ANNALES DE L'I. H. P.

D.W. SCIAMA

Les bases physiques de la théorie du champ unifié

Annales de l'I. H. P., tome 17, nº 1 (1961), p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1961__17_1_1_0>

Les bases physiques de la théorie du champ unifié

par

D. W. SCIAMA [1].

1. Introduction. — La plupart des physiciens considèrent la théorie du champ unifié avec réserve. Mon intention, dans cet article, est de suggérer que cette réserve n'est pas justifiée. Je ne vais pas expliquer ou défendre une théorie particulière, mais plutôt discuter la signification physique des théories non Riemanniennes en général.

Je dois insister dès le début sur le fait que l'appellation « théorie du champ unifié » a plus d'un sens. Pour Einstein, elle signifiait une théorie du « champ total », dont la matière se trouvait être un aspect, et dont les propriétés non linéaires devaient rendre compte de la quantification. La plupart des physiciens trouvent ce programme erroné. Qu'ils aient raison ou non, c'est certainement un projet ambitieux, beaucoup trop ambitieux, en effet, pour nos ressources techniques actuelles. Pour les besoins de cet article, par conséquent, je me placerai dans une perspective plus limitée de la théorie du champ unifié, et la considérerai comme une tentative d'utilisation d'une géométrie non riemannienne pour décrire d'une façon non quantique tous les champs de force qui sont observés dans la nature. Ce programme plus limité nous permet d'utiliser des variables additionnelles non géométriques pour décrire la matière. En dépit de la nature clairement provisoire de ce procédé, nous pourrions espérer qu'il nous apporte un éclaircissement sur le comportement de la matière tout comme en théorie riemannienne.

---

(1) Conférence faite à l'Institut Henri Poincaré le 11 mai 1959. Texte anglais traduit par Mme L. Bouche.

Sans doute, l'argument physique principal qui a été invoqué contre la théorie du champ unifié est le manque d'analogue au principe d'équivalence, qui, bien sûr, est la base physique de la théorie riemannienne de la gravitation (par exemple, PAULI, *The Theory of Relativity*, traduction anglaise, p. 227, 1958). Cette objection est tellement fondamentale que toute discussion physique de la théorie du champ unifié doit commencer par cela. Dans le paragraphe suivant, je discute donc ce point, et conclus *qu'il y a bien* un analogue du principe d'équivalence pour les champs non gravitationnels.

Dans les deux autres paragraphes je discute (a) la signification de la possibilité de déduire les équations du champ, et (b) la signification physique du groupe d'holonomie d'un espace. Cette discussion fournit un canevas pour l'élaboration de théories spécifiques.

2. Le principe d'Équivalence. — *Le champ gravitationnel.* — Le principe d'équivalence peut être exposé de diverses façons. Je veux l'aborder d'un point de vue qui semble d'abord plutôt mathématique. De toute manière, sa signification physique est facilement éclaircie à la fin.

Considérons d'abord en relativité restreinte une théorie de la matière, représentée par un fluide caractérisé par une fonction de champ ψ et qui se transforme d'une façon connue par une transformation de Lorentz. On suppose que le comportement de la matière est régi par un lagrangien $\mathcal{L}_0$ qui est une densité, fonction connue de ψ et de ses dérivées premières $\psi_{,i}$

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_0(\psi, \psi_{,i}).$$

Cette théorie sera Lorentz-invariante si $\mathcal{L}_0$ se transforme comme un scalaire. En relativité restreinte une transformation de Lorentz (homogène) est engendrée par une matrice antisymétrique $O(\alpha\beta)$ qui est indépendante de la position.

Nous admettons maintenant que notre théorie reste invariante si nous prenons pour $O(\alpha\beta)$ une fonction de position, différentiable et arbitraire. Cela revient à faire une transformation de coordonnées non linéaire. L'espace demeure plat par cette transformation, mais le lagrangien devient

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \frac{\partial O(\alpha\beta)}{\partial x^p} j^p(\alpha\beta), \tag{1}$$

où $j^p(\alpha\beta)$ est une fonction de ψ qui dépend de la façon dont ψ se transforme par le groupe de Lorentz (et est la version classique du flux de spin) ([2]).

