

BENJAMIN DELAY

Coups propres dans \mathbb{R}

Annales mathématiques Blaise Pascal, tome 4, n° 1 (1997), p. 19-25

http://www.numdam.org/item?id=AMBP_1997__4_1_19_0

© Annales mathématiques Blaise Pascal, 1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales mathématiques Blaise Pascal » (<http://math.univ-bpclermont.fr/ambp/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Coupsures propres dans ${}^*\mathbb{R}$

par Benjamin DELAY.

Cet article expose les méthodes de S.KAMO ([1] et [2]), M.FORTI et F.HONSELL ([3]) ainsi que H.J.KEISLER et J.H.SCHMERL ([6]) concernant la construction de modèles non-standard dans lesquels ${}^*\mathbb{R}$ est complet.

I) Introduction :

La question : ${}^*\mathbb{R}$ est un corps ordonné, donc naturellement muni d'une topologie induite par l'ordre (la Q-topologie). Cette topologie est-elle "complète" ? En quel sens du mot "complet" ?

Remarque : Si $\forall r \in {}^*\mathbb{R} \ r > 0$ on pose $E_r = \{(x,y) \in {}^*\mathbb{R} \times {}^*\mathbb{R} \mid |x-y| < r\}$ alors la structure uniforme ayant comme base d'entourages les E_r , où $r \in {}^*\mathbb{R}$, $r > 0$ a pour topologie associée la Q-topologie. Plus généralement, si A est une partie de ${}^*\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ telle que $\frac{1}{2}A \subset A$ alors l'ensemble des E_r , avec $r \in A$ est une base d'entourage d'une certaine structure uniforme \mathcal{J}_A (non séparée en général) sur ${}^*\mathbb{R}$. Les cas intéressants sont $A = {}^*\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ (Q-structure uniforme) ; $A = {}^*\mathbb{R}_+ \setminus \mu(0)$ et $A = {}^*\mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{R}$. On peut alors étudier la topologie \mathcal{J}_A : est-elle pseudo-métrisable ? , complète ? (voir [1])

II) Notions de complétion :

2.1 Définitions :

Soit K un corps ordonné (i.e. un corps commutatif totalement ordonné),

On appelle coupure (de Dedekind) de K toute partition (X,Y) de K en deux ensembles non vides tels que $X < Y$.

On appelle coupure propre de K toute coupure (X,Y) de K telle que :

$$\forall \varepsilon \in K, \varepsilon > 0, \exists x \in X \text{ t.q. } x + \varepsilon \in Y.$$

On appelle lacune (ou trou) de K toute coupure (X,Y) de K telle que X n'ait pas de plus grand élément et Y n'ait pas de plus petit élément.

On dit que K est Scott-complet (ou Dedekind complet) lorsque K ne possède aucune lacune propre.

Remarque : Si \tilde{K} désigne l'ensemble des coupures propres (X,Y) de K telles que X soit sans plus grand élément, alors on peut munir \tilde{K} d'une structure de corps ordonné héritée de celle de K et \tilde{K} est Scott-complet. (voir [4])

2.2 Proposition:

Si (X, Y) est une coupure propre de K telle que X soit sans plus grand élément, alors :

$$\text{cof}(X) = \text{coin}(K_+ \setminus \{0\}) = \text{cof}(K)$$

(où $\text{cof}(A)$ désigne la cofinalité de A et $\text{coin}(A)$ la coinitialité de A)

preuve:

Si la séquence $(\varepsilon_\alpha)_{\alpha < \lambda}$ est coïnitiale dans $K_+ \setminus \{0\}$, alors pour tout $\alpha < \lambda$, il existe $x_\alpha \in X$ tel que $x_\alpha + \varepsilon_\alpha \in Y$ (car (X, Y) est une coupure propre) et il est facile de vérifier que $(x_\alpha)_{\alpha < \lambda}$ est cofinale dans X . On a donc $\text{coin}(K_+ \setminus \{0\}) \geq \text{cof}(X)$.

