

ANNALES DE L'I. H. P.

JOÃO ANDRADE E SILVA

**La théorie des systèmes de particules dans l'interprétation
causale de la Mécanique ondulatoire**

Annales de l'I. H. P., tome 16, n° 4 (1960), p. 289-359

[<http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1960__16_4_289_0>](http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1960__16_4_289_0)

© Gauthier-Villars, 1960, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P. » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

La théorie des systèmes de particules dans l'interprétation causale de la Mécanique ondulatoire

par

João ANDRADE E SILVA.

CHAPITRE I.

INTRODUCTION.

Le but de ce travail est d'essayer de montrer qu'il est possible de construire une théorie des systèmes de particules en accord avec les idées de base de l'interprétation causale de la Mécanique ondulatoire par la théorie de la double solution. Il s'insère ainsi dans le cadre des tentatives qui ont été faites ces dernières années — en particulier par MM. L. de Broglie, D. Bohm et J.-P. Vigier — pour développer une formulation de la théorie quantique plus conforme à la conception classique de la Physique théorique.

On sait que l'interprétation habituelle de la Mécanique ondulatoire dispose d'un formalisme mathématique fort bien adapté à l'étude des systèmes de corpuscules : l'équation de Schrödinger dans l'espace de configuration et les postulats probabilistes qui s'y rattachent permettent, en effet, la prévision d'une masse imposante de faits expérimentaux. Mais on sait aussi que ce formalisme est foncièrement inacceptable en tant que représentation de base par l'interprétation causale de la Mécanique ondulatoire, car, si nous acceptons que l'onde représentant

un micro-objet traduit l'existence d'un champ physique étendu réel, comment admettre qu'un système ne puisse être représenté que par une fonction de l'espace de configuration? Déjà en 1927 M. L. de Broglie avait insisté sur le fait que, de ce point de vue, n'importe quel système physique devrait pouvoir être décrit dans l'espace à trois dimensions.

Dans ces conditions il nous faut trouver une représentation des systèmes dans l'espace physique capable d'expliquer la réussite du formalisme habituel dans l'espace de configuration — cette dernière exigence nous assurant l'accord du nouveau schéma théorique avec l'expérience.

Ceci étant, la structure de notre travail est très simple. Tout d'abord (chap. II), après avoir fait un exposé de certains points de la théorie de la particule individuelle qui nous seront indispensables, nous examinerons des Mémoires de M. L. de Broglie et de M. J.-P. Vigiér concernant l'interprétation causale de la théorie des systèmes. Ensuite, au chapitre III, nous montrerons qu'il est possible de refaire la Mécanique analytique des systèmes et, en particulier, la théorie d'Hamilton-Jacobi, dans un espace à trois dimensions. On obtient ainsi l'approximation de l'Optique géométrique de la nouvelle Mécanique ondulatoire des systèmes.

Au chapitre IV nous discuterons en détail la question de la forme des équations fondamentales dans l'espace physique. Nous obtenons ainsi un formalisme qui semble satisfaisant et duquel l'équation de Schrödinger dans l'espace de configuration peut notamment être déduite.

Le dernier chapitre expose la théorie statistique des systèmes de corpuscules de nature différente. Après une analyse du postulat des fluctuations aléatoires, présenté par Bohm et Vigiér dans le cas d'une seule particule, nous proposons un postulat des fluctuations aléatoires généralisé. Nous en déduisons une certaine signification statistique pour les amplitudes des ondes, de laquelle découle l'interprétation habituelle de $|\psi|^2$ comme densité de probabilité de présence du point représentatif du système dans l'espace de configuration.

Enfin un Appendice analysera un travail de M. Darwin se proposant de montrer l'impossibilité de bâtir une Mécanique ondulatoire des systèmes hors de l'espace de configuration. Nous y mettrons en évidence que cette conclusion tient essentiellement au caractère physiquement

inadéquat (même dans l'interprétation habituelle) des hypothèses faites sur la représentation du système dans l'espace physique.

Nous tenons à souligner que c'est uniquement grâce à l'appui de M. Louis de Broglie que ce travail a pu être mené à bien. Si son enseignement nous a permis de l'entreprendre, ses conseils ne nous ont jamais manqué par la suite. On trouvera souvent des traces de ses idées personnelles tout au long de cet exposé. Nous sommes heureux de lui exprimer notre très grande reconnaissance.

Nous remercions aussi M. le Professeur J.-L. Destouches et MM. G. Petiau et J.-P. Vigier, Maîtres de Recherches au C.N.R.S., dont les avis ou suggestions nous ont été utiles.

CHAPITRE II.

L'INTERPRÉTATION CAUSALE DE LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE.

1. L'interprétation causale dans le cas d'une seule particule. — Bien qu'il nous soit impossible de présenter ici un exposé complet de l'interprétation causale de la Mécanique ondulatoire par la théorie de la double solution ⁽¹⁾, nous commencerons par en faire un bref résumé dans le cas d'une seule particule. Nous aurons ainsi l'opportunité non seulement de rappeler les idées et hypothèses qui guident notre propre travail mais aussi, en particulier, d'insister sur certaines distinctions qui s'avèrent fondamentales pour la théorie des systèmes quoique généralement ignorées dans le cas d'une seule particule.

La théorie de la double solution propose la description d'un micro-objet par un champ physique réel ayant la forme d'une onde continue avec une toute petite région singulière où l'amplitude prend de très grandes valeurs ; ces ondes U sont supposées être des solutions d'équations d'évolution non linéaires. Néanmoins, étant donné que nous

⁽¹⁾ Un exposé détaillé de la théorie, telle qu'on la connaissait en 1956, a été donné par M. L. de Broglie : voir bibliographie. [1]. Voir aussi, d'autres points de vue, [2] et [3].

n'avons pas actuellement connaissance de la forme de ces équations non linéaires, il nous faut admettre un certain nombre d'hypothèses supplémentaires qui devront devenir, plus tard, des propriétés de ces équations.

Ainsi on suppose que les équations non linéaires admettent des équations linéaires comme une très bonne approximation dans presque tout l'espace, à l'exception de la région singulière elle-même. Or, à cause de la linéarité de ces équations, leurs solutions sont décomposables : d'une part nous avons une onde v , appartenant à la classe des fonctions habituellement acceptées en Mécanique ondulatoire et, d'autre part, une onde u_0 , onde à singularité ; l'existence de solutions convenables de ce dernier type a d'ailleurs été démontrée dans les cas les plus importants du point de vue physique. Puisque les deux ondes u_0 et v sont des « dégénérescences linéaires » d'une seule onde U (solution d'une équation non linéaire) il semble bien naturel d'introduire un « postulat de l'égalité des phases » entre l'onde v et l'onde u_0 correspondante. L'important théorème du guidage est une conséquence directe de ce postulat. Sa valeur provient du fait qu'il nous permet de déterminer le mouvement d'ensemble de la région singulière une fois connues l'évolution de l'onde v et sa propre position initiale.

Nous nous bornerons dorénavant au cas non relativiste et négligerons les effets dus au spin. Dans ces conditions le théorème du guidage permet de reformuler l'approximation linéaire de la théorie de la double solution sous une forme mathématique beaucoup plus simple et qui garde néanmoins toutes ses propriétés dynamiques. Dans cette « théorie de l'onde pilote » ⁽²⁾ une particule est représentée par un champ physique réel v (ayant la forme d'une onde continue du type habituel) sur lequel se déplace un point matériel dont le mouvement obéit, par hypothèse, au théorème du guidage. C'est à la généralisation au cas des systèmes de cette théorie de l'onde pilote que nous consacrons ce travail.

Plus explicitement (et ceci, bien entendu, à l'approximation envisagée) on admet qu'une particule est représentée par une onde $v(\vec{r}, t)$ et un

⁽²⁾ La désignation de « théorie de l'onde pilote » a été tout d'abord appliquée par M. L. de Broglie à une autre version, plus pauvre, de la théorie où le point matériel est guidé par une onde statistique. Après l'avoir présentée au Congrès Solvay de 1927 son auteur lui-même l'a sévèrement critiquée et elle semble définitivement abandonnée.

point matériel de masse m et de coordonnée $\vec{R}_1(t)$. Par hypothèse l'onde ψ est solution de l'équation de Schrödinger

$$(1.1) \quad \nabla^2 \psi - \frac{2m}{\hbar} V(\vec{r}, t) \psi = \frac{2im}{\hbar} \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

ou encore, en introduisant l'amplitude et la phase de l'onde $\left(\psi = a e^{\frac{i\varphi}{\hbar}}\right)$, du système d'équations obtenu par décomposition de (1.1),

$$(1.2) \quad \frac{\partial a^2}{\partial t} - \frac{1}{m} \nabla(a^2 \nabla \varphi) = 0,$$

$$(1.3) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{2m} (\nabla \varphi)^2 + V(\vec{r}, t) - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 a}{a}.$$

Nous profitons de cette opportunité pour fixer une fois pour toutes les notations employées dans cet exposé. Nous désignerons toujours par $\vec{r}$ (de composantes x, y, z) le vecteur qui repère les points de l'espace, tandis que $\vec{R}_1$, de composantes X_1, Y_1, Z_1 ; $\vec{R}_2$ de composantes $X_2, Y_2, Z_2, \dots$ sont des vecteurs qui définissent les positions des points matériels. De même, ∇f est le vecteur de composantes $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$; $\nabla_1 f$ est le vecteur de composantes $\frac{\partial f}{\partial X_1}, \frac{\partial f}{\partial Y_1}, \frac{\partial f}{\partial Z_1}$, et ainsi de suite. La distinction nette entre les coordonnées d'espace et celles des points matériels est essentielle pour tout ce qui suit.

Comme d'habitude l'intégration de l'équation (1.1) nous apporte la connaissance de la fonction $\psi(\vec{r}, t)$, une fois donnée sa forme initiale $\psi(r, t_0)$. En outre le théorème du guidage, qui a dans ce cas la forme simple

$$(1.4) \quad \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{R}_1}{dt} = -\frac{1}{m} \left[\nabla \varphi(\vec{r}, t) \right]_{\vec{r}=\vec{R}_1},$$

nous permet de déterminer le mouvement du point matériel dès que sa position initiale est connue ⁽³⁾.

