g_n(x) = 0$, *pour tout entier n et tout réel $x \leq 0$;*
ii. $g_n(x) \simeq 0$, *pour tout entier standard $n > 0$ et tout réel $x \simeq 0$;*
iii. $g_{n+1}(x) = \pounds g_n(x)$, *pour tout entier standard n et tout réel $x \simeq 0$;*
iv. propriété de filtration. *Pour tout entier n et m standard, il existe un entier standard N tel que*

$$\forall x \simeq 0, \quad g_N(x) = \pounds g_n(x) g_m(x). \tag{2.1}$$

Exemples.
1. L'échelle polynomiale, ou échelle de J.F. Colombeau, est définie par $g_n(x) = x^n$ pour tout $n \geq 0$ et tout $x > 0$.
2. L'échelle exponentielle est définie par $g_n(x) = 1/h_n(1/x)$ pour tout $n \geq 0$ et tout $x > 0$, où

$$h_0(x) = x, \qquad h_{n+1}(x) = \exp(h_n(x)), \text{ pour tout } n \text{ et tout } x > 0.$$

3. L'échelle de Yu. Egorov est l'échelle constante définie par $g_n(x) = 0$ pour tout $n \geq 0$ et tout $x \geq 0$.

Remarques.
1. Pour les échelles les plus souvent utilisées, on peut remplacer Ł par $\oslash$ dans la condition *iii.* C'est le cas pour les échelles polynomiale et exponentielle. Si cela ne sert pas dans la construction des algèbres asymptotiques, c'est en revanche indispensable pour définir des topologies sur de telles algèbres [6].
2. Une échelle g "structure" le halo de zéro. Il est donc clair que la suite $(1/g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ structure le halo de $+\infty$.

2.2. Définition des algèbres asymptotiques

Dans toute la suite de l'article, on fixe un entier standard d, un ouvert standard Ω de $\mathbb{R}^d$ et une échelle asymptotique $g = (g_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On notera:

- E, l'intervalle $]0,1]$,
- $\mathcal{X} = \mathcal{X}(\Omega) = \mathrm{C}^\infty(\Omega)^E$, l'algèbre des familles $\varphi = (\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon\in E}$ où chaque φ_ε est une fonction indéfiniment différentiable définie sur Ω.

Définition 2.2. *Soit $\varphi = (\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon\in E} \in \mathcal{X}$.*
*1. On dit que φ est g-*modérée *si pour tout x presque standard dans Ω, on a*

$$\forall^{st}\alpha \in \mathbb{N}^d,\ \exists^{st}p \in \mathbb{N},\ \forall\varepsilon \gtrapprox 0, \quad \partial^\alpha\varphi_\varepsilon(x) = Ł/g_p(\varepsilon). \tag{2.2}$$

*2. On dit que φ est g-*rapide *si pour tout x presque standard dans Ω, on a*

$$\forall^{st}\alpha \in \mathbb{N}^d,\ \forall^{st}p \in \mathbb{N},\ \forall\varepsilon \gtrapprox 0, \quad \partial^\alpha\varphi_\varepsilon(x) = Ł g_p(\varepsilon). \tag{2.3}$$

3. On désigne par $\mathcal{X}_g = \mathcal{X}_g(\Omega)$ et $\mathcal{N}_g = \mathcal{N}_g(\Omega)$ les standardisés des ensembles de familles $\varphi \in \mathcal{X}$ respectivement g-modérées et g-rapides.

Lemme 2.3. *L'ensemble $\mathcal{X}_g$ est une sous-algèbre de l'algèbre $\mathcal{X}$ et l'ensemble $\mathcal{N}_g$ un idéal de $\mathcal{X}_g$.*

La **démonstration** de ce lemme se fait sans détour à l'aide de la formule de Leibniz de dérivation d'un produit

$$\partial^\alpha(\varphi_\varepsilon\psi_\varepsilon) = \sum_{|\beta|+|\gamma|=|\alpha|} c_{\beta,\gamma}\partial^\beta\varphi_\varepsilon\,\partial^\gamma\psi_\varepsilon,$$

et de la propriété de filtration 2.1 de l'échelle g.

Remarque. La propriété de filtration 2.1 est donc une condition suffisante pour assurer la stabilité de l'ensemble $\mathcal{X}_g$ par multiplication. Il est facile de montrer que cette condition est également nécessaire.