Réciproquement, si $(x_\alpha)_{\alpha < \lambda}$ est cofinale dans X alors pour tout $\alpha < \lambda$, comme x_α n'est pas le plus grand élément de X , il existe $\varepsilon_\alpha \in K_+ \setminus \{0\}$ tel que $x_\alpha + \varepsilon_\alpha \in X$ et il est facile de vérifier que $(\varepsilon_\alpha)_{\alpha < \lambda}$ est coïnitiale dans $K_+ \setminus \{0\}$ d'où $\text{cof}(X) \geq \text{coin}(K_+ \setminus \{0\})$.

2.3 Corollaire:

Si (X, Y) est une lacune propre de K alors $\text{cof}(X) = \text{coin}(Y) = \text{cof}(K)$.

Remarque : Si $K = {}^*R$ on a évidemment $\text{cof}({}^*R) = \text{cof}({}^*N)$.

2.4 Equivalence de la notion de Scott-complétion dans le cas de *R :

On a équivalence entre les 5 propositions suivantes :

- 1) Le corps ordonné *R est Scott-complet.
- 2) *R muni de la Q -topologie est un espace uniforme complet.
(i.e. tout filtre de Cauchy est convergent)
- 3) Toute séquence "de Cauchy" $(u_\alpha)_{\alpha < \lambda}$ de *R est convergente (λ cardinal quelconque).
- 4) Toute suite de Cauchy $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de *R est convergente (qu'elle soit interne ou pas).
- 5) Pour toute partie $A \subset {}^*N$,
si $\forall n \in \mathbb{N}, A \cap \{0..n\}$ est une partie interne de *N , alors A est une partie interne de *N .

preuve:

1) \Leftrightarrow 2) \Leftrightarrow 3) : Topologie classique.

3) \Rightarrow 4) : Immédiat.

4) \Rightarrow 2) : Vient du fait que l'ensemble des $E_{1/n}$ où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ est un système fondamental d'entourages pour la Q -topologie.

1) \Leftrightarrow 5) : Soit \mathcal{A} l'ensemble des parties A non bornées de *N telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A \cap \{0..n\} \text{ est une partie interne de } {}^*N.$$

On peut donc associer à tout A de \mathcal{A} la partie X de *R définie par :

$$x \in X \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \text{ t.q. } x \leq \sum_{i \in A \cap \{0..n\}} 2^{-i} \text{ (somme interne).}$$

Il est alors facile de vérifier que :

$\phi(A) = (X, {}^*R \setminus X)$ est une coupure propre de *R ,

ϕ est une bijection de \mathcal{A} sur l'ensemble des coupures propres (X, Y) de *R rencontrant ${}^*[0, 2]$ et telles que X soit sans plus grand élément,

$\phi(A)$ n'est pas une lacune si et seulement si A est interne (on a alors $\sup(X) = \min({}^*R \setminus X) = \sum_{i \in A} 2^{-i}$).

III) Construction de modèles non-standard non Scott-complet:

3.1 Méthode de M.FORTI et F.HONSEL (1985 voir [3]) :

3.1.1 Lemme :

Il existe un modèle non-standard tel que $\text{cof}({}^*N) = \omega$ (dénombrable) et $|{}^*N| > \omega$.

preuve:

Soit m_0 un modèle tel que $|N^{m_0}| > \omega$ (par exemple une ultrapuissance) et \mathcal{U}_0 un ultrafiltre de m_0 non principal sur $N_0 = N^{m_0}$.

$m_1 = m_0 / \mathcal{U}_0$ est alors une extension élémentaire du modèle m_0 et N_0 est un segment initial de $N_1 = N^{m_1}$. En réitérant la construction on obtient une suite de modèles m_n , $n \in \mathbb{N}$ tels que m_{n+1} soit une extension élémentaire de m_n et N_n un segment initial de N_{n+1} .

Il suffit alors de prendre $m = \bigcup_{n \geq 0} m_n$.

3.1.2 Théorème :

Si $\text{cof}({}^*N) = \omega$ et $|{}^*N| > \omega$ alors *R n'est pas Scott-complet.

preuve:

Soit $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite croissante et cofinale de *N et $A = \{n_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset {}^*N$.

