ANNALES MATHÉMATIQUES BLAISE PASCAL

MAXIME ZUBER

Suites de Honda

Annales mathématiques Blaise Pascal, tome 2, n° 1 (1995), p. 307-314
<http://www.numdam.org/item?id=AMBP_1995__2_1_307_0>

Ann. Math. Blaise Pascal, Vol. 2, N° 1, 1995, pp.307-314

SUITES DE HONDA

Maxime ZUBER, Université de Neuchâtel, Suisse

Résumé: Dans son étude de la version p-adique du problème des moments [2], L. van Hamme définit certaines suites numériques particulières: les *p-F-suites.* Nous présentons ici une généralisation de cette notion en introduisant les suites polynomiales dites *de Honda* et nous établissons un lien avec le point de vue de vue exposé dans le livre de M. Hazewinkel [3].

I. NOTATIONS ET DEFINITIONS:

Sur l'anneau $A = \mathbb{Z}_p[x_1, \ldots x_k]$ nous considérons l'endomorphisme

$$\begin{array}{rccc} \sigma: & A & \longrightarrow & A \\ & x_i & \longmapsto & x_i^p \end{array}$$

et notons a^σ l'image par σ du polynôme a; i.e.

$$a^\sigma(x_1, \ldots, x_k) = a(x_1^p, \ldots, x_k^p).$$

Si $f(z) = \sum_{n\geq 0} f_n z^n \in A[[z]]$ est une série formelle sur A, alors f^σ désigne la série formelle

$$f^\sigma(z) = \sum_{n\geq 0} f_n^\sigma z^n.$$

Définition 1: (T. Honda et M. Hazewinkel) *Une série formelle* $h(z) = \sum_{n\geq 1} H_n z^n/n$ *est de type* $p - T$ *sur* A, *si*

$$h(z) - \frac{1}{p} h^\sigma(z^p) \in A[[z]].$$

Définition 2: (L. van Hamme) *Une suite* $(c_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{Z}_p$ *est une* $p-F$*-suite si, pour tous les entiers* m *et* $r \geq 1$, *on a*

$$c_{mp^r} \equiv c_{mp^{r-1}} \mod p^r\mathbb{Z}_p.$$

Définition 3: *Une suite* $(H_n)_{n\geq 0} \subset A$ *est une suite de Honda si, pour tout entier* $n \in \mathbb{N}$, *la congruence suivante est vérifiée*

$$H_{np} \equiv H_n^\sigma \mod npA;$$

c'est-à-dire, si

$$H_{np}(x_1,\ldots,x_k) \equiv H_n(x_1^p,\ldots,x_k^p) \mod npA.$$

Définition 4: *On dit qu'un polynôme* $Q(x_1,\ldots,x_k)$ *est une pseudo-puissance* n *de* x_i, *si la dérivée partielle* $\partial Q/\partial x_i$ *appartient à l'anneau* $n\cdot A$.

Exemples: A l'origine de la terminologie, les polynômes x_i^n, $(1+x_i)^n$, $r(x_1,\ldots,x_k)^n$ (avec $r(x_1,\ldots,x_k) \in A$) sont des pseudo-puissances n de x_i.

II. RELATIONS ENTRE LES DEFINITIONS:

Proposition 1: *Pour une suite* $(H_n)_{n\geq 1} \subset A$, *les assertions suivantes sont équivalentes*

(i) *La série formelle* $\sum_{n\geq 1} H_n z^n/n$ *est de type* $p-T$ *sur* A:

(ii) *La suite* $(H_n)_{n\geq 1}$ *est une suite de Honda;*

(iii) $\exp\left(\sum_{n\geq 1} H_n z^n/n\right) \in A[[z]]$.

Preuve: Posons $h(z) = \sum_{n\geq 1} H_n z^n/n$. L'équivalence $(i) \Leftrightarrow (iii)$, dont on trouvera une démonstration dans [9], énonce le fait que la série formelle $F(y,z) = h^{-1}(h(y)+h(z))$ définit une *loi de groupe formel* sur un anneau contenant A. Pour démontrer l'équivalence $(i) \Leftrightarrow (ii)$, il suffit d'écrire

$$h(z) - \frac{1}{p}h^\sigma(z^p) = \sum_{n\geq 1} d_n z^n$$

et alors l'identification des coefficients des puissances de z correspondantes conduit aux identités

$$H_{np} - H_n^\sigma = np\cdot d_n, \quad (n \geq 1).$$

L'équivalence s'ensuit directement. ∎

Proposition 2: *Si* $(H_n)_{n\geq 1} \subset A$ *est une suite de Honda, alors*

(i) *Pour tout* $n \geq 1$ *et pour tout* $i \in \{1,\ldots,k\}$, *le polynôme* H_n *est une pseudo-puissance* n *de* x_i:

