ANNALES MATHÉMATIQUES BLAISE PASCAL

BENJAMIN DELAY

Coupures propres dans $^*\mathrm{R}$

Annales mathématiques Blaise Pascal, tome 4, nº 1 (1997), p. 19-25

<http://www.numdam.org/item?id=AMBP_1997__4_1_19_0>

Ann. Math. Blaise Pascal, Vol. 4, N° 1, 1997, pp.19-25

Coupures propres dans $^*\mathrm{R}$

par Benjamin DELAY.

Cet article expose les méthodes de S.KAMO ([1] et [2]), M.FORTI et F.HONSELL ([3]) ainsi que H.J.KEISLER et J.H.SCHMERL ([6]) concernant la construction de modéles non-standards dans lesquels $^*\mathrm{R}$ est complet.

I) Introduction :

La question : $^*\mathrm{R}$ est un corps ordonné, donc naturellement muni d'une topologie induite par l'ordre (la Q-topologie). Cette topologie est-elle "complète" ? En quel sens du mot "complet" ?

Remarque : Si $\forall r \in {}^*\mathrm{R}\ \ r>0$ on pose $E_r = \{(x,y) \in {}^*\mathrm{R} \times {}^*\mathrm{R}\ /\ |x-y| < r\}$ alors la structure uniforme ayant comme base d'entourages les E_r où $r \in {}^*\mathrm{R}$, $r>0$ a pour topologie associée la Q-topologie. Plus généralement , si A est une partie de $^*\mathrm{R}_+ \setminus \{0\}$ telle que $\frac{1}{2}\mathrm{A} \subset \mathrm{A}$ alors l'ensemble des E_r avec $r \in \mathrm{A}$ est une base d'entourage d'une certaine structure uniforme $\mathcal{T}_\mathrm{A}$ (non séparée en général) sur $^*\mathrm{R}$. Les cas intéressants sont $\mathrm{A} = {}^*\mathrm{R}_+ \setminus \{0\}$ (Q-structure uniforme) ; $\mathrm{A} = {}^*\mathrm{R}_+ \setminus \mu(0)$ et $\mathrm{A} = {}^*\mathrm{R}_+ \setminus \mathrm{R}$. On peut alors étudier la topologie $\mathcal{T}_\mathrm{A}$: est-elle pseudo-métrisable ? , complète ? (voir [1])

II) Notions de complétion :

2.1 Définitions :

Soit K un corps ordonné (i.e. un corps commutatif totalement ordonné),

On appelle <u>coupure</u> (de Dedekind) de K toute partition (X,Y) de K en deux ensembles non vides tels que X<Y.

On appelle <u>coupure propre</u> de K toute coupure (X,Y) de K telle que :
$\forall \varepsilon \in \mathrm{K},\ \varepsilon > 0,\ \exists x \in \mathrm{X}\ \text{t.q.}\ x + \varepsilon \in \mathrm{Y}$.

On appelle <u>lacune</u> (ou <u>trou</u>) de K toute coupure (X,Y) de K telle que X n'ait pas de plus grand élément et Y n'ait pas de plus petit élément.

On dit que <u>K est Scott-complet</u> (ou Dedekind complet) lorsque K ne possède aucune lacune propre.

Remarque : Si $\tilde{\mathrm{K}}$ désigne l'ensemble des coupures propres (X,Y) de K telles que X soit sans plus grand élément, alors on peut munir $\tilde{\mathrm{K}}$ d'une structure de corps ordonné héritée de celle de K et $\tilde{\mathrm{K}}$ est Scott-complet. (voir [4])

2.2 Proposition:
Si (X,Y) est une coupure propre de K telle que X soit sans plus grand élément, alors :
$\mathrm{cof}(X) = \mathrm{coin}(K_+ \setminus \{0\}) = \mathrm{cof}(K)$
(où cof(A) désigne la cofinalité de A et coin(A) la coïnitialité de A)

preuve:
Si la séquence $(\varepsilon_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ est coïnitiale dans $K_+ \setminus \{0\}$, alors pour tout $\alpha<\lambda$, il existe $x_\alpha \in X$ tel que $x_\alpha + \varepsilon_\alpha \in Y$ (car (X,Y) est une coupure propre) et il est facile de vérifier que $(x_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ est cofinale dans X. On a donc $\mathrm{coin}(K_+ \setminus \{0\}) \geq \mathrm{cof}(X)$.
Réciproquement, si $(x_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ est cofinale dans X alors pour tout $\alpha<\lambda$, comme x_α n'est pas le plus grand élément de X, il existe $\varepsilon_\alpha \in K_+ \setminus \{0\}$ tel que $x_\alpha + \varepsilon_\alpha \in X$ et il est facile de vérifier que $(\varepsilon_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ est coïnitiale dans $K_+ \setminus \{0\}$ d'où $\mathrm{cof}(X) \geq \mathrm{coin}(K_+ \setminus \{0\})$.