Pour tout $n \in {}^*N$, $A \cap \{0..n\}$ est un ensemble fini donc interne, or A ne peut pas être interne, car sinon, par transfert, on aurait :

A non majoré $\Rightarrow A$ en bijection (interne) avec *N

d'où $|{}^*N| = |A| = \omega$: contradiction.

donc *R n'est pas Scott-complet.(2.4).

3.2 Méthode de S.KAMO (1981 voir [2]) :

3.2.1 Lemme :

Si κ est un cardinal régulier infini tel que $\kappa^+ = 2^\kappa$, alors il existe un modèle non-standard κ^+ saturé dans lequel $|{}^*R| = \kappa^+$.

preuve:

Il suffit de prendre un ultrafiltre \mathcal{U} dénombrablement incomplet et bon sur κ (voir[5]).

R^κ / \mathcal{U} est alors κ^+ saturé d'où $|{}^*R| \geq \kappa^+$ mais on a aussi $|{}^*R| \leq |R^\kappa| = 2^\kappa = \kappa^+$.

3.2.2 Théorème :

Si dans un modèle non-standard λ saturé on a $|\ast R| = \lambda$, alors $\ast R$ n'est pas Scott-complet.

preuve:

Comme $|\ast R| = \lambda$, on peut choisir une énumération $(r_\alpha)_{\alpha < \lambda}$ des éléments de $\ast R$.

$\ast R$ étant λ saturé, on a $\text{coïn}(\ast R_+ \setminus \{0\}) \geq \lambda$. Il existe donc une séquence $(\varepsilon_\alpha)_{\alpha < \lambda}$ strictement décroissante de $\ast R_+ \setminus \{0\}$ coïnitiale dans $\ast R_+ \setminus \{0\}$.

On peut alors construire par induction transfinitie sur $\alpha < \lambda$ et pour tout $A \subset \alpha$ ($= [0.. \alpha[$) des intervalles ouverts $I_{\alpha, A} \subset \ast R$ tels que :

- 1) $I_{\alpha, A} \neq \emptyset$.
- 2) $\delta(I_{\alpha, A}) < \varepsilon_\alpha$ (diamètre).
- 3) $r_\alpha \notin I_{\alpha, A}$.
- 4) Si A et $B \subset \alpha$, $A \neq B$ alors $I_{\alpha, A} \cap I_{\alpha, B} = \emptyset$.
- 5) Si $\alpha > \beta$ et $A \subset \alpha$ alors $I_{\alpha, A} \subset I_{\beta, A \cap \beta}$.

Pour $\alpha = 0$ et $\alpha = \beta + 1$, c'est immédiat.

Pour α ordinal limite ($\alpha < \lambda$) et $A \subset \alpha$ posons $J = \bigcap_{\beta < \alpha} I_{\beta, A \cap \beta}$.

Par λ saturation, l'intervalle J contient au moins deux points, et on peut alors choisir un intervalle $I_{\alpha, A} \subset J$ vérifiant 1), 2) et 3). Un tel $I_{\alpha, A}$ vérifie évidemment 5) par construction.

De plus les $I_{\alpha, A}$ vérifient 4) car $\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} \beta$ donc, si A et $B \subset \alpha$, $A \neq B$ alors il existe

$\beta < \alpha$ tel que $A \cap \beta \neq B \cap \beta$ d'où $I_{\beta, A \cap \beta} \cap I_{\beta, B \cap \beta} = \emptyset$ et donc $I_{\alpha, A} \cap I_{\alpha, B} = \emptyset$ 5).

A tout $L \subset \lambda$ on associe alors $X_L = \{x \in \ast R / \exists \alpha < \lambda \text{ t.q. } x < I_{\alpha, L \cap \alpha}\}$
 et $Y_L = \{x \in \ast R / \exists \alpha < \lambda \text{ t.q. } x > I_{\alpha, L \cap \alpha}\}$

On a alors :

d'après 3) et 5), (X_L, Y_L) est une coupure de $\ast R$,

d'après 2), la coupure (X_L, Y_L) est propre,

d'après 4), si $L \neq L'$ alors $X_L \neq X_{L'}$.