(ii) *La suite* $(\tilde{H}_n(t))_{n\geq 1}$ *obtenue par spécialisation* $x_i = x_i(t) \in \mathbb{Z}_p[t]$, $(i = 1,\ldots,k)$ *est une suite de Honda.*

Preuve: La première assertion se démontre par induction sur $\nu = ord_p(n)$ l'ordre p-adique de n. Si $\nu = 0$, alors l'entier n est une unité p-adique. Ainsi $n \cdot A = A$ et comme $H_n \in A$, il s'ensuit que $\partial H_n/\partial x_i \in A$. Supposons ensuite que $n = mp^\nu$ avec $\nu > 0$. En dérivant la congruence

$$H_{mp^\nu}(x_1, \ldots, x_k) \equiv H_{mp^{\nu-1}}(x_1^p, \ldots x_k^p) \mod p^\nu A$$

par rapport à la variable x_i, on obtient

$$\frac{\partial}{\partial x_i} H_{mp^\nu}(x_1, \ldots, x_k) \equiv p \cdot x_i^{p-1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} H_{mp^{\nu-1}}(x_1^p, \ldots x_k^p) \mod p^\nu A.$$

Par hypothèse d'induction, on a $\frac{\partial}{\partial x_i} H_{mp^{\nu-1}}(x_1, \ldots x_k) \in mp^{\nu-1}A$: ainsi le second membre de la congruence précédente est nul modulo $p^\nu A$ et donc

$$\frac{\partial}{\partial x_i} H_{mp^\nu}(x_1, \ldots, x_k) \in mp^\nu A.$$

Pour démontrer la seconde partie du théorème, considérons les polynômes $\xi_i(t) \in \mathbb{Z}_p[t]$ définis par les relations

$$x_i(t)^p = x_i(t^p) + p \cdot \xi_i(t). \quad (i = 1, \ldots, k).$$

Grâce au point (i) et en appliquant successivement la version vectorielle du théorème des accroissements finis p-adique [5], on peut écrire

$$\begin{aligned} H_{np}(x_1(t), \ldots, x_k(t)) &\equiv H_n(x_1(t^p) + p \cdot \xi_1(t), \ldots, x_k(t^p) + p \cdot \xi_k(t)) \mod np\mathbb{Z}_p[t] \\ &\equiv H_n(x_1(t^p), \ldots x_k(t^p)) \mod np\mathbb{Z}_p[t]. \end{aligned}$$

Ceci signifie que la nouvelle suite $(\tilde{H}_n(t))_{n\geq 1}$ est suite de Honda. ∎

Corollaire 1: *Si $(H_n)_{n\geq 1} \subset A$ est une suite de Honda, alors pour tout entier p-adique $a \in \mathbb{Z}_p$, la suite $c_n := H_n(a)$ est une $p - F$ suite.*

Preuve: La suite (c_n) correspond à la spécialisation $x_i = a$ pour tout i. ∎

La réciproque de ce corollaire n'est (généralement) pas vraie, sauf dans un cas particulier que nous introduisons maintenant.

Définition 5: *Une suite de polynôme $(A_n(x))_{n\geq 0}$ est une famille d'Appell si, pour tout $n \geq 1$*

$$A_n'(x) = n \cdot A_{n-1}(x).$$

Remarque: Si $(A_n(x))_{n\geq 0} \subset \mathbb{Z}_p[x]$ est une famille d'Appell, alors. pour tout n, le polynôme $A_n(x)$ est une pseudo-puissance n de x.

Exemples: a) La suite définie par $A_n(x) = (1+x)^n$.

b) La suite $(B_n(x))_{n\geq 0}$ des *polynômes de Bernoulli* définie par la fonction génératrice

$$\frac{ze^{xz}}{e^z - 1} = \sum_{n\geq 0} B_n(x)\frac{z^n}{n!}.$$

c) La suite $(E_n(x))_{n\geq 0}$ des *polynômes d'Euler* définie par

$$\frac{2e^{xz}}{e^z + 1} = \sum_{n\geq 0} E_n(x)\frac{z^n}{n!}.$$

Proposition 3: *Pour une famille d'Appell $(A_n(x))_{n\geq 0}$ dans $\mathbb{Z}_p[x]$. les affirmations suivantes sont équivalentes*

(i) Il existe un entier $a \in \mathbb{Z}_p$ pour lequel la suite $(A_n(a))$ est une $p-F$ suite;

(ii) La suite $(A_n(x))$ est une suite de Honda.