2.3 Corollaire:
Si (X,Y) est une lacune propre de K alors $\mathrm{cof}(X) = \mathrm{coin}(Y) = \mathrm{cof}(K)$.

Remarque : Si $K={}^*R$ on a évidement $\mathrm{cof}({}^*R)=\mathrm{cof}({}^*N)$.

2.4 Equivalence de la notion de Scott-complétion dans le cas de *R :
On a équivalence entre les 5 propositions suivantes :
1) Le corps ordonné *R est Scott-complet.
2) *R muni de la Q-topologie est un espace uniforme complet.
(i.e. tout filtre de Cauchy est convergent)
3) Toute séquence "de Cauchy" $(u_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ de *R est convergente (λ cardinal quelconque).
4) Toute suite de Cauchy $(u_n)_{n\in {}^*N}$ de *R est convergente (qu'elle soit interne ou pas).
5) Pour toute partie $A \subset {}^*N$,
si $\forall n \in {}^*N$, $A \cap \{0..n\}$ est une partie interne de *N, alors A est une partie interne de *N.

preuve:
1)⇔2)⇔3) : Topologie classique.
3)⇒4) : Immédiat.
4)⇒2) : Vient du fait que l'ensemble des $E_{1/n}$ où $n \in {}^*N \setminus \{0\}$ est un système fondamental d'entourages pour la Q-topologie.
1)⇔5) : Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties A non bornées de *N telles que :
$\forall n \in {}^*N$, $A \cap \{0..n\}$ est une partie interne de *N.
On peut donc associer à tout A de $\mathcal{A}$ la partie X de *R définie par :
$$x \in X \iff \exists n \in {}^*N \text{ t.q. } x \leq \sum_{i \in A \cap \{0..n\}} 2^{-i} \text{ (somme interne).}$$
Il est alors facile de vérifier que :
$\phi(A)=(X, {}^*R \setminus X)$ est une coupure propre de *R,
ϕ est une bijection de $\mathcal{A}$ sur l'ensemble des coupures propres (X,Y) de *R rencontrant $^*]0,2]$ et telles que X soit sans plus grand élément,

$\phi(A)$ n'est pas une lacune si et seulement si A est interne (on a alors $\sup(X) = \min({}^*R \setminus X) = \sum_{i \in A} 2^{-i}$).

III) Construction de modèles non-standard non Scott-complet:

3.1 Méthode de M.FORTI et F.HONSEL (1985 voir [3]) :

3.1.1 Lemme :

Il existe un modèle non-standard tel que $\mathrm{cof}({}^*N)=\omega$ (dénombrable) et $|{}^*N| > \omega$.

preuve:

Soit $\mathcal{M}_0$ un modèle tel que $|N^{\mathcal{M}_0}| > \omega$(par exemple une ultrapuissance) et $\mathcal{U}_0$ un ultrafiltre de $\mathcal{M}_0$ non principal sur $N_0 = N^{\mathcal{M}_0}$.

$\mathcal{M}_1 = {\mathcal{M}_0}^{N_0} / \mathcal{U}_0$ est alors une extension élémentaire du modèle $\mathcal{M}_0$ et N_0 est un segment initial de $N_1 = N^{\mathcal{M}_1}$. En réitérant la construction on obtient un suite de modèles $\mathcal{M}_n$, $n \in N$ tels que $\mathcal{M}_{n+1}$ soit une extension élémentaire de $\mathcal{M}_n$ et N_n un segment initial de N_{n+1}.
Il suffit alors de prendre $\mathcal{M} = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{M}_n$.