On a donc trouvé 2^λ coupures propres différentes dans $\ast R$, or il n'y a que $|\ast R| = \lambda$ coupures propres de $\ast R$ qui ne sont pas des lacunes.

Remarque : Plus généralement, on vient de démontrer que dans tout groupe totalement ordonné G dense (si $a < b \in G$ alors il existe $c \in G$ tel que $a < c < b$) et saturé (si $(I_\alpha)_{\alpha < \lambda}$ est une famille décroissante d'intervalles ouverts de G avec $\lambda < |G|$ alors $\bigcap_{\alpha < \lambda} I_\alpha \neq \emptyset$), il existe exactement $2^{|\text{cof}|}$ lacunes.

3.3 Méthode de H.KEISLER et J.H.SCHMERL (1990 voir [6]) :

3.3.1 Théorème :

Si dans un modèles non-standard λ saturé on a $\text{cof}(\ast R) = \lambda$, alors $\ast R$ n'est pas Scott-complet.

preuve:

Soit $(n_\alpha)_{\alpha < \lambda}$ une séquence strictement croissante de *N , cofinale dans *N , telle que n_0 soit illimité et $\pi : {}^*N \setminus \{0\} \rightarrow {}^*N$ l'application interne définie par $\pi(2^p \times (2k+1)) = p$.

Construisons alors par induction une séquence $(A_\alpha)_{\alpha < \lambda}$ de parties internes de ${}^*N \setminus \{0\}$ telles que, si on pose $p_\alpha = \min(\pi(A_\alpha)) = \min_{m \in A_\alpha}(\pi(m))$, on ait :

1) A_α est une partie interne de $\{0..2^{n_\alpha}\}$ et p_α est illimité.

2) Si $\alpha > \beta$ alors $A_\alpha \cap \{0..2^{n_\beta}\} = A_\beta$ et $p_\alpha < p_\beta$.

Si $\alpha = 0$: On pose $A_0 = \{2^{n_0}\}$ d'où $\pi(A_0) = \{n_0\}$ et $p_0 = n_0$.

Si $\alpha = \beta + 1$: On a $p_\beta \leq p_0 = n_0 \leq n_\beta$ d'où $a = 2^{n_\beta} + 2^{p_\beta - 1}$ vérifie $2^{n_\beta} < a < 2^{n_\beta + 1} \leq 2^{n_\alpha}$ et $\pi(a) = p_\beta - 1$ donc $A_\alpha = A_\beta \cup \{a\}$ vérifie alors 1) et 2) (avec $p_\alpha = p_\beta - 1$).

Si $\alpha < \lambda$ est un ordinal limite : L'ensemble $\{p_\beta\}_{\beta < \alpha}$ ne peut pas être coinitial dans ${}^*N \setminus N$ car $\text{coin}({}^*N \setminus N) \geq \lambda$ par λ saturation, il existe donc $p \in {}^*N$ illimité tel que $\forall \beta < \alpha$ $p_\beta > p$.

Pour tout $\beta < \alpha$, soit $P_\beta = \{A \text{ interne} \subset \{0..2^{n_\alpha}\} / A \cap \{0..2^{n_\beta}\} = A_\beta \text{ et } \min(\pi(A)) > p\}$.

$\{P_\beta\}_{\beta < \alpha}$ est une famille d'ensembles internes finiment concourante d'où, par λ saturation, il existe un ensemble $A_\alpha \in \bigcap_{\beta < \alpha} P_\beta$. Il est clair que A_α vérifie 1) et 2).

Posons alors $A = \bigcup_{\alpha < \lambda} A_\alpha$. Pour tout $n \in {}^*N$ il existe $\alpha < \lambda$ tel que $n \leq 2^{n_\alpha}$ et donc $A \cap \{0..n\} = A_\alpha \cap \{0..n\}$ est une partie interne de *N .

Or $\forall p \in \pi(A) = \bigcup_{\alpha < \lambda} \pi(A_\alpha)$, $\exists \alpha < \lambda$ t.q. $p \in \pi(A_\alpha)$ donc $p \geq p_\alpha > p_{\alpha+1} \in \pi(A)$ donc $\pi(A)$ n'a pas de plus petit élément : $\pi(A)$ est externe donc A est externe.