Preuve: l'implication $(ii) \Rightarrow (i)$ est immédiate; elle découle directement du corollaire 1. Pour démontrer la réciproque $(i) \Rightarrow (ii)$, il s'agit de voir, par exemple (cf. Proposition 1), que

$$\exp\left(\sum_{n\geq 1} A_n(x)\frac{z^n}{n}\right) \in \mathbb{Z}_p[x][[z]].$$

Or, si l'on pose

$$\exp\left(\sum_{n\geq 1} A_n(x)\frac{z^n}{n}\right) = \sum_{n\geq 0} q_n(x)z^n,$$

on peut calculer les coefficients $q_n(x)$ et constater qu'ils vérifient la relation

$$q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-1+A_0}{k} q_{n-k}(a)(x-a)^k.$$

L'hypothèse stipule que la série

$$\exp\left(\sum_{n\geq 1} A_n(a)\frac{z^n}{n}\right) = \sum_{n\geq 0} q_n(a)z^n,$$

appartient à $\mathbb{Z}_p[[z]]$ puisque $\sum_{n\geq 0} q_n(a)\frac{z^n}{n}$ est de type $p-T$ sur $\mathbb{Z}_p$. Comme $q_n(a) \in \mathbb{Z}_p$, il s'ensuit que $q_n(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et ceci achève la preuve. ∎

III. EXEMPLES DE SUITES DE HONDA

a) Commençons par citer quelques suites de polynômes à deux variables. Pour cela, considérons la suite $(V_n(x,y))_{n\geq 0}$ définie récursivement par la formule

$$\begin{cases} V_{n+1} = \gamma x V_n + \delta y V_{n-1}; \\ V_0 = \alpha \quad , \quad V_1 = \beta x. \end{cases}$$

On peut montrer [8] que la suite correspondant au choix de paramètres $\alpha = 2$, $\beta = \gamma$ et $\delta \in \mathbf{Z}_p$ est une suite de Honda. En prescrivant des valeurs numériques particulières à ces paramètres on obtient quelques suites bien connues; notamment celle *des polynômes de Lucas* à deux variables ($\alpha = 2$, $\beta = \gamma = \delta = 1$) et à une variable ($\alpha = 2$, $\beta = \gamma = \delta = y = 1$), puis celle *des polynômes de Tchebychev* à deux variables ($\alpha = 2$, $\beta = \gamma = 1$ et $\delta = -1$).

b) *Les polynômes de Legendre* $(P_n(x))_{n\geq 0} \subset \mathbf{Z}[1/2][x]$ définis par la fonction génératrice

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = \sum_{n\geq 0} P_n(x) z^n,$$

donnent lieu pour $p \neq 2$ à deux suites de Honda $H_n(x) := P_n(x)$ et $H_n(x) := P_{n-1}(x)$. En effet, si l'on pose $R := \sqrt{1-2xz+z^2}$, alors on peut montrer que les séries formelles

$$\exp\left(\sum_{n\geq 1} P_{n-1}(x)\frac{z^n}{n}\right) = \frac{z-x+R}{1-x},$$

$$\exp\left(\sum_{n\geq 1} P_n(x)\frac{z^n}{n}\right) = \frac{2}{1-xz+R}$$

ont leurs coefficients dans $\mathbf{Z}[1/2]$. On trouvera une preuve simple de ce résultat dû à Taira Honda [4] dans [6].

c) *Les polynômes de Tchebychev* de première espèce $(T_n(x))_{n\geq 0}$, définis par la relation $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$, définissent, pour $p \neq 2$, une suite de Honda. Ceci se déduit de la relation

$$\exp\left(\sum_{n\geq 1} T_n(x)\frac{z^n}{n}\right) = \sum_{n\geq 0} P_n(x) z^n$$

dans laquelle réapparaissent les polynômes de Legendre (qui, comme on l'a vu, sont à coefficients dans $\mathbf{Z}[1/2]$).

b) Voyons maintenant une application de la proposition 3. Rappelons que les polynômes d'Euler $E_n(x)$ définis par la fonction génératrice

$$\frac{2e^{xz}}{e^z+1} = \sum_{n\geq 0} E_n(x)\frac{z^n}{n!}$$

forment une suite d'Appell dans $\mathbb{Z}_p[x]$, $(p \neq 2)$. Nous allons démontrer que

La suite des polynômes d'Euler est une suite de Honda.