Définition 2.4. *L'algèbre quotient*

$$\mathcal{A}_g = \mathcal{A}_g(\Omega) = \mathcal{X}_g / \mathcal{N}_g$$

est appelée algèbre asymptotique associée à l'échelle g.

Dans la suite, pour $\varphi \in \mathcal{X}_g$ et $\psi \in \mathcal{X}_g$, on écrira $\varphi \equiv \psi \bmod \mathcal{N}_g$ ou simplement $\varphi \equiv \psi \bmod g$ lorsque φ et ψ appartiennent à la même classe dans $\mathcal{A}_g$.

2.3. Exemples

1. Avec l'échelle polynomiale, on retrouve l'algèbre $\mathcal{G}_S(\Omega)$ de J.F. Colombeau.

2. En prenant pour g l'échelle exponentielle, on obtient l'algèbre $\mathcal{A}_{\mathrm{Exp}}(\Omega)$ de [5]. L'échelle exponentielle possède la propriété

$$\forall^{st} n \in \mathbb{N}, \quad \exists m \in \mathbb{N}, \quad \forall x \gtrapprox 0, \quad g_m(x) = \oslash \exp(g_n(x))$$

qui permet de définir une notion d'exponentielle dans l'algèbre $\mathcal{A}_{\mathrm{Exp}}(\Omega)$. C'est une manière de répondre, via l'injection non canonique de $\mathcal{D}'(\Omega)$ dans $\mathcal{A}_{\mathrm{Exp}}(\Omega)$, au problème de l'exponentielle (des représentants) d'une distribution [5].

3. En prenant pour g l'échelle de Yu. Egorov, on retrouve l'algèbre $\mathcal{L}(\Omega)$ de Yu. Egorov, définie par $\mathcal{L}(\Omega) = \mathcal{X} / \ I_{loc}$ avec

$$I_{loc} = \{\varphi \in \mathcal{X} \mid \forall K \subset\subset \Omega, \ \exists \eta > 0, \ \forall \varepsilon \in]0, \eta] \ \ \varphi_{|K} \equiv 0\}.$$

En effet, soit $\varphi \in \mathcal{X}$ une famille standard. La famille φ est g-modérée puisque

$$\forall \varepsilon \in]0,1], \quad \forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \Omega, \qquad |\partial^\alpha \varphi_\varepsilon(x)| < +\infty = @/g_p(\varepsilon).$$

Par ailleurs φ est g-rapide si et seulement si pour tout x presque standard dans Ω

$$\forall^{st} \alpha \in \mathbb{N}^d, \quad \forall^{st} q \geq 0, \quad \forall \varepsilon \gtrapprox 0, \quad \partial^\alpha(\varphi_\varepsilon(x)) = \mathrm{L}g_q(\varepsilon) = 0,$$

donc si et seulement si pour tout compact K standard inclus dans Ω

$$\forall^{st} \alpha \in \mathbb{N}^d, \quad \forall^{st} q > 0, \quad \forall \varepsilon \gtrapprox 0, \quad \partial^\alpha \varphi_{\varepsilon|K} \equiv 0.$$

Cette dernière propriété équivaut clairement à l'appartenance de φ à I_{loc}.

3. SYSTEMES DIFFERENTIELS DANS LES ALGEBRES ASYMPTOTIQUES

Dans ce paragraphe, nous nous inspirons du travail fait dans [5] et [8]. On fixe un entier standard $m > 0$ et on considère l'algèbre $\mathcal{Y} = \mathrm{C}^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^m)^E$.

3.1. Notion de stabilité

Soit $F = (F_\varepsilon)_{\varepsilon\in E}$ un élément standard de $\mathcal{Y}$. Pour chaque m-uple $\varphi = (\varphi_1, \cdots, \varphi_m) \in \mathcal{X}^m$, on définit la *composée* $F \cdot \varphi = G = (G_\varepsilon)_{\varepsilon\in E}$ par

$$\forall\varepsilon \in]0,1], \quad \forall x \in \Omega, \quad G_\varepsilon(x) = F_\varepsilon(x, \varphi(x)) = F_\varepsilon(x, \varphi_{1,\varepsilon}(x), \cdots, \varphi_{m,\varepsilon}(x)).$$