Remarquons qu'on pourrait tout aussi bien avoir déduit comme « formule du guidage »

$$\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{R}_1}{dt} = \frac{1}{m} \left[\nabla \varphi(\vec{r}, t) \right]_{\vec{r}=\vec{R}_1}$$

⁽³⁾ Sur le sens des relations d'Heisenberg dans cette interprétation, voir [4].

au lieu de (1.4). Tout dépend de la forme postulée pour l'équation de Schrödinger, celle employée par la plupart des physiciens français (dont M. L. de Broglie) ou celle qui a la préférence des auteurs anglo-saxons. On sait d'ailleurs que dans l'interprétation habituelle les deux formulations conduisent aux mêmes prévisions expérimentales. Il en est de même ici. Ayant pris l'équation de Schrödinger sous la forme (1.1) nous sommes amenés à la formule du guidage (1.4). Néanmoins il ne faut pas oublier que du point de vue de la théorie causale il y a une correspondance biunivoque entre l'équation de Schrödinger et le théorème d'Hamilton-Jacobi classique; ainsi à l'équation (1.1) correspond, en tant qu'équation de Jacobi, $\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{(\text{grad } S)^2}{2m} + V$, avec $p_i = -\frac{\partial S}{\partial q_i}$ (et non $-\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{(\text{grad } S)^2}{2m} + V$ et $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$). Ces remarques nous seront utiles par la suite.

On a l'habitude d'appeler (1.2) l'équation de continuité et (1.3) l'équation de Jacobi généralisée. En effet, (1.2) peut être regardée comme l'équation de continuité hydrodynamique d'un fluide dont la densité serait $a^2(\vec{r}, t)$ et la vitesse $\vec{v}(\vec{r}, t) = -\frac{\nabla \varphi(\vec{r}, t)}{2m}$; dans ce langage le théorème du guidage correspond à dire que le point matériel est astreint à suivre les lignes de courant du fluide avec la vitesse « locale » de celui-ci. De même, (1.3) a l'allure d'une équation classique d'Hamilton-Jacobi, généralisée par la présence d'un terme supplémentaire $Q = -\frac{\hbar^2 \nabla^2 a}{2ma}$ (dont l'existence est liée à la valeur non nulle de la constante $\hbar$) et qui, dans ce contexte, joue le rôle d'un potentiel de type nouveau; il est bien naturel qu'on l'appelle couramment le potentiel quantique.

Personnellement il nous semblerait préférable de nommer (1.3) l'équation d'Euler du potentiel des vitesses comme l'a fait, par exemple, M. Takabayasi [5]: ce serait certainement beaucoup plus cohérent avec l'interprétation hydrodynamique attribuée à (1.2). En plus on ne peut pas, à la rigueur, accepter φ comme une vraie fonction principale de Hamilton parce que son argument est $\vec{r}$ et non $\vec{R}_1$; le changement de variables explicitement indiqué dans la formule du guidage (1.4) n'est, au fond, qu'une manifestation de cet état de choses.

Pour avoir une authentique équation de Jacobi, nous introduirons deux nouvelles fonctions

$$S(\vec{R}_1, t) \quad \text{et} \quad f(\vec{R}_1, t),$$

définies par la condition d'avoir la même dépendance fonctionnelle par rapport à $\vec{R}_1$ et t que celle de φ et α (respectivement) par rapport à $\vec{r}$ et t . Évidemment S et f seront déterminées par des équations formellement analogues à (1.2) et (1.3)

$$(1.5) \quad \frac{df^2}{dt} - \frac{1}{m} \nabla_1 (f^2 \nabla_1 S) = 0,$$

$$(1.6) \quad \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{2m} (\nabla_1 S)^2 + V(\vec{R}_1, t) - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla_1^2 f}{f},$$

mais où nous remplacerons l'opérateur ∇ par ∇_1 , le potentiel $V(\vec{r}, t)$ par $V(\vec{R}_1, t)$. Et, en termes de ces nouvelles fonctions, la formule du guidage s'écrit

$$(1.7) \quad \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{R}_1}{dt} = -\frac{1}{m} \left[\nabla_1 S(\vec{R}_1, t) \right].$$

La fonction $S(\vec{R}_1, t)$ doit être interprétée comme une fonction principale de Hamilton qui nous donne le mouvement du point matériel.

En effet, c'est une fonction des variables $\vec{R}_1$ et t , comme il le fallait, qui obéit à une équation d'Hamilton-Jacobi, généralisée par la présence du potentiel quantique jouant ici le rôle d'un vrai potentiel. En outre, le théorème du guidage a une traduction fidèle par le théorème classique d'Hamilton-Jacobi, ce qui entraîne les mêmes prévisions du mouvement du point matériel, soit par l'équation de Jacobi (1.6), soit par l'application de la formule du guidage (1.4) à une certaine fonction $\psi(\vec{r}, t)$ définie par le système (1.2), (1.3). Dans ce contexte (1.5) n'est qu'une équation auxiliaire, rendue indispensable du fait que le potentiel quantique n'est pas une fonction donnée de $\vec{R}_1$ et de t (comme le potentiel classique), mais il s'exprime à partir de f , les fonctions S et f étant codéterminées par le système d'équations (1.5), (1.6).

On pourrait nous objecter que le théorème du guidage ne correspond qu'au premier groupe de relations du théorème d'Hamilton-Jacobi, $p_i = -\frac{\partial S}{\partial q_i}$. Mais, tant qu'on travaille avec des coordonnées rectilignes

(comme c'est le cas ici) le deuxième groupe de relations est surabondant. Nous pourrions même dire, d'accord avec une remarque de M. L. de Broglie, qu'il en est ainsi dès qu'on se rapporte à un système de coordonnées curvilignes immobile quelconque car, dans ce cas, l'énergie cinétique sera toujours de la forme [10]

$$T = \frac{1}{2} m_{ik} \dot{q}^i \dot{q}^k,$$

où les m_{ik} sont bien déterminées une fois choisi le système de coordonnées curvilignes. Les moments de Lagrange conjugués des q^i seront définis par la relation linéaire

$$p_i = m_{ik} \dot{q}^k$$

et, en posant $m^{ik} = \frac{m_{ik}}{|m_{ik}|}$ ($|m_{ik}|$ étant le déterminant des m_{ik}) on a

$$\dot{q}^k = m^{ik} p_i.$$

Le premier groupe de relations de Jacobi $p_i = -\frac{\partial S}{\partial q_i}$ nous donne alors les $\dot{q}^k$ sous la forme

$$\dot{q}^k = -m^{ik} \frac{\partial S}{\partial q_i},$$

équivalente à la formule du guidage. On voit bien qu'une fois qu'on connaît S et les conditions initiales, cela suffit bien pour déterminer l'évolution du système.

2. Analyse de quelques travaux antérieurs sur les systèmes. —

Avant d'exposer les résultats de nos recherches sur l'interprétation causale de la Mécanique ondulatoire des systèmes, nous nous proposons de passer en revue certains travaux précédents se rapportant à cette question. Nous n'aurons pas la prétention d'être complets et nous bornerons à ceux qui se rattachent à ce qui va suivre.

Commençons par rappeler un important théorème [6], dû à M. L. de Broglie, qui nous apporte des conditions nécessaires à l'équivalence entre le formalisme dans l'espace physique et celui dans l'espace de configuration. Ce théorème s'appuie sur le lemme suivant, dont la démonstration est aisée.

LEMME. — Soient deux variables x et y et une certaine fonction u de x et de y . Considérons trois fonctions $F_1(x, u)$, $F_2(y, u)$ et

$F(x, y, u)$ et supposons que nous avons entre ces trois fonctions les relations

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_y = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)_y, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_x = \left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)_x.$$

Alors on a nécessairement

$$\begin{aligned} F_1(x, u) &= F_{11}(x) + F_{12}(u), & F_2(y, u) &= F_{22}(y) + F_{21}(u), \\ F_{12}(u) &= F_{21}(u), & F(x, y, u) &= F_{11}(x) + F_{22}(y) + F_{12}(u). \end{aligned}$$

Si nous représentons par $S_1(\vec{R}_1, \vec{R}_1 - \vec{R}_2, t)$, $S_2(\vec{R}_2, \vec{R}_1 - \vec{R}_2, t)$, $Q_1(\vec{R}_1, \vec{R}_1 - \vec{R}_2, t)$ et $Q_2(\vec{R}_2, \vec{R}_1 - \vec{R}_2, t)$, respectivement les phases et les potentiels quantiques dans l'espace physique, par $S(\vec{R}_1, \vec{R}_2, t)$ et $Q(\vec{R}_1, \vec{R}_2, t)$ les grandeurs correspondantes dans l'espace de configuration, il est évident qu'il faut avoir, pour que les deux représentations soient compatibles,

$$(2.1) \quad m_1 \vec{v}_1 = -\nabla_1 S_1 = -\nabla_1 S, \quad m_2 \vec{v}_2 = -\nabla_2 S_2 = -\nabla_2 S,$$

et, en plus,

$$(2.2) \quad \nabla_1 Q_1 = \nabla_1 Q, \quad \nabla_2 Q_2 = \nabla_2 Q.$$

Le lemme précédent entraîne alors nécessairement les deux groupes de relations suivants :

$$(2.3) \quad \left\{ \begin{aligned} S_1(\vec{R}_1, \vec{R}_1 - \vec{R}_2, t) &= S_{11}(\vec{R}_1, t) + S_{12}(\vec{R}_1 - \vec{R}_2, t) \\ S_2(\vec{R}_2, \vec{R}_1 - \vec{R}_2, t) &= S_{22}(\vec{R}_2, t) + S_{21}(\vec{R}_1 - \vec{R}_2, t) \\ S(\vec{R}_1, \vec{R}_2, t) &= S_{11}(\vec{R}_1, t) + S_{22}(\vec{R}_2, t) + S_{12}(\vec{R}_1 - \vec{R}_2, t); \end{aligned} \right\} S_{12} = S_{21},$$

$$(2.4) \quad \left\{ \begin{aligned} Q_1(\vec{R}_1, \vec{R}_1 - \vec{R}_2, t) &= Q_{11}(\vec{R}_1, t) + Q_{12}(\vec{R}_1 - \vec{R}_2, t) \\ Q_2(\vec{R}_2, \vec{R}_1 - \vec{R}_2, t) &= Q_{22}(\vec{R}_2, t) + Q_{21}(\vec{R}_1 - \vec{R}_2, t) \\ Q(\vec{R}_1, \vec{R}_2, t) &= Q_{11}(\vec{R}_1, t) + Q_{22}(\vec{R}_2, t) + Q_{12}(\vec{R}_1 - \vec{R}_2, t). \end{aligned} \right\} Q_{12} = Q_{21},$$

D'accord avec une suggestion de M. J.-P. Vigier nous appellerons (2.3) et (2.4) les conditions de De Broglie. Elles nous seront utiles par la suite.