Pour que le lagrangien $\mathcal{L}$ soit invariant par cette transformation, nous devons introduire une nouvelle quantité de champ $O_p(\alpha\beta)$ et exiger :

(i) que toutes les dérivées de ψ dans $\mathcal{L}$ soient des dérivées covariantes, par exemple si ψ est un vecteur $\psi(\alpha)$, alors

$$\psi(\alpha)_{;p} = \psi(\alpha)_{,p} + O_p(\alpha\beta)\,\psi(\beta);$$

(ii) que par notre transformation de Lorentz variable, $O_p(\alpha\beta)$ ne se transforme pas comme un tenseur de second rang, mais que le terme $-\dfrac{\partial O(\alpha\beta)}{\partial x^p}$ s'y ajoute.

Notre lagrangien original devient maintenant

$$\mathcal{L}_0 + O_p(\alpha\beta)\,j^p(\alpha\beta).$$

Il est invariant, car le terme supplémentaire de (1) est maintenant remplacé par un terme similaire dû au changement non tensoriel de $O_p(\alpha\beta)$.

Finalement, nous formulons une troisième exigence pour $O_p(\alpha\beta)$, c'est-à-dire que :

(iii) $O_p(\alpha\beta)$ ne soit pas, en général, un gradient.

$$O_p(\alpha\beta) \neq \frac{\partial O(\alpha\beta)}{\partial x^p}$$

dans tout l'espace. La condition pour ceci est que

$$R_{pq}(\alpha\beta) = \frac{\partial O_p(\alpha\beta)}{\partial x^q} - \frac{\partial O_q(\alpha\beta)}{\partial x^p} + O_p(\alpha\gamma)\,O_q(\gamma\beta) - O_q(\alpha\gamma)\,O_p(\gamma\beta) \neq 0.$$

Nous considérons maintenant le sens physique de ce procédé. Le terme supplémentaire de (1) représente une relation entre le champ ψ et le champ $\dfrac{\partial O(\alpha\beta)}{\partial x^p}$. C'est une relation fictive, dans ce sens qu'il est possible de la faire disparaître partout par une transformation variable de Lorentz convenable. Cependant, plutôt que d'introduire un tel sys-

---

([2]) Pour une discussion plus détaillée voir mon article dans le livre dédié au Professeur INFELD (sous presse).

tème de coordonnées privilégié, nous « légitimons » la relation fictive en supposant qu'il existe dans la nature un nouveau champ $O_p(\alpha\beta)$ non intégrable, relié à la matière exactement comme $\frac{\partial O(\alpha\beta)}{\partial x^p}$. Le nouveau lagrangien contient une relation qui n'est pas fictive puisque $O_p(\alpha\beta)$ ne peut disparaître nulle part.

De cette façon, nos conditions d'invariance ont « engendré » un nouveau champ physique (qu'on ne peut à ce stade identifier avec aucun champ connu). Nous devons clairement ajouter au lagrangien un terme représentant la partie du nouveau champ qui n'entre pas en interaction avec la matière. Le lagrangien devient alors

$$\mathcal{L}_0 + O_p(\alpha\beta)\, j^p(\alpha\beta) + \mathcal{L}(O_p(\alpha\beta)).$$

Nous sommes en mesure maintenant d'introduire le principe d'équivalence. Le principe est lié au fait que nous avons la liberté d'introduire un nouveau terme de couplage contenant le tenseur de courbure, dans le lagrangien, par exemple un terme de la forme

$$R_{pq}(\alpha\beta)\, j^{pq}(\alpha\beta),$$

où $j^{pq}(\alpha\beta)$ est une fonction de ψ. L'existence d'un terme de cette forme est compatible avec la structure de notre lagrangien original, puisque la courbure est automatiquement nulle dans un espace de Minkowski. Le principe d'équivalence affirme maintenant que *tous les termes de cette sorte sont nuls*. Ceci signifie qu'on suppose que *toute* l'interaction entre la matière et notre nouveau champ apparaît uniquement par la conversion des dérivées ordinaires en dérivées covariantes.