3.1.2 Théorème :

Si $\mathrm{cof}({}^*N)=\omega$ et $|{}^*N| > \omega$ alors ${}^*R$ n'est pas Scott-complet.

preuve:

Soit $(n_i)_{i \in N}$ une suite croissante et cofinale de ${}^*N$ et $A=\{n_i\}_{i \in N} \subset {}^*N$.
Pour tout $n \in {}^*N$, $A \cap \{0..n\}$ est un ensemble fini donc interne, or A ne peut pas être interne, car sinon, par transfert, on aurait :

A non majoré $\Rightarrow$ A en bijection (interne) avec ${}^*N$

d'où $|{}^*N| = |A| = \omega$: contradiction.
donc ${}^*R$ n'est pas Scott-complet.(2.4).

3.2 Méthode de S.KAMO (1981 voir [2]) :

3.2.1 Lemme :

Si κ est un cardinal régulier infini tel que $\kappa^+ = 2^\kappa$, alors il existe un modèle non-standard κ^+ saturé dans lequel $|{}^*R| = \kappa^+$.

preuve:

Il suffit de prendre un ultrafiltre $\mathcal{U}$ dénombrablement incomplet et bon sur κ (voir[5]).
$R^\kappa / \mathcal{U}$ est alors κ^+ saturé d'où $|{}^*R| \geq \kappa^+$ mais on a aussi $|{}^*R| \leq |R^\kappa| = 2^\kappa = \kappa^+$.

3.2.2 Théorème :
Si dans un modèle non-standard λ saturé on a $|{}^*R| = \lambda$, alors ${}^*R$ n'est pas Scott-complet.

preuve:
Comme $|{}^*R| = \lambda$, on peut choisir une énumération $(r_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ des éléments de ${}^*R$.
${}^*R$ étant λ saturé, on a $\mathrm{coin}\left({}^*R_+ \setminus \{0\}\right) \geq \lambda$. Il existe donc une séquence $(\varepsilon_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ strictement décroissante de ${}^*R_+ \setminus \{0\}$ coïnitiale dans ${}^*R_+ \setminus \{0\}$.
On peut alors construire par induction transfinie sur $\alpha < \lambda$ et pour tout $A \subset \alpha$ $(=[0..\alpha[)$ des intervalles ouverts $I_{\alpha,A} \subset {}^*R$ tels que :

1) $I_{\alpha,A} \neq \varnothing$.
2) $\delta(I_{\alpha,A}) < \varepsilon_\alpha$ (diamètre).
3) $r_\alpha \notin I_{\alpha,A}$.
4) Si A et $B \subset \alpha$, $A \neq B$ alors $I_{\alpha,A} \cap I_{\alpha,B} = \varnothing$.
5) Si $\alpha > \beta$ et $A \subset \alpha$ alors $I_{\alpha,A} \subset I_{\beta,A\cap\beta}$.

Pour $\alpha = 0$ et $\alpha = \beta + 1$, c'est immédiat.
Pour α ordinal limite $(\alpha < \lambda)$ et $A \subset \alpha$ posons $J = \bigcap_{\beta<\alpha} I_{\beta,A\cap\beta}$.
Par λ saturation, l'intervalle J contient au moins deux points, et on peut alors choisir un intervalle $I_{\alpha,A} \subset J$ vérifiant *1),2)* et *3)*. Un tel $I_{\alpha,A}$ vérifie évidement *5)* par construction.
De plus les $I_{\alpha,A}$ vérifient *4)* car $\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \beta$ donc, si A et B $\subset \alpha$, $A \neq B$ alors il existe $\beta < \alpha$ tel que $A\cap\beta \neq B\cap\beta$ d'où $I_{\beta,A\cap\beta} \cap I_{\beta,B\cap\beta} = \varnothing$ et donc $I_{\alpha,A} \cap I_{\alpha,B} = \varnothing$ *5)*.
A tout $L \subset \lambda$ on associe alors $X_L = \{x \in {}^*R \,/\, \exists\alpha < \lambda \text{ t.q. } x < I_{\alpha,L\cap\alpha}\}$
et $Y_L = \{x \in {}^*R \,/\, \exists\alpha < \lambda \text{ t.q. } x > I_{\alpha,L\cap\alpha}\}$

On a alors :
d'aprés *3)* et *5)*, (X_L, Y_L) est une coupure de ${}^*R$,
d'aprés *2)*, la coupure (X_L, Y_L) est propre,
d'aprés *4)*, si $L \neq L'$ alors $X_L \neq X_{L'}$.