Nous passons maintenant à l'analyse d'un Mémoire de M. Vigier [7] qui se propose de déduire l'équation de Schrödinger, pour un système,

d'équations d'évolution dans l'espace physique. Son raisonnement peut se résumer, avec nos propres notations, de la façon suivante :

Pour décrire l'évolution du système dans l'espace de configuration on introduit une onde $\Phi(\vec{R}_1, \vec{R}_2, t) = f \exp \frac{iS}{\hbar}$ dont la phase, par hypothèse, remplit les conditions (2.1). En outre, on suppose que l'amplitude est définie de façon à obéir à l'équation de continuité

$$(2.5) \quad \frac{\partial f^2}{\partial t} - \frac{1}{m_1} \nabla_1 (f^2 \nabla_1 S) - \frac{1}{m_2} \nabla_2 (f^2 \nabla_2 S) = 0.$$

Ensuite on cherche à déterminer une équation linéaire sur Φ ; pour cela on remarque (2.5) peut s'écrire sous la forme

$$(2.6) \quad \Phi \left[\frac{\partial \Phi^*}{\partial t} + \frac{\hbar}{2m_1 i} \nabla_1^2 \Phi^* + \frac{\hbar}{2m_2 i} \nabla_2^2 \Phi^* \right] \\ + \Phi^* \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{\hbar}{2m_1 i} \nabla_1^2 \Phi - \frac{\hbar}{2m_2 i} \nabla_2^2 \Phi \right],$$

dont la solution générale est

$$(2.7) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{i\hbar}{2m_1} \nabla_1^2 \Phi + \frac{i\hbar}{2m_2} \nabla_2^2 \Phi = ik\Phi.$$

Grâce à l'hypothèse faite sur la linéarité de cette équation et à un théorème dû à M. Régnier nous savons que k est une fonction de $\vec{R}_1$, $\vec{R}_2$ et t ; tout le problème se réduit à sa détermination.

Or, en décomposant (2.7) en parties réelles et imaginaires nous obtenons, d'un côté (2.5) et, de l'autre, l'équation

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{2m_1} (\nabla_1 S)^2 + \frac{1}{2m_2} (\nabla_2 S)^2 + \hbar k - \frac{\hbar^2}{2} \left[\frac{1}{m_1} \frac{\nabla_1^2 f}{f} + \frac{1}{m_2} \frac{\nabla_2^2 f}{f} \right].$$

M. Vigier remarque alors que cette équation doit se réduire à l'équation de Jacobi classique lorsque $\hbar \rightarrow 0$, ce qui entraîne

$$(2.8) \quad k = \frac{1}{\hbar} \left[V_1(\vec{R}_1) + V_2(\vec{R}_2) + V_{12}(\vec{R}_1 - \vec{R}_2) \right],$$

où V_1 , V_2 et V_{12} sont les potentiels classiques, extérieurs et d'interaction. Nous aurions ainsi retrouvé, à partir des équations de l'espace physique, l'équation de Schrödinger dans l'espace de configuration.

Il est troublant que la forme des équations fondamentales dans l'espace physique ne joue effectivement aucun rôle dans cette démon-

tration. Quoi qu'il en soit, nous ne pouvons pas accepter la conclusion traduite par l'égalité (2.8) parce que, pour retrouver l'équation de Jacobi à l'approximation de l'Optique géométrique il suffit d'avoir

$$k = \frac{1}{h} [V_1(\vec{R}_1) + V_2(\vec{R}_2) + V_{12}(\vec{R}_1 - \vec{R}_2)] + F(\vec{R}_1, \vec{R}_2, t),$$

$F(\vec{R}_1, \vec{R}_2, t)$ étant une fonction réelle arbitraire. Ainsi, au lieu d'obtenir l'équation de Schrödinger habituelle, nous arrivons à l'équation plus générale

$$\frac{h^2}{2m_1} \nabla_1^2 \Phi + \frac{h^2}{2m_2} \nabla_2^2 \Phi - (V_1 + V_2 + V_{12}) \Phi - F \Phi = ik \frac{\partial \Phi}{\partial t},$$

où est présente une grandeur F tout à fait indéterminée.

Il ne nous reste qu'à faire une référence à deux Notes de M. L. de Broglie [8] où, pour obtenir le passage à l'espace de configuration, le mouvement de chacune des particules est décrit par rapport à des axes dont la direction spatiale est fixe mais qui sont liés à la position de l'autre particule. Nous n'essayerons pas d'analyser ces travaux en détail, nous bornant à remarquer que cette méthode originale ne semble pouvoir s'appliquer qu'à des systèmes isolés de deux particules.

CHAPITRE III.

LA THÉORIE DES SYSTÈMES A L'APPROXIMATION DE L'OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE.

3. Mécanique analytique des systèmes dans l'espace physique. — Soit un système de N particules de masses $m_i (i = 1, 2, \dots, N)$ et de coordonnées $\vec{R}_i(X_i, Y_i, Z_i)$, en interaction selon des potentiels $V_{ik}(|\vec{R}_i - \vec{R}_k|, t)$ ($k = 1, 2, \dots, N; k \neq i$), et soumises à un potentiel extérieur $V_i(\vec{R}_i)$. Il est bien connu que cette restriction à la forme possible des potentiels d'interaction est imposée par le principe d'égalité d'action et réaction dont l'observance est ainsi assurée [9], [10].

On a l'habitude de traduire le mouvement d'un tel système par une

équation d'Hamilton-Jacobi, écrite dans l'espace de configuration de la forme

$$(3.1) \quad \left\{ \begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \frac{1}{2m_i} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial X_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial Y_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial Z_i} \right)^2 \right] \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1, \substack{N \\ i \neq k}}^N V_{ik}(|\vec{R}_i - \vec{R}_k|, t) + \sum_{j=1}^N V_i(\vec{R}_i, t) = \frac{\partial S}{\partial t} \end{aligned} \right.$$

($i, k = 1, 2, \dots, N; i \neq k$).

Néanmoins nous pouvons aussi représenter l'évolution du système par un ensemble de N équations de Jacobi écrites dans l'espace physique, comme il va être démontré.

Les N équations de Newton du système s'écrivent

$$(3.2) \quad \sum_{k=1}^N \vec{F}_{ik}(|\vec{R}_i - \vec{R}_k|, t) + \vec{F}_i(\vec{R}_i, t) = m_i \frac{d^2 \vec{R}_i}{dt^2} \quad (i \neq k),$$

où les forces dérivent, bien entendu, des potentiels précédemment introduits. Chacune de ces équations, considérée isolément, peut être regardée comme décrivant complètement le mouvement d'un des corpuscules si les mouvements de tous les autres sont supposés connus. Autrement dit, chaque équation peut être envisagée comme donnant formellement le mouvement d'un des corpuscules en fonction des mouvements possibles de tous les autres.

De ce point de vue — justement celui qui permet de dire que les équations de Newton sont des équations dans l'espace physique — nous pouvons écrire, de la façon habituelle, un hamiltonien H_i pour chaque particule

$$(3.3) \quad H_i = \frac{1}{2m_i} (p_{ix}^2 + p_{iy}^2 + p_{iz}^2) + \sum_{k \neq i}^N V_{ik}(|\vec{R}_i - \vec{R}_k|, t) + V_i(\vec{R}_i, t),$$

où toutes les autres coordonnées $\vec{R}_k$ ($k \neq i$) jouent le rôle de paramètres. Chacun de ces hamiltoniens nous permet, en principe, de déterminer le mouvement de la particule correspondante en fonction des mouvements de toutes les autres, d'après les équations classiques

$$(3.4) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{dp_{is}}{dt} = -\frac{\partial H_i}{\partial q_{is}}, \quad \frac{dq_{is}}{dt} = \frac{\partial H_i}{\partial p_{is}} \\ & (q_{is} = X_i, Y_i, Z_i; p_{is} = p_{ix}, p_{iy}, p_{iz}). \end{aligned} \right.$$

L'évolution du système physique est d'ailleurs effectivement déterminée par l'intégration simultanée des $6N$ équations différentielles (3.4); il est intéressant de remarquer qu'elles coïncident avec les $6N$ équations dérivées de l'hamiltonien du système écrit dans l'espace de configuration.

A partir de chaque hamiltonien H_i nous pouvons encore introduire une équation d'Hamilton-Jacobi écrite dans l'espace physique

$$(3.5) \quad \frac{1}{2m_i} \left[\left(\frac{\partial S_i}{\partial X_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_i}{\partial Y_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_i}{\partial Z_i} \right)^2 \right] + \sum_{k=1}^N V_{ik}(|\vec{R}_i - \vec{R}_k|, t) + V_i(\vec{R}_i, t) = \frac{\partial S_i}{\partial t}$$

où chaque fonction principale d'Hamilton S_i dépend des variables $\vec{R}_i$ et t , des constantes d'intégration $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \alpha_{i3}$ et des paramètres $\vec{R}_1(t), \vec{R}_2(t), \dots, \vec{R}_{i-1}(t), \vec{R}_{i+1}(t), \dots, \vec{R}_N(t)$. Pratiquement, l'intégration des N équations aux dérivées partielles (3.5) nous apporte la connaissance des N fonctions principales d'Hamilton S_i , à partir desquelles les mouvements peuvent être déterminés par les relations habituelles ⁽¹⁾

$$(3.6) \quad p_{is} = \frac{\partial S_i}{\partial q_{is}}, \quad \dot{q}_{is} = \frac{\partial S_i}{\partial p_{is}}.$$

Nous obtenons ainsi les fonctions $\vec{R}_i$

$$\vec{R}_i = \vec{R}_i(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{i3}; \beta_{11}, \beta_{12}, \dots, \beta_{N2}, t),$$

et chaque mouvement dépend ainsi des vitesses et des positions initiales de tous les corpuscules, comme il convient d'ailleurs à un système physique.

Nous voyons donc qu'il est possible de représenter l'évolution du système par un ensemble d'équations d'Hamilton-Jacobi, une pour chaque particule, écrites dans l'espace tridimensionnel. Et il est clair, vu la forme par laquelle elles ont été introduites, que leurs prévisions cinématiques doivent coïncider avec celles de l'équation de Jacobi du système dans l'espace de configuration parce que les deux formulations équivalent aux équations fondamentales de Newton.

⁽¹⁾ Comme nous l'avons déjà remarqué, tant qu'on travaille avec des coordonnées non mobiles on n'utilise à la rigueur que le premier groupe de relations (3.6).