En vertu de la proposition 3, il suffit de trouver un entier p-adique a pour lequel $(E_n(a))_{n\geq 0}$ soit une $p-F$ suite. En étudiant la fonction génératrice, on observe que, pour tout $n \geq 0$, $E_n(x+1) + E_n(x) = 2x^n$. Et de là, suit la propriété

$$S_k(N) := 1^k - 2^k + \cdots + (-1)^N (N-1)^k = \frac{-E_k(0) + (-1)^N E_k(N)}{2}, \quad (k \in \mathbb{N}, N > 2).$$

La congruence

$$\ell^{np} \equiv \ell^n \mod np\mathbb{Z}_p,$$

(que l'on démontre à l'aide du théorème des accroissements finis) entraîne directement la suivante

$$S_{np}(N) \equiv S_n(N) \mod np\mathbb{Z}_p.$$

Il s'ensuit que

$$(-1)^N \{E_{np}(N) - E_n(N)\} \equiv E_{np}(0) - E_n(0) \mod np\mathbb{Z}_p.$$

Si N est un entier impair assez proche de 0, par exemple $N = p$, alors $|N| \leq r_e = |p|^{1/(p-1)}$ et le théorème des accroissements finis montre que la dernière congruence peut s'écrire

$$-\{E_{np}(0) - E_n(0)\} \equiv E_{np}(0) - E_n(0) \mod np\mathbb{Z}_p:$$

et ceci montre que $E_{np}(0) - E_n(0) \equiv 0 \mod np\mathbb{Z}_p$. Autrement dit, que la suite $(E_n(0))_{n\geq 0}$ est une p-F- suite. ∎

IV. UNE CONJECTURE SUR LES POLYNOMES D'EULER

Nous terminons cet article par une conjecture que nous livrons à la perspicacité du lecteur.

Sur l'espace vectoriel V des suites de polynômes à coefficients dans $\mathbb{Q}_p$, considérons l'application

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & V & \longrightarrow & V \\ & (v_n)_{n\geq 1} & \longmapsto & \Psi((v_n)) \end{array}$$

définie comme suit

$$\exp\left(\sum_{n\geq 1} v_n \frac{z^n}{n}\right) = \sum_{n\geq 0} \Psi((v_n)) z^n.$$

On dit que les suites(v_n) et $\Psi((v_n))$ sont liées par *l'identité de Spitzer* [1].

Conjecture: *Si* $(E_n(x))$ *désigne la suite des polynômes d'Euler, alors* $\Psi^k(E_n(x))$ *est une suite de Honda pour tout* $k \in \mathbb{Z}$.

Remarque: Nous avons établi le cas $k = 1$.

REFERENCES:

[1] Cartier P. et Foata D. : Problèmes combinatoires de commutation et réarrangements),*LN 85, Springer Verlag, 1969.*

[2] van Hamme L. : The p-Adic Moment Problem ,
in p-adic Functional Analysis
Editorial Universidad de Santiago-Chile (1994), p. 151-163.

[3] Hazewinkel M. : Formal Groups and Applications
Academic Press, Mathematics 78, 1978

[4] Honda T. : Two congruence properties of Legendre polynomials,
Osaka Journal of Math. 13, 1976. p. 131-133.

[5] Robert A. : Le théorème des accroissements finis p-adique,
Ce Volume.

[6] Robert A. : Polynômes de Legendre mod p ,
Publication du Département de Mathématiques Pures, Université Blaise Pascal, Clermont 2. (à paraître).

[7] Zuber M. : Propriétés p-adiques de polynômes classiques,
Thèse 1992. Inst. de Mathématiques, CH-2007 Neuchâtel.

[8] Zuber M. : Une suite récurrente remarquable,
C. R. Acad. Sci. Paris, t. 318. Série I. p. 205-208. 1994.

[9] Zuber M. : Propriétés de congruence de certaines familles classiques de polynômes,
C. R. Acad. Sci. Paris, t. 315, Série I, p. 869-872, 1992

Maxime ZUBER
Institut de Mathématiques
Emile-Argand 11
CH-2007 NEUCHATEL
(Suisse)