On a donc trouvé 2^λ coupures propres différentes dans ${}^*R$, or il n'y a que $|{}^*R| = \lambda$ coupures propres de ${}^*R$ qui ne sont pas des lacunes.

Remarque : Plus généralement, on vient de démontrer que dans tout groupe totalement ordoné G dense (si $a < b \in G$ alors il existe $c \in G$ tel que $a < c < b$) et saturé (si $(I_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ est une famille décroissante d'intervales ouverts de G avec $\lambda < |G|$ alors $\bigcap_{\alpha<\lambda} I_\alpha \neq \varnothing$), il existe exactement $2^{|G|}$ lacunes.

3.3 Méthode de H.KEISLER et J.H.SCHMERL (1990 voir [6]) :

3.3.1 Théorème :
Si dans un modèles non-standard λ saturé on a $\mathrm{cof}({}^*R) = \lambda$, alors ${}^*R$ n'est pas Scott-complet.

preuve:

Soit $(n_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ une séquence strictement croissante de $^*N$, cofinale dans $^*N$, telle que n_0 soit illimité et $\pi : {}^*N \setminus \{0\} \to {}^*N$ l'application interne définie par $\pi(2^p \times (2k+1)) = p$.

Construisons alors par induction une séquence $(A_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ de parties internes de $^*N \setminus \{0\}$ telles que, si on pose $p_\alpha = \min(\pi(A_\alpha)) = \min\limits_{m\in A_\alpha}(\pi(m))$, on ait :

1) A_α est une partie interne de $\{0..2^{n_\alpha}\}$ et p_α est illimité.

2) Si $\alpha > \beta$ alors $A_\alpha \cap \{0..2^{n_\beta}\} = A_\beta$ et $p_\alpha < p_\beta$.

Si $\alpha = 0$: On pose $A_0 = \{2^{n_0}\}$ d'où $\pi(A_0) = \{n_0\}$ et $p_0 = n_0$.

Si $\alpha = \beta + 1$: On a $p_\beta \leq p_0 = n_0 \leq n_\beta$ d'où $a = 2^{n_\beta} + 2^{p_\beta - 1}$ vérifie $2^{n_\beta} < a < 2^{n_\beta + 1} \leq 2^{n_\alpha}$ et $\pi(a) = p_\beta - 1$ donc $A_\alpha = A_\beta \cup \{a\}$ vérifie alors *1)* et *2)* (avec $p_\alpha = p_\beta - 1$).

Si $\alpha < \lambda$ est un ordinal limite : L'ensemble $\{p_\beta\}_{\beta<\alpha}$ ne peut pas être coïnitial dans $^*N \setminus N$ car $\mathrm{coin}({}^*N \setminus N) \geq \lambda$ par λ saturation, il existe donc $p \in {}^*N$ illimité tel que $\forall \beta < \alpha \quad p_\beta > p$.

Pour tout $\beta < \alpha$, soit $P_\beta = \{A \text{ interne } \subset \{0..2^{n_\alpha}\} \ / \ A \cap \{0..2^{n_\beta}\} = A_\beta \text{ et } \min(\pi(A)) > p\}$.

$\{P_\beta\}_{\beta<\alpha}$ est une famille d'ensembles internes finiement concourante d'où, par λ saturation, il existe un ensemble $A_\alpha \in \bigcap\limits_{\beta<\alpha} P_\beta$. Il est clair que A_α vérifie *1)* et *2)*.

Posons alors $A = \bigcup\limits_{\alpha<\lambda} A_\alpha$. Pour tout $n \in {}^*N$ il existe $\alpha < \lambda$ tel que $n \leq 2^{n_\alpha}$ et donc $A \cap \{0..n\} = A_\alpha \cap \{0..n\}$ est une partie interne de $^*N$.

Or $\forall p \in \pi(A) = \bigcup\limits_{\alpha<\lambda} \pi(A_\alpha)$, $\exists \alpha < \lambda$ t.q. $p \in \pi(A_\alpha)$ donc $p \geq p_\alpha > p_{\alpha+1} \in \pi(A)$ donc $\pi(A)$ n'a pas de plus petit élément : $\pi(A)$ est externe donc A est externe.

Conclusion : $^*R$ n'est pas Scott-complet.(2.4).