4. Comparaison avec la formulation habituelle. Interprétation ondulatoire. — Disposant maintenant de deux représentations possibles du mouvement d'un système dans le cadre de la théorie d'Hamilton-Jacobi nous voulons étudier comment s'y introduisent les conditions initiales, en vue d'une comparaison de ces deux formulations d'un point de vue ondulatoire. Pour simplifier nous nous bornons au cas de deux particules, quoique les raisonnements soient valables dans le cas général.

Tout d'abord nous remarquerons qu'étant donnée l'équivalence dynamique de l'équation (3.1) et du système (3.5) les conditions de De Broglie (2.3) sont certainement vérifiées. Néanmoins, il faut introduire explicitement dans ces décompositions les constantes d'intégration α_i ; nous devons écrire, par exemple,

$$S_1(\vec{R}_1, \vec{R}_1 - \vec{R}_2, \vec{\alpha}_1, t) = S_{11}(\vec{R}_1, \vec{\alpha}_1, t) + S_{12}(\vec{R}_1 - \vec{R}_2, \vec{\alpha}_1, t),$$

où $\vec{\alpha}_1$ n'est pas un vecteur mais seulement un symbole pour l'ensemble des trois constantes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

Or, par hypothèse, les α_i sont des constantes non additives. Nous pouvons en conclure que les conditions de De Broglie sont encore valables même quand ces constantes d'intégration sont explicitées, ce qui entraîne, en particulier, que :

- a. les fonctions $S_{ij}(i \neq j)$ ne contiennent pas les constantes d'intégration;
- b. les constantes d'intégration de S sont les mêmes que celles des $S_i(i = 1, 2)$.

Dans ces conditions, les relations (2.3) peuvent s'exprimer sous la forme suivante :

$$(4.1) \quad \begin{cases} S_1(R_1, R_1 - R_2, \alpha_1, t) = S_{11}(R_1, \alpha_1, t) + S_{12}(R_1 - R_2, t), \\ S_2(R_2, R_1 - R_2, \alpha_2, t) = S_{22}(R_2, \alpha_2, t) + S_{12}(R_1 - R_2, t), \\ S(R_1, R_2, \alpha_1, \alpha_2, t) = S_{11}(R_1, \alpha_1, t) + S_{22}(R_2, \alpha_2, t) + S_{12}(R_1 - R_2, t). \end{cases}$$

Ces formules traduisent le fait que, quelles que soient les conditions initiales, nous devons introduire les mêmes constantes α_i dans les deux représentations.

Il faut voir maintenant ce qui se passe avec les β_i . Ce sont des nouvelles constantes qui permettent de déterminer les positions en utilisant

les équations

$$(4.2) \quad \frac{\partial S}{\partial x_1} = \beta_1; \quad \dots; \quad \frac{\partial S}{\partial x_6} = \beta_6$$

pour le premier formalisme (espace de configuration), ou les équations

$$(4.3) \quad \frac{\partial S_1}{\partial x_1} = \beta'_1; \quad \dots; \quad \frac{\partial S_2}{\partial x_6} = \beta'_6$$

pour le deuxième. Mais, comme on voit directement à partir du système (4.1), puisqu'on a toujours

$$\frac{\partial S}{\partial x_1} = \frac{\partial S_1}{\partial x_1}; \quad \dots; \quad \frac{\partial S}{\partial x_6} = \frac{\partial S_2}{\partial x_6},$$

l'introduction des mêmes conditions initiales dans les deux formalismes entraîne qu'on pose

$$\beta_1 = \beta'_1; \quad \dots; \quad \beta_6 = \beta'_6$$

et ceci complète la résolution du problème préalable de la comparaison des deux représentations du point de vue des conditions initiales.

Nous voyons bien maintenant que la totalité des rapports entre les fonctions S_i et la fonction S est contenue dans les équations (4.1). Autrement dit, nous nous rendons compte que les équations (4.1) sont la condition nécessaire et suffisante de l'équivalence des deux représentations. Car le caractère nécessaire de ces relations est contenu dans les raisonnements de M. de Broglie; qu'elles soient suffisantes (c'est-à-dire qu'elles conduisent inévitablement à la détermination de la même position et de la même quantité de mouvement dans les deux formalismes) est implicitement démontré par notre analyse se rapportant à l'introduction des conditions initiales.

Or il en découle deux conséquences intéressantes. Premièrement, nous remarquons que la connaissance de S ne suffit pas pour déterminer S_1 et S_2 ; cela résulte du fait que la décomposition de S en S_{11} , S_{22} et S_{12} n'est aucunement univoque. Ensuite, nous pouvons montrer que la connaissance de S_1 et de S_2 permet la détermination de S .

En effet, si la décomposition

$$(4.4) \quad S_i = S_{ii} + S_{ik} \quad (i, k = 1, 2; i \neq k)$$

n'est pas univoque, elle permet d'écrire une autre

$$(4.5) \quad S_i(R_i, R_i - R_k, t) = F_{ii}(R_i, t) + F_{ik}(\vec{R}_i - \vec{R}_k, t) + f_i(t)$$

ayant ce caractère d'univocité ⁽⁵⁾. Introduisons deux fonctions $f_{ii}(t)$ et $f_{ik}(t)$ assujetties, tout d'abord, à la condition suivante :

$$(4.6) \quad f_{ii}(t) + f_{ik}(t) = f_i(t)$$

et posons

$$(4.7) \quad \begin{cases} S_{ii}(\vec{R}_i, t) = F_{ii}(\vec{R}_i, t) + f_{ii}(t), \\ S_{ik}(\vec{R}_i - \vec{R}_k, t) = F_{ik}(\vec{R}_i - \vec{R}_k, t) + f_{ik}(t) \end{cases}$$

en bon accord avec (4.4), (4.5) et (4.6); il est naturellement entendu que notre ignorance de f_{ii} et de f_{ik} entraîne celle de S_{ii} et de S_{ik} .

Introduisons les décompositions (4.7) dans la troisième des relations (3.1). Il nous vient

$$\begin{aligned} S(\vec{R}_1, \vec{R}_2, t) &= F_{11}(\vec{R}_1, t) + F_{22}(\vec{R}_2, t) \\ &\quad + F_{12}(\vec{R}_1 - \vec{R}_2, t) + f_{11}(t) + f_{22}(t) + f_{12}(t), \end{aligned}$$

expression qui est, certes, équivalente à

$$S(\vec{R}_1, \vec{R}_2, t) = F(\vec{R}_1, \vec{R}_2, t) + f(t),$$

où

$$F(\vec{R}_1, \vec{R}_2, t) = F_{11} + F_{22} + F_{12}, \quad f = f_{11} + f_{22} + f_{12}.$$

Mais les décompositions (4.5) nous apportent effectivement la forme de la fonction F . Or la connaissance de S_1 et de S_2 permet de déterminer $\vec{R}_1$ et $\vec{R}_2$ en fonction de t et des 12 constantes α_i et β_i ; ceci signifie qu'elles nous donnent la configuration du système à chaque instant et, donc, son énergie E en fonction du temps.

On a, d'autre part, dans ce cas,

$$E(t) = \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{df}{dt}$$

et, en conséquence,

$$f(t) = \int \left[E(t) - \frac{\partial F}{\partial t} \right] dt,$$

ce qui nous détermine f à une constante additive négligeable près.

Ces considérations de Mécanique classique plutôt formelles gagnent un sens physique nouveau si nous regardons les équations (3.1) et (3.5)

⁽⁵⁾ Nous supposons, bien entendu, que par définition F_{ii} et F_{ik} ne peuvent pas avoir des termes additifs qui soient uniquement des fonctions de t .

comme des représentations de la Mécanique ondulatoire des systèmes à l'approximation de l'Optique géométrique. Et, étant donné qu'elles ne nous intéressent que dans cette perspective, nous allons en discuter plus en détail.

Si nous prenons le cas d'une seule particule, il est évident que la fonction principale de Hamilton $S(\vec{R}_1, t)$ doit coïncider, à l'approximation de l'Optique géométrique (et à moins de la substitution de $\vec{R}_1$ par $\vec{r}$ dont il a été question au paragraphe 1) avec la phase de l'onde réelle associée. Pour la détermination de l'amplitude correspondante nous devons, évidemment, retenir l'équation de continuité habituelle. Or l'interprétation causale de la Mécanique ondulatoire exige, de même, qu'un système de particules soit toujours représentable par un ensemble d'ondes évoluant dans l'espace physique. Bien entendu, à cette description doivent correspondre aussi des équations du mouvement des points matériels (singularités) coïncidant, à l'approximation de l'Optique géométrique, avec les prévisions de la Mécanique classique; à cette approximation, ces équations seront, naturellement, le système (3.5). En outre, nous pouvons aisément en tirer les équations des ondes réelles elles-mêmes. D'accord avec les remarques précédentes et les analyses du paragraphe 1, nous prenons donc comme équations d'évolution d'un système, à l'approximation de l'Optique géométrique,

$$(4.8) \quad \frac{\partial a_i^2}{\partial t} - \nabla(a_i^2 \nabla \varphi_i) = 0,$$

$$(4.9) \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = \frac{1}{2m_i} (\nabla \varphi_i)^2 + V_{ik}(|\vec{r} - \vec{R}_k|, t) \quad (i, k = 1, 2; i \neq k)$$

où $a_i(\vec{r}, \vec{R}_k, t)$ et $\varphi_i(\vec{r}, \vec{R}_k, t)$ sont respectivement les amplitudes et les phases des ondes réelles. La possibilité que ces équations nous accordent de déterminer les phases indépendamment des amplitudes caractérise, justement, cette approximation. En plus, il est clair que les φ_i ainsi définis coïncident, à moins du remplacement de r par $\vec{R}_i$, avec les fonctions principales de Hamilton précédemment introduites. De ce point de vue la démonstration du paragraphe 3 revient à prouver que, si nous postulons (4.8) et (4.9) comme équations de propagation des ondes à l'approximation de l'Optique géométrique les mouvements des singularités ainsi prévus s'accordent avec les équations de Newton.

Nous montrerons plus loin que, pour ce qui est de l'interprétation causale, l'équation de Schrödinger dans l'espace de configuration ne doit être prise que comme une description correcte du mouvement de l'ensemble des singularités. Quoi qu'il en soit, le principe de correspondance nous oblige à prendre (3.1) comme représentation de ces mouvements à l'approximation de l'Optique géométrique. Nous sommes donc sûrs que, dans ce cas particulier, les prévisions classiques coïncident avec celles du nouveau schéma fondamental (4.8), (4.9). Nous devons néanmoins remarquer que, même à cette approximation, la représentation dans l'espace physique et celle de l'espace de configuration sont équivalentes en ce qui concerne la dynamique des singularités mais ne le sont plus pour la description des ondes réelles. C'est dans ce contexte qu'il faut placer les propositions démontrées plus haut sur les rapports entre les fonctions S , S_1 et S_2 .