Nous devons maintenant examiner le sens physique du principe d'équivalence. Pour ce faire, nous considérons les équations du mouvement pour notre champ de matière ψ, qui peuvent être déduites du lagrangien par des méthodes variationnelles. La partie $\mathcal{L}_0$ prise seule entraînerait que les lignes de courant sont des géodésiques

$$m\frac{\delta^2 x^i}{\delta s^2} = 0.$$

Le terme $O_p(\alpha\beta)\, j^p(\alpha\beta)$ donne des termes contenant la courbure

$$m\frac{\delta^2 x^i}{\delta s^2} + \frac{1}{2} R^i_p(\alpha\beta)\, j^p(\alpha\beta) + \ldots = 0.$$

Nous voyons ainsi que tous les corps *ne* se déplacent pas sur la même orbite dans un champ donné; leur spin est en interaction avec la courbure (*cf.* A. Papapetrou, *Proc. Roy. Soc.*, 1951, p. 209-248). Par suite, aussi, le principe d'équivalence n'affirme pas que tous les corps se déplacent sur des géodésiques. Ce qu'il affirme en fait est qu'il n'y a plus, dans l'équation du mouvement de terme dérivé d'un terme lagrangien de la forme $R_{pq}(\alpha\beta)\, j^{pq}(\alpha\beta)$ et donc comportant les dérivées de la courbure.

Ce principe suggère maintenant que nous pouvons identifier notre nouveau champ avec un champ déjà connu. Car les expériences de Galilée-Eötvös ont montré que la gravitation se comporte comme notre nouveau champ dans ce fait que, le couplage spin-orbite étant négligeable dans ce cas, différents corps ont la même orbite dans un champ gravitationnel donné. Bien sûr, le coefficient d'un terme comme $R_{pq}(\alpha\beta)\, j^{pq}(\alpha\beta)$ devrait être très grand pour influencer de manière appréciable les équations du mouvement, mais *a priori* il pourrait avoir n'importe quelle valeur (au contraire du coefficient du terme spin-orbite, qui est déterminé par nos conditions d'invariance). Dans l'absence de toute autre possibilité, l'identification du champ $O_p(\alpha\beta)$ avec la gravitation semble très plausible.

b. Le champ électromagnétique. — Nous revenons maintenant à notre lagrangien original $\mathcal{L}_0$, mais considérons que ψ est complexe. En plus de la transformation de Lorentz, nous avons la transformation de phase

$$\psi \to e^{i\varepsilon\theta}\psi$$

qui, nous le supposons, laisse le lagrangien invariant (²). Si maintenant nous permettons à θ d'être une fonction de position arbitraire, nous avons

$$\mathcal{L}_0 \to \mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + i\varepsilon \frac{\partial\theta}{\partial x^p} j^p,$$

où j^p est une fonction de ψ (et est la version classique du flux de charge, si nous anticipons notre future identification avec le champ électromagnétique).

(²) Pour une interprétation géométrique de cette supposition, voir D. W. Sciama *Nuovo Cimento*, t. 8, 1958, p. 417.