On dit alors que l'algèbre $\mathcal{A}_g$ est *stable* par F lorsque, pour tout $\varphi \in \mathcal{X}_g^m$, on a:
i. la composée $F \cdot \varphi$ appartient à $\mathcal{X}_g$,
ii. la classe de $F \cdot \varphi$ dans $\mathcal{A}_g$ ne dépend que de la classe de φ dans $\mathcal{A}_g^m$, *i.e.*, pour tout $(\varphi, \psi) \in \mathcal{X}_g^m \times \mathcal{X}_g^m$ avec $\varphi \equiv \psi \bmod \mathcal{N}_g^m$, on a

$$F \cdot \varphi \equiv F \cdot \psi \bmod \mathcal{N}_g^m.$$

On dit qu'une fonction standard $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *respecte* l'échelle g lorsque, pour tout entier standard m, il existe un entier standard p tel que

$$\forall x \gtrapprox 0, \quad h(\mathrm{Ł}/g_n(x)) = \mathrm{Ł}/g_p(x).$$

Enfin, soit $h = (h_1, \cdots, h_m)$ un m-uple de fonctions de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. On dit que h est *adapté* à $F \in \mathcal{Y}$ lorsque chaque h_i respecte l'échelle g et que, pour tout point presque standard dans Ω, la condition suivante est satisfaite

$$\begin{gathered}\forall^{st}\beta \in \mathbb{N}^{d+m}, \ \exists^{st}p \in \mathbb{N}, \ \forall y = (y_1, \cdots, y_m) \in \mathbb{R}^m, \\ \forall\varepsilon \gtrapprox 0, \quad \partial^\beta F_\varepsilon(x, y) = h_1(y_1) \cdots h_m(y_m)/g_p(\varepsilon).\end{gathered}$$

Lemme 3.1. ***Condition suffisante de stabilité.*** *L'algèbre $\mathcal{A}_g$ est stable par $F \in \mathcal{Y}$ dès qu'il existe un m-uple h adapté à F.*

Preuve. On suppose qu'il existe h adapté à F. Par définition de l'adaptabilité, h est aussi adapté à la famille $\partial^\alpha F = (\partial^\alpha F_\varepsilon)_{\varepsilon\in E}$ pour chaque multi-indice α. Soit alors un m-uple $\varphi = (\varphi_1, \cdots, \varphi_m) \in \mathcal{X}_g^m$ et x un point presque standard dans Ω.
1. Montrons que la composée $G = F \cdot \varphi$ appartient à $\mathcal{X}_g$. Considérons un multi-indice standard $\alpha \in \mathbb{N}^d$. La dérivée $\partial^\alpha G_\varepsilon(x)$ s'écrit comme une somme contenant un nombre standard de termes de la forme

$$\partial^\beta F_\varepsilon(x, \varphi_\varepsilon(x))\, \partial^{\gamma_1}\varphi_{1,\varepsilon}(x) \cdots \partial^{\gamma_m}\varphi_{m,\varepsilon}(x).$$

Comme chaque φ_i est g-modéré, il existe un même entier standard n tel que, pour tout $1 \le i \le m$ et tout $|\gamma| \le |\alpha|$, on a

$$\forall\varepsilon \gtrapprox 0, \quad \partial^\gamma\varphi_{i,\varepsilon}(x) = \mathrm{Ł}/g_n(\varepsilon).$$

En particulier, pour $y_i = \varphi_{i,\varepsilon}(x)$, on a $y_i = \mathrm{Ł}/g_n(\varepsilon)$. Puisque h est adapté à F, il existe un entier p tel que, pour tout $|\delta| \le |\alpha|$

$$\forall\varepsilon \gtrapprox 0, \quad \partial^\delta F(x, y) = \mathrm{Ł}h_1(y_1) \cdots h_m(y_m)/g_p(\varepsilon).$$

Chaque h_i respectant l'échelle g, il existe un même entier standard q tel que, pour tout $1 \leq i \leq m$, on a $h_i(\mathrm{L}/g_n(\varepsilon)) = \mathrm{L}/g_q(\varepsilon)$ et donc

$$\forall \varepsilon \gtrapprox 0, \quad \partial^\gamma F(x,y) = \mathrm{L}h_1(y_1)\cdots h_m(y_m)/g_p(\varepsilon) = \mathrm{L}/\left(g_q(\varepsilon)^m g_p(\varepsilon)\right).$$

Par filtration, on obtient, pour un entier standard N convenable

$$\forall \varepsilon \gtrapprox 0 \quad \partial^\alpha G_\varepsilon(x) = \mathrm{L}/\left(g_q(\varepsilon)^m g_p(\varepsilon) g_n(\varepsilon)^m\right) = \mathrm{L}/g_N(\varepsilon).$$

La composée $G = F \cdot \varphi$ appartient donc à $\mathcal{X}_g$.