IV) Construction de modèles non-standard Scott-complet:
(Méthode de H.KEISLER et J.H.SCHMERL (1990 voir [6]) **)**

4.1 Définition :

Soit $\kappa < \lambda$ deux cardinaux infinis réguliers ($\mathrm{cof}(\lambda)=\lambda$ et $\mathrm{cof}(\kappa)=\kappa$).

Une λ-chaîne $(\mathcal{M}_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ de modèles de l'arithmétique est dite κ-conservatrice lorsque :

1) Si $\alpha > \beta$ alors $\mathcal{M}_\alpha$ est une extension élémentaire finale de $\mathcal{M}_\beta$ (i.e. N_β est un segment initial propre de N_α).

2) Si $\mathrm{cof}(\alpha) \geq \kappa$ alors $\mathcal{M}_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} \mathcal{M}_\beta$ et $\mathcal{M}_{\alpha+1}$ est une extension conservatrice de $\mathcal{M}_\alpha$ (i.e. si A est une partie interne de $N_{\alpha+1}$ alors $A \cap N_\alpha$ est une partie interne de N_α).

4.2 Lemme :
Si λ est un cardinal non dénombrable régulier alors il existe une λ-chaîne ω-concervatrice.

preuve:
Il suffit de partir d'un modèle $\mathcal{M}_0$ quelconque puis par induction de définir $\mathcal{M}_\alpha$ par :

Si $\alpha = \beta + 1$, $\mathcal{M}_\alpha = {\mathcal{M}_\beta}^{N_\beta} / \mathcal{U}_\beta$ où $\mathcal{U}_\beta$ est un ultrafiltre (interne) de $\mathcal{M}_\beta$ sur N_β. D'où $\mathcal{M}_\alpha$ est une extension élémentaire finale et conservatrice de $\mathcal{M}_\beta$.

Si α ordinal limite, $\mathcal{M}_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{M}_\beta$.

4.3 Théorème :
Soit $(\mathcal{M}_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ une λ-chaîne κ-concervatrice de modèles et $\mathcal{M} = \bigcup_{\alpha<\lambda} \mathcal{M}_\alpha$.
Alors dans le modèle non-standard $\mathcal{M}$, ${}^*R$ est Scott-complet.

preuve:
Pour tout $r, s \in {}^*R$ et $\alpha < \lambda$, on notera $r \approx_\alpha s$ lorsque $\forall n \in N_\alpha$, $|r - s| < \frac{1}{n}$.
On pose $K = \{\alpha < \lambda \ / \ \mathrm{cof}(\alpha) \geq \kappa\}$. K est cofinal dans λ.
Soit (X,Y) une coupure propre de ${}^*R$ que l'on peut supposer limitée (i.e. $X \cap R \neq \emptyset$ et $Y \cap R \neq \emptyset$).
Soit $\alpha \in K$ et $q \in N_{\alpha+1} \setminus N_\alpha$. Comme (X,Y) est propre, il existe un unique $p \in {}^*N$ t.q. $\frac{p}{q} \in X$ et $\frac{p+1}{q} \in Y$ or $\frac{p}{q}$ est limité donc $p \in N_{\alpha+1}$ et $\frac{p}{q} \in R_{\alpha+1}$. Comme $\mathcal{M}_{\alpha+1}$ est une extension conservatrice de $\mathcal{M}_\alpha$, il existe $r_\alpha \in R_\alpha$ tel que $r_\alpha \approx_\alpha \frac{p}{q}$ ("ombre" de niveau α).
Il est clair que $r_\alpha = \sup_{R_\alpha}(X \cap R_\alpha)$ ne dépend pas de q et que :

(1) Si $\alpha, \beta \in K$, $\alpha < \beta$ alors $r_\alpha \approx_\alpha r_\beta$.

Raisonnons maintenant par l'absurde et supposons que (X,Y) est une lacune.
Pour tout $\alpha \in K$, r_α n'est pas la borne supérieure de X dans ${}^*R$ donc il existe $x \in {}^*R$ tel que $x \in X$ et $x > r_\alpha$ ou bien $x \in Y$ et $x < r_\alpha$.
Soit alors $f(\alpha) \in K$ tel que $x \in R_{f(\alpha)}$. On a alors :

(2) Si $\alpha \in K$ alors $f(\alpha) \in K$, $f(\alpha) > \alpha$ et $r_{f(\alpha)} \neq r_\alpha$.