Pour que le lagrangien $\mathcal{L}$ soit invariant par cette transformation, nous devons introduire une nouvelle variable de champ A_p et exiger :

(i) que toutes les dérivées de ψ dans $\mathcal{L}$ soient des dérivées covariantes, c'est-à-dire si ψ se transforme avec un facteur ε, alors

$$\psi_{;p} = \psi_{,p} + i\varepsilon\, A_p \psi ;$$

(ii) que par notre transformation de phase variable, A_p s'adjoigne le terme.

$$-i\frac{\partial\theta}{\partial x^p}.$$

Notre lagrangien original devient maintenant

$$\mathcal{L}_0 + i\varepsilon\, A_p j^p,$$

Ceci est invariant parce que le terme supplémentaire de (2) est maintenant transformé en un terme similaire né du changement non tensoriel de A_p.

Finalement, nous formulons une troisième exigence pour A_p, c'est-à-dire que

(iii) A_p ne soit pas, en général, un gradient

$$A_p \neq \frac{\partial\varphi}{\partial x^p}$$

dans tout l'espace. La condition pour ceci est que

$$F_{pq} = \frac{\partial A_p}{\partial x^q} - \frac{\partial A_q}{\partial x^p} \neq 0.$$

Il est clair que la condition mathématique ici rappelle exactement celle donnée dans *a*. Comme nous utilisons des groupes différents, la structure détaillée de nos équations est quelque peu différente. En particulier, alors que les propriétés de transformation de ψ par le groupe de Lorentz conduit au flux de spin, ses propriétés de transformation par le groupe de phase (c'est-à-dire la valeur de ε) détermine le flux de charge.

Pour justifier l'identification de j^p avec le flux de charge, nous considérons les aspects physiques de la théorie. Comme précédemment, nous considérons les A_p comme un nouveau champ qui nécessite un lagrangien libre indépendant. Le lagrangien total devient alors

$$\mathcal{L}_0 + A_p j^p + \mathcal{L}(A_p).$$

Encore comme précédemment, nous pouvons considérer un terme additionnel de liaison contenant la courbure F_{pq}, c'est-à-dire $F_{pq}\, j^{pq}$, où j^{pq} est une fonction de ψ. Le principe d'équivalence affirme maintenant que *tous les termes de cette sorte sont nuls*.

Les équations de mouvement peuvent être dérivées comme précédemment, et sont

$$m \frac{\delta^2 x^i}{\delta s^2} + \varepsilon F^i_p\, j^p = 0$$

sans termes contenant la dérivée de F^i_p. La relation spin-courbure est ici remplacée par une relation charge-courbure. Ces équations de mouvement suggèrent fortement que F_{pq} devrait être identifié avec le champ électromagnétique. Nous verrons qu'avec cette identification, le principe d'équivalence devient évident expérimentalement.

Un terme de la forme $F_{pq}\, j^{pq}$ a déjà été proposée par Pauli pour rendre compte des moments magnétiques irréguliers des nucléons, mais ce phénomène est maintenant attribué d'habitude aux nuages de mésons qui entourent les nucléons. Une pièce à conviction en faveur du principe d'équivalence fut d'abord mise en évidence par Gell-Mann (*Nuovo Cimento*, Suppl., t. 4, 1956, p. 848) qui appela ce principe « le principe de couplage minimal électromagnétique » ; elle consiste dans le fait que le nombre quantique d'étrangeté est conservé par des interactions électromagnétiques. Maintenant, si seulement de telles interactions sont de la forme $A_p\, j^p$, ce fait serait une conséquence automatique de la propriété de conservation de l'étrangeté de $\mathcal{L}_0$. D'un autre côté, un terme de la forme $F_{pq}\, j^{pq}$ pourrait relier deux particules de différentes étrangetés avec le champ électromagnétique. L'absence d'un tel couplage mélangeant les étrangetés nécessiterait alors une explication spéciale.

Nous pouvons conclure cette discussion en définissant le principe d'équivalence d'une manière générale : Quand on introduit un nouveau champ en interaction avec la matière à cause de l'existence d'un groupe d'invariance, le lagrangien ne contient aucune interaction entre la matière et la courbure du champ. Il est clair que ce principe ne singularise pas le champ gravitationnel, et que tous les champs liés à des groupes d'invariance sont sur le même pied. Une méthode générale pour les inclure dans la géométrie de l'espace sera indiquée dans le paragraphe 4; que tous les champs soient de ce type est encore une question ouverte.