Conclusion : *R n'est pas Scott-complet.(2.4).

IV) Construction de modèles non-standard Scott-complet: (Méthode de H.KEISLER et J.H.SCHMERL (1990 voir [6]))

4.1 Définition :

Soit $\kappa < \lambda$ deux cardinaux infinis réguliers ($\text{cof}(\lambda) = \lambda$ et $\text{cof}(\kappa) = \kappa$).

Une λ -chaîne $(\mathcal{M}_\alpha)_{\alpha < \lambda}$ de modèles de l'arithmétique est dite κ -conservatrice lorsque :

1) Si $\alpha > \beta$ alors \mathcal{M}_α est une extension élémentaire finale de \mathcal{M}_β (i.e. N_β est un segment initial propre de N_α).

2) Si $\text{cof}(\alpha) \geq \kappa$ alors $\mathcal{M}_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} \mathcal{M}_\beta$ et $\mathcal{M}_{\alpha+1}$ est une extension conservatrice de \mathcal{M}_α (i.e. si

A est une partie interne de $N_{\alpha+1}$ alors $A \cap N_\alpha$ est une partie interne de N_α).

4.2 Lemme :

Si λ est un cardinal non dénombrable régulier alors il existe une λ -chaîne ω -conservatrice.

preuve:

Il suffit de partir d'un modèle m_0 quelconque puis par induction de définir m_α par :

Si $\alpha = \beta + 1$, $m_\alpha = m_\beta^{N_\beta} / \mathcal{U}_\beta$ où \mathcal{U}_β est un ultrafiltre (interne) de m_β sur N_β . D'où m_α est une extension élémentaire finale et conservatrice de m_β .

Si α ordinal limite, $m_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} m_\beta$.

4.3 Théorème :

Soit $(m_\alpha)_{\alpha < \lambda}$ une λ -chaîne κ -conservatrice de modèles et $m = \bigcup_{\alpha < \lambda} m_\alpha$.

Alors dans le modèle non-standard $m, {}^*R$ est Scott-complet.

preuve:

Pour tout $r, s \in {}^*R$ et $\alpha < \lambda$, on notera $r \approx_\alpha s$ lorsque $\forall n \in N_\alpha, |r - s| < \frac{1}{n}$.

On pose $K = \{\alpha < \lambda / \text{cof}(\alpha) \geq \kappa\}$. K est cofinal dans λ .

Soit (X, Y) une coupure propre de *R que l'on peut supposer limitée (i.e. $X \cap R \neq \emptyset$ et $Y \cap R \neq \emptyset$).

Soit $\alpha \in K$ et $q \in N_{\alpha+1} \setminus N_\alpha$. Comme (X, Y) est propre, il existe un unique $p \in {}^*N$ t.q. $\frac{p}{q} \in X$ et $\frac{p+1}{q} \in Y$ or $\frac{p}{q}$ est limité donc $p \in N_{\alpha+1}$ et $\frac{p}{q} \in R_{\alpha+1}$. Comme $m_{\alpha+1}$ est une

extension conservatrice de m_α , il existe $r_\alpha \in R_\alpha$ tel que $r_\alpha \approx_\alpha \frac{p}{q}$ ("ombre" de niveau α).

Il est clair que $r_\alpha = \sup_{R_\alpha} (X \cap R_\alpha)$ ne dépend pas de q et que :

(1) Si $\alpha, \beta \in K, \alpha < \beta$ alors $r_\alpha \approx_\alpha r_\beta$.

Raisonnons maintenant par l'absurde et supposons que (X, Y) est une lacune.

Pour tout $\alpha \in K$, r_α n'est pas la borne supérieure de X dans *R donc il existe $x \in {}^*R$ tel que $x \in X$ et $x > r_\alpha$ ou bien $x \in Y$ et $x < r_\alpha$.

Soit alors $f(\alpha) \in K$ tel que $x \in R_{f(\alpha)}$. On a alors :

(2) Si $\alpha \in K$ alors $f(\alpha) \in K, f(\alpha) > \alpha$ et $r_{f(\alpha)} \neq r_\alpha$.