Nous aurons, naturellement, l'opportunité de reprendre en grand détail toutes ces questions hors du domaine d'application de l'Optique géométrique.

CHAPITRE IV.

LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE DES SYSTÈMES.

§. Discussion préalable. — Dans ce chapitre nous nous proposons de déterminer une représentation satisfaisante des systèmes de corpuscules du point de vue de l'interprétation causale de la Mécanique ondulatoire. Par une représentation satisfaisante nous entendons un modèle mathématique qui non seulement s'accorde avec les principes généraux du schéma théorique, auquel il appartient, mais encore qui soit capable d'expliquer la réussite du formalisme habituel — cette dernière exigence correspondant à la nécessité d'un accord avec l'expérience.

Prenons, tout d'abord, un système de deux particules. Les idées de base de l'interprétation causale [1] entraînent la description d'un tel système par un ensemble de deux ondes réelles v_1 et v_2 , se propageant dans l'espace physique, sur chacune desquelles se déplace un point matériel dont les masses et les positions seront symbolisées par m_j et $\vec{R}_j(t)$ ($i = 1, 2$), respectivement.

Bien entendu, nous devons supposer l'existence d'un potentiel classique d'interaction ⁽⁶⁾ entre les particules; or il est clair que ces potentiels classiques doivent avoir des sources ponctuelles (d'après la forme même de leur expression analytique) ce qui entraîne, dans notre modèle, qu'il faut les considérer comme créés par les points matériels. En revanche, l'examen de la théorie dans le cas d'une seule particule sous l'action d'un potentiel extérieur [voir, par exemple, l'équation (1.3)] nous montre que le champ classique agit directement sur la propagation de l'onde ν ; nous y voyons même que son action sur le mouvement du point matériel ne se fait sentir que par l'intermédiaire des changements qu'il apporte à l'évolution de l'onde.

L'interaction classique signifie ainsi que chaque inhomogénéité (c'est-à-dire chaque point matériel) crée un champ capable de modifier la propagation de l'autre onde. Et nous disons « l'autre onde » parce que l'hypothèse de l'action du champ produit par chacune des inhomogénéités sur sa propre onde reviendrait à supposer que la charge d'une particule modifie sa trajectoire même en l'absence de tout champ extérieur, conséquence qui semble inacceptable.

Ces considérations (qui sont, d'ailleurs, déjà implicitement contenues dans l'exposé du paragraphe précédent) ont une transcription analytique immédiate et se généralisent aisément. Par exemple, dans le cas d'un système de trois particules dont les potentiels d'interaction s'écriraient, dans l'hamiltonien classique, sous la forme

$$V_{12}(\vec{R}_1 - \vec{R}_2), \quad V_{13}(\vec{R}_1 - \vec{R}_3), \quad V_{23}(\vec{R}_2 - \vec{R}_3)$$

nous aurions, agissant sur l'onde ν_2 , les potentiels

$$V_{12}(\vec{R}_1 - \vec{r}), \quad V_{23}(\vec{r} - \vec{R}_3).$$

De cette conclusion découle (et cela était aussi visible à l'approximation de l'Optique géométrique) que chaque onde réelle dans l'espace physique doit être considérée comme fonction non seulement des variables d'espace et de temps mais aussi d'un certain nombre de paramètres qui sont les coordonnées de tous les autres points matériels avec lesquels elle est en interaction.

⁽⁶⁾ Nous ne considérons ici que les potentiels scalaires fonctions des distances aux points sources et, éventuellement du temps.

Ceci étant, voici quelle paraît devoir être la structure de cette théorie. Nous postulerons un système d'équations d'évolution nous permettant de déterminer les ondes v_j en tant que fonctions de $\vec{r}$, de t et de certaines coordonnées $\vec{R}_k$. L'utilisation du théorème du guidage permettra alors d'en déduire les mouvements des points matériels dont la connaissance nous donnera ensuite $v_j = f_j(\vec{r}, t)$.

Pour terminer, nous ajouterons une remarque importante. Au début de nos recherches, nous avons supposé que chacune des ondes v_j obéissait, dans l'espace physique, à une équation formellement analogue à l'équation de Schrödinger dans un espace à trois dimensions. Cela semble, tout d'abord, le seul point de départ possible. Mais, quoique ce formalisme nous conduise à une détermination complète de l'évolution des ondes v_j et des mouvements des inhomogénéités, on se heurte ainsi à des difficultés très sérieuses; en particulier, il ne paraît pas possible d'établir l'indispensable connexion avec le formalisme habituel dans l'espace de configuration.

M. L. de Broglie et l'auteur [11] se sont alors aperçus qu'il n'était pas nécessaire que chacune des ondes v_j obéisse à une équation de Schrödinger mais qu'il suffisait de postuler (dans l'espace physique) des équations ayant une forme telle que leur réduction à des équations de Schrödinger, une fois les interactions classiques supprimées fût automatiquement assurée. Cet affaiblissement du raccord avec la théorie de la particule unique, dans la mesure où il nous redonne une certaine liberté de choix des équations fondamentales dans l'espace physique, s'est avéré une condition indispensable au développement de la théorie des systèmes de ce nouveau point de vue.

6. Forme générale des équations d'évolution. — Pour expliciter les remarques précédentes, reprenons le cas d'un système de deux particules en interaction. Désignons encore par $\vec{R}_1 = \vec{R}_1(t)$ et $\vec{R}_2 = \vec{R}_2(t)$ les coordonnées des deux inhomogénéités et soient

$$v_1(\vec{r}, \vec{R}_2(t), t) = a_1 e^{\frac{i\varphi_1}{\hbar}} \quad \text{et} \quad v_2(\vec{r}, \vec{R}_1(t), t) = a_2 e^{\frac{i\varphi_2}{\hbar}}$$

les ondes réelles correspondantes. Nous postulerons alors que ces fonc-

tions obéissent dans l'espace physique aux équations d'évolution suivantes :

$$(6.1) \quad \frac{\partial a_1^2}{\partial t} - \frac{1}{m_1} \nabla (a_1^2 \nabla \varphi_1) = 0,$$

$$(6.2) \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = \frac{1}{2m_1} (\nabla \varphi_1)^2 + V(\vec{r} - \vec{R}_2(t)) - \frac{\hbar^2}{2m_1} \frac{\nabla^2 a_1}{a_1} + Q'_1,$$

$$(6.3) \quad \frac{\partial a_2^2}{\partial t} - \frac{1}{m_2} \nabla (a_2^2 \nabla \varphi_2) = 0,$$

$$(6.4) \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} = \frac{1}{2m_2} (\nabla \varphi_2)^2 + V(\vec{R}_1(t) - \vec{r}) - \frac{\hbar^2}{2m_2} \frac{\nabla^2 a_2}{a_2} + Q'_2.$$

On voit que ce système correspond à admettre pour chaque particule une équation qui généralise l'équation de Schrödinger à trois dimensions par l'introduction des termes Q'_1 et Q'_2 dans les équations (6.2) et (6.4). D'après ce qui a été dit, ces termes doivent s'annuler automatiquement avec l'interaction classique; en plus, ils doivent tendre vers zéro avec $\hbar$, pour que le raccord avec l'approximation classique soit assuré. Bien entendu, rien ne nous empêcherait *a priori* d'introduire des grandeurs du même type dans les équations (6.1) et (6.3) mais cela correspondrait (nous le verrons plus loin) à supposer la non conservation de la probabilité de présence de chaque particule, conséquence qui ne semble pas acceptable, du moins à cette approximation.

Si nous voulons conserver aux équations (6.2) et (6.4) l'allure d'équations de Jacobi, nous devons admettre que Q'_1 et Q'_2 ne contiennent ni φ_1 ni φ_2 ; nous supposons donc qu'il s'agit de certaines fonctions bien déterminées de a_1 et de a_2

$$\begin{aligned} Q'_1 &= Q'_1(a_1(\vec{r}, \vec{R}_2(t), t), a_2(\vec{r}, \vec{R}_1(t), t), t), \\ Q'_2 &= Q'_2(a_1(\vec{r}, \vec{R}_2(t), t), a_2(\vec{r}, \vec{R}_1(t), t), t). \end{aligned}$$

Pour l'instant nous n'explicitons pas la forme de cette dépendance tout en la supposant connue.

Bornons-nous, tout d'abord, au cas où il n'y a pas de potentiels extérieurs ni de conditions aux limites à distance finie. Il est clair que, dans ces conditions, la forme des équations d'évolution dans l'espace physique est invariante par rapport aux translations, c'est-à-dire aux changements de variable de la forme

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = \vec{r} + \vec{A}, \quad \vec{R}_1 \rightarrow \vec{R}'_1 = \vec{R} + \vec{A},$$

Nous concluons donc que la représentation proposée conduit, pour une connaissance précise des conditions initiales, à une détermination univoque de l'évolution des ondes et du mouvement des points matériels.

On pourrait s'étonner d'une apparente asymétrie présentée par ce formalisme; car, si le mouvement de chaque inhomogénéité est visiblement déterminé par l'onde correspondante (guidage), il peut sembler que l'inverse ne se vérifie pas, c'est-à-dire que les ondes ignorent leurs propres inhomogénéités. Il est néanmoins évident que les mouvements des points matériels sont corrélés dans ce sens qu'il y a une correspondance biunivoque entre l'ensemble des mouvements possibles du premier et celui des mouvements du deuxième; analytiquement cela correspond au fait qu'on est obligé de déterminer les six constantes $C_1, C_2, \dots, C_6$ dans les équations (6.6) par l'introduction simultanée des positions initiales des deux points matériels. Dès lors, et puisque l'évolution de chaque onde dépend explicitement de la trajectoire de l'autre inhomogénéité, il en résulte que le mouvement de chaque onde est conditionné par celui du point matériel correspondant.

Il n'en reste pas moins (et cela s'avère fondamental pour le développement de la théorie) qu'une connaissance partielle des ondes c_i — non seulement en fonction des variables $\vec{r}$ et t mais aussi du paramètre $\vec{R}_k(t)$ — est possible, indépendamment des mouvements des inhomogénéités. Ce sont là des conséquences du fait que, pour une seule particule, le mouvement de l'onde c détermine celui du point matériel tout en n'étant pas conditionné par lui.

7. Les équations du mouvement des points matériels. — Dans le cas d'une seule particule, nous avons fait une distinction entre les équations d'évolution de l'onde réelle c et celles du mouvement du point matériel correspondant. Nous allons la reprendre ici la situation étant, naturellement, plus compliquée.