Construisons alors par induction une fonction g de κ dans K en posant $g(0) = \kappa$, $g(\nu + 1) = f \circ g(\nu)$, et, si ν est un ordinal limite, en choisissant $g(\nu) \in K$ tel que $g(\nu) \geq \sup\{g(\mu) \ / \ \mu < \nu\}$ (c'est possible car K est cofinal dans λ et $\mathrm{cof}(\lambda) = \lambda > \kappa > \nu$).
Posons $\delta = \sup\{g(\nu) \ / \ \nu < \kappa\}$. On a $\delta < \lambda$ et $\mathrm{cof}(\delta) = \kappa$ (car $\mathrm{cof}(\lambda) = \lambda > \kappa$ et g strictement croissante) donc $\delta \in K$.
Comme $r_\delta \in R_\delta = \bigcup_{\nu<\kappa} R_{g(\nu)}$, il existe $\nu < \kappa$ tel que $r_\delta \in R_{g(\nu)}$ mais grâce à *(1)*, $g(\nu) < \delta \Rightarrow r_{g(\nu)} \approx_{g(\nu)} r_\delta$ et donc $r_{g(\nu)} = r_\delta$.

On a aussi $g(\nu+1) < \delta \Rightarrow r_{g(\nu+1)} \approx_{g(\nu+1)} r_\delta = r_{g(\nu)}$ d'où $r_{g(\nu+1)} = r_{g(\nu)}$, mais comme $g(\nu + 1) = f \circ g(\nu)$ ceci est en contradiction avec *(2)*.

4.4 Remarques :

On peut facilement voir que dans le modèle non-standard $\mathcal{M}$ du théorème 4.3, on a $\mathrm{cof}(^*N) = \mathrm{cof}(^*R) = \lambda$. En fait, en construisant des chaînes κ-concervatrices plus complexe que celle du lemme 4.2, on peut exhiber des modèles dans lequel $^*R$ est Scott-complet et possédant un certain nombre de propriétés supplémentaires (voir [6]) :

Si $\kappa < \lambda$ sont deux cardinaux infinis réguliers alors il existe une λ-chaîne κ-conservatrice $(\mathcal{M}_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ telle que $\forall\alpha < \lambda$, $\mathcal{M}_\alpha$ soit κ-saturé. Le modèle non-standard $\mathcal{M} = \bigcup_{\alpha<\lambda} \mathcal{M}_\alpha$ correspondant est alors κ-saturé, et dans $\mathcal{M}$, $^*R$ est Scott-complet.

Si de plus $\forall\beta < \lambda$, $\forall\alpha < \kappa$, $\beta^\alpha < \lambda$ alors on peut construire une λ-chaîne κ-conservatrice $(\mathcal{M}_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ telle que $\forall\alpha < \lambda$, $\mathcal{M}_\alpha$ soit κ-saturé et $|N_\alpha| < \lambda$. On a alors $\mathcal{M}$ κ-saturé, $^*R$ Scott-complet, $|^*N| = \mathrm{cof}(^*N) = \lambda$ et $\forall n \in {}^*N$, $|\{0..n\}| < \lambda$ (on dit que $^*N$ est λ-archimédien).

REFERENCES :

[1] : Shizuo KAMO : Nonstandard natural number systems and nonstandard models, J. of Symb. logic ; Vol. 46, N°2 (Juin 1981), p365-376.

[2] : Shizuo KAMO : Nonstandard real number systems with regular gaps, TSUKUBA J. Math ; Vol. 5, N°1 (1981), p21-24.

[3] : Marco FORTI et Furio HONSELL : Sull'ordinamento dei numeri reali non-standard, RENDICONTI delle sedute della accademia nazionale dei lincei, Vol LXXIX, Fasc. 1-4, p1-8

[4] : Nicolas BOURBAKI : Algebre, Chapitre VI, §2, Ex. 34-40.

[5] : C.C. CHANG et H. Jerome KEISLER : Model Theory, Third edition, North-Holland Elsevier 1990 (Chapitre 6).

[6] : H. Jerome KEISLER et James H. SCHMERL : Making the hyperreal line both saturated and complete, J. of Symb. logic ; Vol 56, N°3 (Sept. 1991), p1016-1025.

Benjamin DELAY
Université Blaise Pascal
Laboratoire de Mathématiques Pures
63177 AUBIERE CEDEX