Construisons alors par induction une fonction g de κ dans K en posant $g(0) = \kappa$, $g(v+1) = f \circ g(v)$, et, si v est un ordinal limite, en choisissant $g(v) \in K$ tel que $g(v) \geq \sup \{g(\mu) / \mu < v\}$ (c'est possible car K est cofinal dans λ et $\text{cof}(\lambda) = \lambda > \kappa > v$). Posons $\delta = \sup \{g(v) / v < \kappa\}$. On a $\delta < \lambda$ et $\text{cof}(\delta) = \kappa$ (car $\text{cof}(\lambda) = \lambda > \kappa$ et g strictement croissante) donc $\delta \in K$.

Comme $r_\delta \in R_\delta = \bigcup_{v < \kappa} R_{g(v)}$, il existe $v < \kappa$ tel que $r_\delta \in R_{g(v)}$ mais grâce à (1),

$g(v) < \delta \Rightarrow r_{g(v)} \approx_{g(v)} r_\delta$ et donc $r_{g(v)} = r_\delta$.

On a aussi $g(v+1) < \delta \Rightarrow r_{g(v+1)} \approx_{g(v+1)} r_\delta = r_{g(v)}$ d'où $r_{g(v+1)} = r_{g(v)}$, mais comme $g(v+1) = f \circ g(v)$ ceci est en contradiction avec (2).

4.4 Remarques :

On peut facilement voir que dans le modèle non-standard \mathcal{m} du théorème 4.3, on a $\text{cof}({}^*N) = \text{cof}({}^*R) = \lambda$. En fait, en construisant des chaînes κ -conservatrices plus complexe que celle du lemme 4.2, on peut exhiber des modèles dans lequel *R est Scott-complet et possédant un certain nombre de propriétés supplémentaires (voir [6]) :

Si $\kappa < \lambda$ sont deux cardinaux infinis réguliers alors il existe une λ -chaîne κ -conservatrice $(\mathcal{m}_\alpha)_{\alpha < \lambda}$ telle que $\forall \alpha < \lambda$, \mathcal{m}_α soit κ -saturé. Le modèle non-standard $\mathcal{m} = \bigcup_{\alpha < \lambda} \mathcal{m}_\alpha$ correspondant est alors κ -saturé, et dans \mathcal{m} , *R est Scott-complet.

Si de plus $\forall \beta < \lambda$, $\forall \alpha < \kappa$, $\beta^\alpha < \lambda$ alors on peut construire une λ -chaîne κ -conservatrice $(\mathcal{m}_\alpha)_{\alpha < \lambda}$ telle que $\forall \alpha < \lambda$, \mathcal{m}_α soit κ -saturé et $|N_\alpha| < \lambda$. On a alors \mathcal{m} κ -saturé, *R Scott-complet, $|{}^*N| = \text{cof}({}^*N) = \lambda$ et $\forall n \in {}^*N$, $|\{0..n\}| < \lambda$ (on dit que *N est λ -archimédien).

REFERENCES :

- [1] : Shizuo KAMO : Nonstandard natural number systems and nonstandard models, J. of Symb. logic ; Vol. 46, N°2 (Juin 1981), p365-376.
- [2] : Shizuo KAMO : Nonstandard real number systems with regular gaps, TSUKUBA J. Math ; Vol. 5, N°1 (1981), p21-24.
- [3] : Marco FORTI et Furio HONSELL : Sull'ordinamento dei numeri reali non-standard, RENDICONTI delle sedute della accademia nazionale dei lincei, Vol LXXIX, Fasc. 1-4, p1-8
- [4] : Nicolas BOURBAKI : Algebre, Chapitre VI, §2, Ex. 34-40.
- [5] : C.C. CHANG et H. Jerome KEISLER : Model Theory, Third edition, North-Holland Elsevier 1990 (Chapitre 6).
- [6] : H. Jerome KEISLER et James H. SCHMERL : Making the hyperreal line both saturated and complete, J. of Symb. logic ; Vol 56, N°3 (Sept. 1991), p1016-1025.