Ainsi, pour un système de deux particules, nous introduirons quatre fonctions f_1, f_2, S_1 et S_2 , définies de la façon suivante : f_1 et S_1 seront les mêmes fonctions que a_1 et φ_1 (respectivement) à cela près qu'on y aura substitué la variable $\vec{r}$ par $\vec{R}_1$; de même, S_2 et f_2 seront obtenues de φ_2 et de a_2 par substitution de $\vec{r}$ par $\vec{R}_2$.

Il se pose maintenant le problème de savoir s'il n'est pas possible, à partir de cette définition et des équations (6.1)-(6.4), d'obtenir la connaissance du système d'équations d'évolution des nouvelles fonctions f_i et S_i , comme c'était le cas pour une seule particule. Il est évident que la réponse à cette question dépend essentiellement de l'expression des Q'_i en termes des amplitudes a_i car, en absence de ces termes supplémentaires, le problème serait résolu comme auparavant. Or, nous verrons plus loin que les Q' seront toujours postulés comme ayant la forme d'une combinaison linéaire de termes des types suivants :

$$(7.1) \quad \frac{\nabla_2 a_i}{a_i}; \quad \frac{\nabla_i^2 a_k}{a_k}; \quad \frac{(\nabla a_i \cdot \nabla_i a_k)}{a_i a_k}$$

[voir les équations (8.8)-(8.9) et (12.4)]. Dans ces conditions, une brève réflexion nous montre [vu la dépendance fonctionnelle particulière des a_i : $a_i = a_i(\vec{r} - \vec{R}_k(t), t)$, précédemment démontrée] que les équations d'évolution des nouvelles fonctions f_1, f_2, S_1 et S_2 sont formellement analogues aux équations (6.1)-(6.4). Autrement dit, si nous avons quatre fonctions

$$(7.2) \quad f_1 = f_1(\vec{R}_1 - \vec{R}_2(t), t),$$

$$(7.3) \quad S_1 = S_1(R_1, R_2(t), t),$$

$$(7.4) \quad f_2 = f_2(\vec{R}_1(t) - \vec{R}_2, t),$$

$$(7.5) \quad S_2 = S_2(R_1(t), R_2, t),$$

solutions du système d'équations, obtenu à partir de (6.1)-(6.4),

$$(7.6) \quad \frac{\partial f_1^2}{\partial t} - \frac{1}{m_1} \nabla_1 (f_1^2 \nabla_1 S_1) = 0,$$

$$(7.7) \quad \frac{\partial S_1}{\partial t} = \frac{1}{2m_1} (\nabla_1 S_1)^2 + V(\vec{R}_1, -\vec{R}_2(t)) - \frac{\hbar^2}{2m_1} \frac{\nabla_1^2 f_1}{f_1} + Q'_1,$$

$$(7.8) \quad \frac{\partial f_2^2}{\partial t} - \frac{1}{m_2} \nabla_2 (f_2^2 \nabla_2 S_2) = 0,$$

$$(7.9) \quad \frac{\partial S_2}{\partial t} = \frac{1}{2m_2} (\nabla_2 S_2)^2 + V(\vec{R}_1(t) - \vec{R}_2) - \frac{\hbar^2}{2m_2} \frac{\nabla_2^2 f_2}{f_2} + Q'_2$$

(où Q'_i est obtenu à partir de Q'_i par substitution de a_i par f_i , de a_2 par f_2 , de ∇a_1 par $\nabla_1 f_1$, de ∇a_2 par $\nabla_2 f_2$, etc.), nous savons que les fonctions (7.2)-(7.5) seront identiques, compte tenu des changements de variables convenus, aux fonctions (6.5) dès qu'une correspondance semblable sera établie entre les respectives conditions initiales.

Comme dans le cas de la particule individuelle, nous devons regarder S_1 et S_2 comme les fonctions principales de Hamilton nous donnant les mouvements des points matériels. En effet, les équations (7.7) et (7.8) ont la forme d'équations d'Hamilton-Jacobi [puisqu'elles sont comparables aux équations (3.5)], simplement généralisées par la présence des potentiels quantiques; elles ne font intervenir que les variables $\vec{R}_1$ et $\vec{R}_2$, comme il se doit; enfin nous savons que les mouvements ainsi déterminés coïncident avec ceux qui prévoyait le formalisme précédent parce que le théorème du guidage se traduit, dans ce nouveau langage, par les formules

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 &= \frac{d\vec{R}_1}{dt} = -\frac{1}{m_1} \nabla_1 S_1(\vec{R}_1, \vec{R}_2(t), t), \\ \vec{v}_2 &= \frac{d\vec{R}_2}{dt} = -\frac{1}{m_2} \nabla_2 S_2(\vec{R}_1(t), \vec{R}_2, t)\end{aligned}$$

qui correspondent parfaitement (vu les remarques présentées à la fin du paragraphe 1) au théorème classique d'Hamilton-Jacobi. Dans ce contexte les équations (7.6) et (7.8) ne doivent être prises que comme des équations auxiliaires, rendues nécessaires par le fait que les potentiels quantiques ne sont pas des fonctions données, mais dépendent eux-mêmes de f_1 et de f_2 , codéterminés avec S_1 et S_2 .

Quoique ces équations du mouvement des points matériels soient pratiquement équivalentes aux équations (6.1)-(6.4) — en particulier la connaissance des S_i et des f_i nous apporte celle des φ_i et des a_i — nous ne devons pas les considérer comme ayant le même contenu physique. La formulation primitive se faisait dans l'espace physique en termes des champs réels v_1 et v_2 ; ici nous n'avons que des ondes fictives n'ayant un sens physique que dans la mesure où leurs phases sont des fonctions principales de Hamilton. En toute rigueur, le système d'équations (7.6)-(7.9) ne constitue qu'un prolongement de la Mécanique analytique classique et, donc, ne s'intéresse directement qu'aux mouvements des inhomogénéités, les ondes étendues v_i ne s'y manifestant que dans la mesure où elles modifient ces mouvements, c'est-à-dire en tant que responsables de l'existence des potentiels quantiques. Dans ce sens, la première représentation a un caractère plus fondamental que la deuxième.

8. Passage à l'espace de configuration. Première forme des potentiels quantiques [11]. — En Mécanique classique, nous savons traduire l'évolution d'un système physique par le mouvement d'un point représentatif dans un espace de configuration à un nombre adéquat de dimensions. Tant que nous ne nous intéresserons directement qu'aux mouvements des inhomogénéités (et aux ondes v_i elles-mêmes) nous verrons qu'il en est de même ici.

Nous avons déjà montré qu'il était légitime de regarder les équations (7.7) et (7.9) comme de vraies équations de Jacobi, généralisées par la présence des potentiels quantiques. Donc, pour passer à l'espace de configuration de la façon habituelle, nous n'avons qu'à examiner les conséquences de l'introduction de ces potentiels de type nouveau.

La question fondamentale dans ce contexte est celle du classement du potentiel quantique dans le schéma : potentiel d'interaction-potentiel extérieur, car on sait que, dans le formalisme de l'espace de configuration, ces deux types de potentiel se comportent de façon différente. Or, pour ce qui est du potentiel classique, un tel classement ne souffre aucune indétermination parce que ces grandeurs sont des fonctions données se présentant sous une forme explicite. Mais il n'en est pas de même pour le potentiel quantique défini à travers des amplitudes codéterminées avec les phases. Dès lors, il se pose le problème de classer le potentiel quantique (où, éventuellement, ses diverses composantes) dans les deux catégories rapportées.

A la réflexion [11], [13], il nous a paru possible de dépasser cette difficulté de la façon suivante. Tant que nous nous bornons à des systèmes sans interaction avec le reste de l'Univers, c'est-à-dire à des systèmes non soumis à des potentiels extérieurs ni assujettis à des conditions aux limites à distance finie, il semble naturel d'admettre que les potentiels quantiques ont la nature de potentiels d'interaction, justement parce que tous les contacts avec l'extérieur sont, par hypothèse, supprimés. Ainsi on pourrait, en principe, arriver à représenter dans l'espace de configuration des systèmes isolés de N particules.

Pour y introduire des potentiels extérieurs classiques (et les conditions aux limites ne seraient regardées que comme une traduction analytique de l'existence de certaines barrières de potentiel) nous n'avions alors qu'à profiter du fait que ces potentiels peuvent être regardés, d'un point de vue physique, comme des cas limites de potentiels d'interaction,

limites correspondant aux cas où la particule source de ces potentiels a une masse infinie ou un mouvement imposé *a priori*. Ainsi, en prenant un système isolé, fictif, de $N + M$ particules, on pourrait certainement en tirer un système réel de N particules, soumis aux potentiels extérieurs et aux conditions aux limites nécessaires.

Nous verrons bientôt à quelles difficultés se heurte la réalisation de ce programme et comment il faut le modifier; quoi qu'il en soit, nous le développerons tout d'abord, d'une part parce qu'il s'agit de la solution la plus simple (et l'on se doit d'expliquer son échec), d'autre part parce que cette étude s'avère très instructive, les raisonnements y développés restant *mutatis mutandis* valables.

De la précédente analyse nous tirons immédiatement deux conclusions. Tout d'abord, si les potentiels quantiques dans l'espace physique sont de purs potentiels d'interaction nous devons avoir

$$Q_1 = Q_2;$$

ensuite la Mécanique analytique nous impose que le potentiel quantique dans l'espace de configuration doit être égal (à moins des changements de variables habituels) à chacun des potentiels quantiques dans l'espace physique

$$(8.1) \quad Q = Q_1 = Q_2.$$

Ceci étant, il est évident que notre formalisme exige l'introduction dans l'espace de configuration, en plus de la fonction principale de Hamilton S , au moins d'une autre fonction — disons $f(\vec{R}_1, \vec{R}_2, t)$ — dont la présence est rendue indispensable du fait, déjà souvent mentionné, que les potentiels quantiques sont exprimés à travers les grandeurs f_1 et f_2 codéterminées avec S_1 et S_2 . Ainsi, et en accord avec une idée de M. L. de Broglie, nous introduirons une amplitude dans l'espace de configuration définie par la formule

$$(8.2) \quad f(\vec{R}_1, \vec{R}_2, t) = f_1(\vec{R}_1, \vec{R}_2, t) \times f_2(\vec{R}_1, \vec{R}_2, t)$$

La relation (8.2), dont le caractère nécessaire sera discuté plus loin, signifie que f est le produit des deux fonctions $f_1(\vec{R}_1, \vec{R}_2(t), t)$ et $f_2(\vec{R}_1(t), \vec{R}_2, t)$, mais où $\vec{R}_1(t)$ et $\vec{R}_2(t)$ ont été substitués par les composantes du vecteur dans l'espace de configuration $\vec{R}_1$ et $\vec{R}_2$. Ce

changement de variables est, d'ailleurs, normal dans ce contexte puisque nous le trouvons aussi pour le potentiel classique d'interaction; ainsi, par exemple, pour un système de deux particules en interaction, les forces introduites dans les équations de Newton dérivent des potentiels $V(\vec{R}_1 - \vec{R}_2(t))$ et $V(\vec{R}_1(t) - \vec{R}_2)$, respectivement, tandis que dans le formalisme de l'espace de configuration, nous écrivons le potentiel d'interaction sous la forme $V(\vec{R}_1 - \vec{R}_2)$.