3. **Les équations de mouvement.** — Le sens physique d'une géométrie non riemannienne est grandement clarifié par le fait qu'on peut déduire les équations du mouvement, des équations du champ. Car ceci permet d'avoir une géométrie plus compliquée qu'une géométrie riemannienne, à condition que l'équation du mouvement qu'on déduit pour un corps neutre et sans spin soit une géodésique d'un espace riemannien. Cet espace riemannien, qui sera déduit de l'espace original d'une manière bien définie, peut être identifié à l'espace physique dans lequel on représente le mouvement de corps macroscopiques par exemple le système solaire. L'espace plus compliqué demeure derrière la scène, mais se révèle :

a. parce que l'espace riemannien ne satisfait plus aux équations d'Einstein (il y aura, en général, des termes supplémentaires);

b. dans le mouvement de corps plus compliqués, par exemple les corps chargés.

Nous pouvons décrire cette situation en disant qu'un corps neutre est une *sonde insensible* de la géométrie de l'espace. Il indique seulement la part riemannienne. En général, différents types de particules mettront en évidence différents aspects de la géométrie totale.

Cette situation peut être illustrée comme suit : Supposons que nous avons une théorie dans laquelle g_{ij} et T_{ij} sont des valeurs complexes hermitiennes. Les équations de conservation sont alors (SCHRÖDINGER, *Proc. Roy. Irish Acad.*, t. 51, 1948, p. 205).

$$(g^{ij}\mathfrak{T}_{ik}+g^{ji}\mathfrak{T}_{ki})_{,j}+\mathfrak{T}_{rs}g^{rs}{}_{,k}=0.$$

Maintenant, la matière neutre et sans spin sera décrite par un T_{ij} réel et symétrique (SCIAMA, *Proc. Camb. Phil. Soc.* t, 54, 1958, p. 72; *Nuovo Cimento*, t, 8, 1958, p. 417). Car dans ce cas, on a

$$(g^{\underline{ij}}\mathfrak{T}_{ik})_{,j}+\frac{1}{2}\mathfrak{T}_{rs}g^{\underline{rs}}{}_{,k}=0,$$

où

$$g^{\underline{ij}}=\frac{1}{2}(g^{ij}+g^{ji}).$$

Cette équation de conservation implique que la matière neutre et sans spin se déplace le long des géodésiques d'un espace riemannien dont la métrique est l_{ij} ($\neq g_{ij}$), où

$$g^{\underline{ik}}l_{ij}=\delta_j^k.$$

En général, en donnant à T_{ij} des propriétés spéciales, la matière qu'il décrit révélera des aspects spéciaux de la géométrie totale. Nous arriverions à la même conclusion si nous utilisions les singularités du champ pour décrire la matière.

Je dois insister sur le fait que la situation est complètement différente si l'on généralise la théorie originale d'Einstein en introduisant un espace penta ou hexadimensionnel. Car dans de telles théories on doit faire une supposition spéciale sur les dimensions supplémentaires pour retrouver les quatre dimensions de l'espace-temps physique. D'autre part, dans les théories du type invoqué plus haut, la position spéciale de l'espace riemannien est une déduction de la théorie, une théorie qui n'a pas été construite de façon arbitraire afin d'obtenir ce résultat. Nous concluons qu'une telle généralisation de la théorie originale d'Einstein est à la fois naturelle et physiquement satisfaisante.

4. **Le groupe d'holonomie.** — Le groupe d'holonomie apparaît comme un instrument commode pour lier la géométrie de l'espace à la physique des particules élémentaires et de leurs interactions. Le groupe est défini comme suit : Quand un objet géométrique placé en un point est transporté parallèlement le long d'un contour fermé, sa valeur finale diffèrera en général de sa valeur originale. L'effet du transport parallèle peut être représenté par un opérateur agissant sur l'objet original. L'ensemble des opérateurs correspondant à tous les chemins qui commencent et finissent à un point donné forment un groupe : le groupe d'holonomie.