2. Montrons que la classe de $G = F \cdot \varphi$ ne dépend que de la classe de φ. Soit $\nu = (\nu_1, \cdots, \nu_m) \in \mathcal{N}_g^m$ un m-uple standard. Vérifions que

$$F \cdot (\varphi + \eta) \equiv F \cdot \varphi \bmod g.$$

Il suffit de le montrer lorsque tous les ν_i sont nuls sauf 1, par exemple ν_k. Posons $y_i = \varphi_{i,\varepsilon}(x)$ comme ci-dessus. Il s'agit d'estimer la différence

$$\Delta_\varepsilon = F_\varepsilon(x, y_1, \cdots, y_k + \nu_{k,\varepsilon}(x), \cdots, y_n) - F_\varepsilon(x, y_1, \cdots, y_k, \cdots, y_n).$$

Or, on a

$$\Delta_\varepsilon = \nu_{k,\varepsilon}(x) \int_0^1 \tfrac{\partial F_\varepsilon}{\partial y_k}(x, y_1, \cdots, y_k + t\nu_{k,\varepsilon}(x), \cdots, y_n)\,\mathrm{d}t.$$

Comme h est adapté à F, $\frac{\partial F_\varepsilon}{\partial y_k} \cdot (\varphi + t\nu)$ appartient à $\mathcal{X}_g$ pour tout $t \in [0,1]$ et donc $L = \int_0^1 \frac{\partial F_\varepsilon}{\partial y_k} \cdot (\varphi + t\nu)\,\mathrm{d}t$ appartient à $\mathcal{X}_g$. Comme $\nu_k \in \mathcal{N}_g$, le produit $\nu_k L$ appartient à $\mathcal{N}_g$. Ceci achève la démonstration. ■

3.2. Problème différentiel dans $\mathcal{A}_g$

Pour répondre au but fixé à ce type de construction, à savoir résoudre des problèmes différentiels qui ne possèdent pas de solution au sens des distributions, le premier pas consiste à définir la notion de solution d'un tel problème dans une algèbre $\mathcal{A}_g$. Nous nous inspirons du travail fait dans [5] et dans [8] et nous ne traiterons pas ici des problèmes de données initiales ou aux limites. On peut se reporter notamment à [8] ou [6] pour des problèmes à données *irrégulières*.

On considère un problème différentiel de la forme suivante

$$\textstyle\sum_{|\alpha|=l} c_\alpha(x)\partial^\alpha u(x) = F(x, \partial^{\alpha_1}u(x), \cdots, \partial^{\alpha_m}u(x)), \tag{3.1}$$

où :

- l est un entier strictement positif,
- les multi-indices α_i vérifient $\mid \alpha_i \mid < l$, pour $1 \leq i \leq m$,
- $F = (F_\varepsilon)_{\varepsilon \in E}$ est une famille standard de $\mathcal{Y}$,

- chaque $c_\alpha = (c_{\alpha,\varepsilon})_{\varepsilon\in E}$ est une famille standard de $\mathcal{X}_g$.

On fait de plus l'hypothèse que $\mathcal{A}_g$ est stable par F.

Théorème 3.2. *On suppose que pour tout $\varepsilon \in E =]0,1]$, le problème différentiel*

$$\textstyle\sum_{|\alpha|=l} c_{\alpha,\varepsilon}(x)\partial^\alpha\varphi_\varepsilon(x) = F_\varepsilon(x, \partial^{\alpha_1}\varphi_\varepsilon(x), \cdots, \partial^{\alpha_m}\varphi_\varepsilon(x))$$

admet une solution φ_ε telle que la famille $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon\in E}$ appartienne à $\mathcal{X}_g$. Alors, pour tout $\psi \in \mathcal{X}_g$ tel que $\varphi \equiv \psi \bmod g$, on a

$$\textstyle\sum_{|\alpha|=l} c_\alpha(x)\partial^\alpha\psi_\varepsilon(x) \equiv F_\varepsilon(x, \partial^{\alpha_1}\psi_\varepsilon(x), \cdots, \partial^{\alpha_m}\psi_\varepsilon(x)) \bmod g.$$

Ce théorème, dont la démonstration est directe à partir du lemme 3.1, justifie la définition suivante.