Les hypothèses déjà introduites [et qui se réduisent aux équations (8.1) et (8.2)] nous mettent à même de prouver qu'il est possible, par un choix convenable des potentiels quantiques supplémentaires dans l'espace physique, de retrouver l'équation de Schrödinger dans l'espace de configuration. Mieux encore, cela suffit pour déterminer la forme de ces potentiels.

L'équation de Schrödinger dans l'espace de configuration s'écrit, pour notre système,

$$(8.3) \quad i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_1} \nabla_1^2 \Phi - \frac{\hbar^2}{2m_2} \nabla_2^2 \Phi + V(\vec{R}_1 - \vec{R}_2)$$

ou, ce qui revient au même pour $\Phi = f \exp \frac{iS}{\hbar}$,

$$(8.4) \quad \frac{\partial f^2}{\partial t} - \frac{1}{m_1} \nabla_1 (f^2 \nabla_1 S) - \frac{1}{m_2} \nabla_2 (f^2 \nabla_2 S) = 0,$$

$$(8.5) \quad \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{2m_1} (\nabla_1 S)^2 + \frac{1}{2m_2} (\nabla_2 S)^2 + V(\vec{R}_1 - \vec{R}_2) - \frac{\hbar^2}{2m_1} \frac{\nabla_1^2 f}{f} - \frac{\hbar^2}{2m_2} \frac{\nabla_2^2 f}{f}.$$

Nous en tirons que le potentiel quantique dans l'espace de configuration Q est donné, en fonction de l'amplitude f , par

$$(8.6) \quad Q = -\frac{\hbar^2}{2m_1} \frac{\nabla_1^2 f}{f} - \frac{\hbar^2}{2m_2} \frac{\nabla_2^2 f}{f}.$$

Introduisons dans cette équation la formule de définition (8.2); il nous vient, comme expression de Q en termes des fonctions f_1 et f_2 ,

$$(8.7) \quad Q = -\frac{\hbar^2}{2m_1} \left(\frac{\nabla_1^2 f_1}{f_1} + \frac{2(\nabla_1 f_1 \cdot \nabla_1 f_2)}{f_1 f_2} + \frac{\nabla_1^2 f_2}{f_2} \right) - \frac{\hbar^2}{2m_2} \left(\frac{\nabla_2^2 f_1}{f_1} + \frac{2(\nabla_2 f_1 \cdot \nabla_2 f_2)}{f_1 f_2} + \frac{\nabla_2^2 f_2}{f_2} \right).$$

Alors l'égalité (8.1) nous apporte l'expression des potentiels quantiques Q_1 et Q_2 et, partant, la connaissance des fonctions jusqu'ici indéterminées Q'_1 et Q'_2 .

Inversement, supposons que, (conformément au calcul précédent) nous postulons pour les fonctions Q'_1 et Q'_2 , introduites dans les équations (6.2) et (6.4), les formes

$$(8.8) \quad Q'_1 = -\frac{\hbar^2}{2m_1} \left(\frac{2(\nabla a_1 \cdot \nabla_1 a_2)}{a_1 a_2} + \frac{\nabla_1^2 a_2}{a_2} \right) - \frac{\hbar^2}{2m_2} \left(\frac{\nabla_2^2 a_1}{a_1} + \frac{2(\nabla_2 a_1 \cdot \nabla a_2)}{a_1 a_2} + \frac{\nabla^2 a_2}{a_2} \right),$$

$$(8.9) \quad Q'_2 = -\frac{\hbar^2}{2m_1} \left(\frac{\nabla^2 a_1}{a_1} + \frac{2(\nabla a_1 \cdot \nabla_1 a_2)}{a_1 a_2} + \frac{\nabla_1^2 a_2}{a_2} \right) - \frac{\hbar^2}{2m_2} \left(\frac{\nabla_2^2 a_1}{a_1} + \frac{2(\nabla_2 a_1 \cdot \nabla a_2)}{a_1 a_2} \right).$$

Dans ces conditions, et d'après les changements de notation définis auparavant, les équations (7.7) et (7.9) s'écriront explicitement

$$(8.10) \quad \frac{\partial S_1}{\partial t} = \frac{1}{2m_1} (\nabla_1 S_1)^2 + V(\vec{R}_1 - \vec{R}_2(t)) - \frac{\hbar^2}{2m_1} \left[\frac{\nabla_1^2 f_1}{f_1} + \frac{2(\nabla_1 f_1 \cdot \nabla_1 f_2)}{f_1 f_2} + \frac{\nabla_1^2 f_2}{f_2} \right] - \frac{\hbar^2}{2m_1} \left[\frac{\nabla_2^2 f_1}{f_1} + \frac{2(\nabla_2 f_1 \cdot \nabla_2 f_2)}{f_1 f_2} + \frac{\nabla_2^2 f_2}{f_2} \right],$$

$$(8.11) \quad \frac{\partial S_2}{\partial t} = \frac{1}{2m_2} (\nabla_2 S_2)^2 + V(\vec{R}_1(t) - \vec{R}_2) - \frac{\hbar^2}{2m_1} \left[\frac{\nabla_1^2 f_1}{f_1} + \frac{2(\nabla_1 f_1 \cdot \nabla_1 f_2)}{f_1 f_2} + \frac{\nabla_1^2 f_2}{f_2} \right] - \frac{\hbar^2}{2m_2} \left[\frac{\nabla_2^2 f_1}{f_1} + \frac{2(\nabla_2 f_1 \cdot \nabla_2 f_2)}{f_1 f_2} + \frac{\nabla_2^2 f_2}{f_2} \right].$$

Or il a déjà été démontré que ces équations ne sont que des équations d'Hamilton-Jacobi, purement et simplement généralisées par la présence de forces quantiques inconnues dans la formulation classique. En outre, les formules (8.1) et (8.2) autorisent la transcription de ces potentiels quantiques (qui sont, dans ce contexte, de vrais potentiels) dans l'espace de configuration, où ils prennent la forme (8.6). Nous arrivons ainsi à la conclusion que les mouvements corrélés des deux points matériels sont aussi correctement décrits par l'équation (8.5), la fonction S étant considérée comme la fonction principale de Hamilton du système.

Ceci entraîne, en particulier, que les vitesses des points matériels seront données dans le formalisme de l'espace de configuration, par le théorème classique d'Hamilton-Jacobi

$$v_i = \frac{d\vec{R}_i}{dt} = -\frac{1}{m_i} \left[\nabla_i S(\vec{R}_1, \vec{R}_2, t) \right].$$

Les relations (2.1), que nous écrirons explicitement sous la forme

$$(8.12) \quad \nabla_i S(R_1, R_2, t) = \left[\nabla_i \varphi_i(\vec{r}, \vec{R}_k(t), t) \right]_{\vec{r}=\vec{R}_i} = \nabla_i S_i(\vec{R}_i, \vec{R}_k(t), t),$$

et sur lesquelles s'appuie la déduction de la première partie de conditions de De Broglie (2.3), ayant été introduites comme des relations nécessaires à l'équivalence du formalisme de l'espace physique et de celui de l'espace de configuration, deviennent maintenant une simple conséquence de la théorie.

9. Passage à l'espace de configuration. L'équation de continuité [11]. —

Les raisonnements du paragraphe précédent nous ont déjà permis d'aboutir à un résultat important : il a été démontré que l'équation d'Hamilton-Jacobi dans l'espace de configuration qui nous donne les mouvements corrélés des deux points matériels est justement l'équation (8.5).

Néanmoins, il s'agit visiblement d'un résultat incomplet et qui ne peut pas être pris isolément. Car il est évident que l'existence des potentiels quantiques, entraînant l'introduction de la fonction f , rend indispensable la déduction d'une autre équation pour la codétermination de S et de f . Pour retrouver l'équation de Schrödinger dans l'espace de configuration il faut, bien entendu, que cette deuxième équation (jouant ici, méthodologiquement, le rôle d'une équation auxiliaire) soit l'équation (8.4). Et, étant donné que les fonctions f et S ont déjà été effectivement définies — la première par la formule (8.2), la deuxième par la théorie d'Hamilton-Jacobi — nous devons être à même de déduire l'équation (8.4) sans qu'il soit même possible d'introduire aucune nouvelle hypothèse.

Ainsi, si l'on nous fait l'objection que les conclusions du paragraphe précédent n'ont pas beaucoup de valeur, vu qu'elles n'ont été possibles que grâce à une définition de f sur mesure et à la possibilité de profiter d'une certaine liberté dans le choix des potentiels quantiques dans l'espace physique, nous répondrons que ces hypothèses se doivent aussi de nous assurer simultanément la dérivation de l'équation (8.4). Ce qui plus est, nous démontrerons plus loin que notre définition de f est, pratiquement, la seule possible quelle que soit la forme des potentiels quantiques. Mais, tout d'abord, nous nous attacherons à montrer que l'équation de continuité dans l'espace de configuration vient automatiquement des hypothèses déjà introduites.