Dans un espace Riemannien le prototype d'un objet géométrique est un vecteur, et puisque les longueurs sont conservées par tout transport parallèle, le groupe d'holonomie correspondant est le groupe de Lorentz (ou peut-être un sous-groupe du groupe de Lorentz, si l'espace satisfait quelques restrictions en gros).

Il est important de comprendre que ce groupe de Lorentz a un sens différent de celui du groupe de Lorentz en relativité restreinte. Ce dernier groupe est un groupe de déplacements dans l'espace de Minkowski. Physiquement il relie les observations de deux observateurs différents en déplacement relatif uniforme l'un par rapport à l'autre. D'autre part, le groupe d'holonomie de Lorentz se réduit à l'identité dans un espace de Minkowski.

La signification physique du groupe d'holonomie peut être comprise si nous considérons notre vecteur prototype comme représentant le spin d'une particule. Si nous transportons deux vecteurs parallèles en un point, à un autre point, les vecteurs résultants en général, ne seront plus parallèles. Ce qui veut dire que les spins des particules ne seront plus parallèles. Physiquement, cela signifie que les spins des particules ont été en interaction avec le champ de gravitation de façons différentes le long des deux chemins (*cf.* § 3). Autrement dit, le groupe d'holonomie de Lorentz implique l'existence d'une *interaction*. En conséquence, nous distinguerons les deux types de groupes de Lorentz en les appelant cinématique et dynamique.

L'objet de cette distinction est, à l'origine, de faciliter l'adaptation du groupe de spin isotopique à la géométrie différentielle de l'espace. Il faut regarder ce groupe plutôt comme un groupe dynamique que comme un groupe cinématique ([3]), puisque quand, par exemple, un proton se transforme en neutron par une iso-rotation, cela correspond physiquement à l'émission ou à l'absorption d'un méson π. Par suite, le groupe de spin isotopique implique l'existence d'une interaction. De ce point de vue le champ π est engendré par la courbure associée au groupe d'holonomie approprié.

Pour voir comment on peut adapter ce groupe à la théorie, nous considérons la table de possibilités suivante :

Objet géométrique.	Groupe d'holonomie.	Tenseur métrique.
Vecteur réel	Orthogonal (Lorentz)	Réel symétrique
» complexe	Unitaire (»)	Complexe hermitien
» quaternion	Symplectique (»)	Quaternion hermitien

L'objet géométrique ne peut pas être plus compliqué qu'un vecteur quaternion, puisque sur des bases physiques, nous devons travailler avec des coefficients d'un champ algébrique, ce qui nous limite aux nombres réels, complexes ou aux quaternions. (Le même argument a été utilisé indépendamment par Finkelstein, Jauch et Speiser (*Cern*, 59-7, 1959) pour construire une mécanique quantique de quaternions).

Un quaternion scalaire paraît un choix naturel pour décrire les

---

([3]) C'est aussi le point de vue de Yang et Mills (*Phys. Rev.*, t. 96, 1954, p. 191) qui, cependant, n'incorporent pas leurs iso-rotations à la géométrie de l'espace.

nucléons, puisque si son groupe d'holonomie est le groupe de quaternions de norme unité, les iso-rotations seront correctement représentées. Donc la quantité maximale de généralité mathématique semble être reliée au degré de complexité des particules élémentaires. Cependant, notre objet n'est pas d'exposer ici une théorie du champ unifié particulière, mais plutôt de décrire les idées physiques sous-jacentes à de telles théories. La relativité des quaternions sera décrite ailleurs.

Je suis reconnaissant au Docteur R. Penrose pour d'utiles discussions.