Définition 3.3. *Avec les notations du théorème 3.2, la classe u de φ dans $\mathcal{A}_g$ est appelée solution du problème 3.1.*

Remarque. Pour chaque problème la difficulté sera de vérifier que la famille φ appartient à $\mathcal{X}_g$, c'est-à-dire qu'elle est g-modérée. Un simple exemple permet de s'en convaincre : considérons l'équation différentielle ordinaire

$$\varepsilon y' = y, \quad y \in \mathbb{R},$$

où $\varepsilon > 0$ est un paramètre infinitésimal. Ce problème s'énonce dans l'algèbre $\mathcal{G}_S(\mathbb{R})$, la fonction $y \mapsto \varepsilon^{-1}y$ étant clairement à croissance modérée en $1/\varepsilon$. En revanche, les solutions, qui s'écrivent $y(t) = y_0 \exp(t/\varepsilon)$, sont à croissance exponentielle en $1/\varepsilon$ pour $t > 0$ et donc n'appartiennent pas à $\mathcal{G}_S(\mathbb{R})$.

Cependant, dans [8], les auteurs mettent en évidence les majorations qui permettent de résoudre un problème de Goursat à données irrégulières dans chacune des algèbres précitées et, de manière plus générale, dans toute algèbre asymptotique. Dans [6], les algèbres ci-dessus sont reprises dans un cadre plus général et sont utilisées pour résoudre une famille de problèmes de Dirichlet non linéaires à données irrégulières qui n'admettent pas de solution au sens des distributions. La nécessité d'utiliser des échelles asymptotiques est mise en évidence, pour adapter l'échelle aux données et à la croissance de l'opérateur. La croissance modérée de la famille φ est montrée par des techniques de majorations a priori, qui s'adaptent en fait pour une large classe de problèmes.

Remerciements. L'auteur exprime sa gratitude au referee pour les améliorations qu'il a suggérées pour cet article.

Références

[1] S. Albeverio, Z. Haba and F. Russo. *Trivial solutions for a nonlinear two space dimensional wave equation perturbed by space-time white noise.* Prépublication de l'Université de Provence, n^{0}93-17.

[2] H.A. Biagoni. *A nonlinear theory of generalized functions.* Lecture Notes in Math, 1421, Springer Verlag, Berlin, 1990.

[3] J.F. Colombeau. *Elementary introduction to New Generalized Functions.* North Holland, Amsterdam, 1985.

[4] A. Delcroix. *Fonctions généralisées et analyse non standard.* Monatsh. Math. Sous presse.

[5] A. Delcroix. *Une algèbre de fonctions généralisées stable par exponentielle.* Prépublication de l'Université Antilles-Guyane, avril 1995.

[6] A. Delcroix et D. Scarpalezos. *Topologies on asymptotic algebras of generalized functions and applications.* Prépublication de l'Université Antilles-Guyane, décembre 1996.

[7] Yu. V. Egorov. *A contribution to the theory of generalized functions.* Russian Math. Surveys 45:5 (1990), 1-49. Translated from: Uspekhi Mat. Nauk 45:5, 1990, 3-40.

[8] J.A. Marti, P.S. Nuiro, V. Valmorin. *On a nonlinear Goursat problem.* A paraître dans "Proceedings of the International Conference on Generalized Functions, Novi Sad, 1996".

[9] E. Nelson. *Internal Set Theory: a new approach to nonstandard analysis.* Bull. Amer. Math. Soc, 83(6), p.1165-1198, 1977.

[10] M. Oberguggenberger. *Nonlinear theories of generalized functions.* Proceedings of the International Conference on Applications of Nonstandard Analysis, Functional Analysis and Probability Theory. Blaubeuren, 1992.

[11] E.E. Rosinger. *Generalized solutions of nonlinear partial differential equations.* North Holland, Amsterdam, 1990.

[12] D. Scarpalezos. *Colombeau generalized functions: topological structures; microlocal properties. A simplified point of view.* Prépublication de l'Université de Paris 7, 1993.

Antoine DELCROIX
I.U.F.M. Antilles-Guyane
Morne Ferret, B.P. 399
97159 POINTE-A-PITRE CEDEX
GUADELOUPE (F.W.I.)

Université Antilles-Guyane
Département de Mathématiques-Informatique
Campus de Fouillole
97159 POINTE-A-PITRE CEDEX
GUADELOUPE (F.W.I.)

E-mail : antoine.delcroix@univ-ag.f