L'amplitude dans l'espace de configuration $f(\vec{R}_1, \vec{R}_2, t)$ a été définie comme le produit de $f_1(\vec{R}_1, \vec{R}_2, t)$ et $f_2(\vec{R}_1, \vec{R}_2, t)$, ces fonctions étant égales aux amplitudes dans l'espace physique à cela près qu'aux paramètres, $\vec{R}_1(t)$ et $\vec{R}_2(t)$ ont été substituées les composantes du vecteur dans l'espace de configuration $\vec{R}_1$ et $\vec{R}_2$. A partir des équations d'évolution de $f_i(\vec{R}_i, \vec{R}_k(t), t)$ ($i, k = 1, 2; i \neq k$), c'est-à-dire des équations (7.6) et (7.8), écrites maintenant sous la forme

$$(9.1) \quad \frac{\partial f_i}{\partial t} = \frac{1}{m_i} \nabla_i f_i \nabla_i S_i + \frac{1}{2 m_i} f_i \nabla_i^2 S_i$$

nous commencerons donc par déduire celles de $f_i(\vec{R}_i, \vec{R}_k, t)$. Or, dans le même sens où nous disons que la fonction $f_i(\vec{R}_i, \vec{R}_k, t)$ est égale à $f_i(\vec{R}_i, \vec{R}_k(t), t)$ nous pouvons écrire

$$\nabla_i f_i(\vec{R}_i, \vec{R}_k(t), t) = \nabla_i f_i(\vec{R}_i, \vec{R}_k, t);$$

mais il n'en est pas de même pour les dérivées par rapport au temps parce que

$$\frac{\partial f_i(\vec{R}_i, \vec{R}_k(t), t)}{\partial t} = \frac{\partial f_i(\vec{R}_i, \vec{R}_k, t)}{\partial t} + \left(\nabla_k f_i(\vec{R}_i, \vec{R}_k, t) \frac{d\vec{R}_k}{dt} \right).$$

La formule du guidage, telle que la traduisent les équations (7.10) et (7.11) permet d'exprimer la relation précédente sous la forme

$$\frac{\partial f_i(R_i, R_k(t), t)}{\partial t} = \frac{\partial f_i(R_i, R_k, t)}{\partial t} - \left(\nabla_k f_i(R_i, R_k, t) \frac{\nabla_k S_k}{m} \right).$$

Introduisons maintenant la phase de l'onde de l'espace de configuration en faisant [équation (8.12)] :

$$\nabla_i S_i = \nabla_i S;$$

ceci et les rapports entre les dérivées déduits plus haut nous permettent de conclure, à partir de (9.1), que les fonctions $f_1(\vec{R}_1, \vec{R}_2, t)$ et $f_2(\vec{R}_1, \vec{R}_2, t)$ obéissent aux équations suivantes :

$$(9.2) \quad \frac{\partial f_1}{\partial t} = \frac{1}{m_1} \nabla_1 f_1 \nabla_1 S + \frac{1}{m_2} \nabla_2 f_1 \nabla_2 S + \frac{1}{2 m_1} f_1 \nabla_1^2 S,$$

$$(9.3) \quad \frac{\partial f_2}{\partial t} = \frac{1}{m_2} \nabla_2 f_2 \nabla_2 S + \frac{1}{m_1} \nabla_1 f_2 \nabla_1 S + \frac{1}{2 m_2} f_2 \nabla_2^2 S.$$

Ce sont déjà, visiblement, des équations dans l'espace de configuration. Multiplions alors (9.2) par f_2 , (9.3) par f_1 et ajoutons; nous obtenons l'équation

$$\begin{aligned} f_2 \frac{\partial f_1}{\partial t} + f_1 \frac{\partial f_2}{\partial t} &= \frac{1}{m_1} \nabla_1 (f_1 f_2) \nabla_1 S \\ &+ \frac{1}{m_2} \nabla_2 (f_1 f_2) \nabla_2 S + \frac{1}{2 m_1} f_1 f_2 \nabla_1^2 S + \frac{1}{2 m_2} f_1 f_2 \nabla_2^2 S. \end{aligned}$$

Si nous y introduisons la formule de définition de f (8.2), cela devient

$$(9.4) \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{m_1} \nabla_1 f \nabla_1 S + \frac{1}{m_2} \nabla_2 f \nabla_2 S + \frac{1}{2 m_1} f \nabla_1^2 S + \frac{1}{2 m_2} f \nabla_2^2 S,$$

ce qui est justement une autre manière d'écrire l'équation (8.4). Il a donc été démontré que l'équation « auxiliaire » nécessaire à la codétermination de l'amplitude et de la phase dans l'espace de configuration est effectivement l'équation (8.4). Nous sommes en droit de dire que l'équation habituelle de Schrödinger a été déduite de notre formalisme fondamental dans l'espace physique.

Nous voulons encore insister sur le fait que les raisonnements qui aboutissent à cette équation ne prennent appui que sur les équations de continuité dans l'espace physique et sur la formule de définition de f . En particulier, l'existence des équations de Jacobi généralisées pour les mouvements des points matériels y a été implicitement supposée mais aucune hypothèse restrictive sur leur forme n'a été nécessaire. Cette remarque nous sera utile plus tard car elle nous évitera de refaire le même raisonnement.

10. Sur le caractère nécessaire de la définition $f = f_1 \times f_2$. — Nous devons maintenant nous interroger sur la valeur qu'il convient d'attribuer à la forme des potentiels quantiques supplémentaires introduits dans les équations de l'espace physique; car il est bien évident que cette forme dépend non seulement de l'équation de Schrödinger dans l'espace de configuration mais aussi de l'équation de définition de l'amplitude de l'onde attachée au système. Ainsi on pourrait se demander si une autre définition de f ne nous apporterait pas une autre forme pour ces potentiels quantiques supplémentaires tout aussi valable que la première.

Nous nous proposons de montrer qu'il n'en est rien et que la formule $f = f_1 \times f_2$ est réellement la seule définition possible de l'ampli-

tude dans l'espace de configuration. Pour cela nous utiliserons un raisonnement qui nous a été suggéré par une remarque de M. L. de Broglie ⁽⁸⁾, faite dans un autre contexte. Et, avant d'exposer ce théorème, nous discuterons les bases physiques des deux hypothèses sur lesquelles il prend appui.

Il sera admis, tout d'abord, que les potentiels quantiques dans l'espace physique sont uniquement des fonctions de f_1 et de f_2 ; comme il a déjà été rapporté, ceci est nécessaire si l'on veut garder aux équations (7.7) et (7.9) le caractère d'équations de Jacobi généralisées, ce qui nous semble indispensable. L'utilisation de la Mécanique analytique pour le passage à l'espace de configuration entraîne, alors, que l'amplitude dans cet espace ne soit fonction que des amplitudes dans l'espace physique (et, aucunement, des phases correspondantes).

D'autre part, nous savons déjà que f^2 , puisqu'il obéit à l'équation de Schrödinger, est une grandeur conservative; nous admettrons qu'il en est de même pour f_1^2 et f_2^2 . Cela se justifie du fait que la théorie statistique qu'il faut bâtir sur ce schéma déterministe suppose explicitement une telle propriété pour ces grandeurs.

Donc, il nous semble bien qu'il s'agit d'hypothèses indispensables à toute théorie des systèmes dans l'interprétation causale de la Mécanique ondulatoire; et, ceci étant, voici notre

THÉOREME. — *Si les carrés des amplitudes dans l'espace physique et dans l'espace de configuration $\rho_i = f_i^2$ et $\rho = f^2$ sont des grandeurs conservatives, c'est-à-dire obéissant à des équations de continuité*

$$(10.1) \quad \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla_i (\rho_i \vec{V}_i) = 0 \quad (i = 1, 2),$$

$$(10.2) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla (\rho \vec{v}) = 0 \quad (9)$$

et si ρ est une fonction arbitraire de ρ_1 et de ρ_2 .

$$\rho = F(\rho_1, \rho_2),$$

alors on doit nécessairement avoir

$$f = K f_1 f_2,$$

⁽⁸⁾ Communication privée.

⁽⁹⁾ Visiblement ∇ représente ici l'opérateur de composantes $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_2}$.

où K est une constante multiplicative (constante de normalisation) arbitraire.

Pour démontrer ce théorème commençons par remarquer qu'en prenant les dérivées totales par rapport au temps le long des lignes de courant, les équations (10.1) peuvent s'écrire

$$(10.3) \quad \frac{D\rho_i}{Dt} + \rho_i \nabla_i \vec{v}_i = 0.$$

En introduisant les éléments de volume $d\tau_1$ et $d\tau_2$ attachés à ρ_1 et à ρ_2 , et étant donné que

$$(10.4) \quad \frac{D(d\tau_i)}{Dt} = d\tau_i \nabla_i \vec{v}_i,$$

nous arrivons à exprimer ces équations de continuité sous la forme ⁽¹⁰⁾

$$(10.5) \quad \frac{D}{Dt}(\rho_i d\tau_i) = 0.$$

De même, (10.2) deviendra

$$(10.6) \quad \frac{D}{Dt}(\rho d\tau) = 0$$

et nous prenons, évidemment, $d\tau = d\tau_1 \times d\tau_2$.

En introduisant la relation (10.3) dans l'équation précédente elle devient, sous une forme explicite,

$$\frac{\partial F}{\partial \rho_1} \left[\frac{D\rho_1}{Dt} d\tau_1 d\tau_2 \right] + \frac{\partial F}{\partial \rho_2} \left[\frac{D\rho_2}{Dt} d\tau_1 d\tau_2 \right] + F d\tau_1 \frac{D d\tau_2}{Dt} + F d\tau_2 \frac{D d\tau_1}{Dt} = 0$$

ou, encore, en prenant en considération les équations (10.5),

$$(10.7) \quad \rho_1 d\tau_2 \frac{\partial F}{\partial \rho_1} \frac{D d\tau_1}{Dt} + \rho_2 d\tau_1 \frac{\partial F}{\partial \rho_2} \frac{D d\tau_2}{Dt} - F d\tau_1 \frac{D d\tau_2}{Dt} - F d\tau_2 \frac{D d\tau_1}{Dt} = 0.$$

Or, $d\tau_1$ et $d\tau_2$ sont deux éléments de volume arbitraires et indépendants; si l'on remarque que l'équation (10.7) peut aussi se mettre sous la forme

$$\frac{d\tau_1}{D d\tau_1} \left[F - \rho_2 \frac{\partial F}{\partial \rho_2} \right] + \frac{d\tau_2}{D d\tau_2} \left[F - \rho_1 \frac{\partial F}{\partial \rho_1} \right] = 0$$

⁽¹⁰⁾ L'expression d'une équation de continuité sous la forme (10.5) est classique en Hydrodynamique. Voir, par exemple, [14].

on voit que, pour qu'elle soit satisfaite, il faut que

$$(10.8) \quad \begin{cases} F(\rho_1, \rho_2) - \rho_2 \frac{\partial F(\rho_1, \rho_2)}{\partial \rho_2} = 0, \\ F(\rho_1, \rho_2) - \rho_1 \frac{\partial F(\rho_1, \rho_2)}{\partial \rho_1} = 0, \end{cases}$$

système qui va déterminer la forme de la fonction F . Pour l'intégrer aisément partons de l'équation qui s'en déduit

$$\rho_1 \frac{\partial F}{\partial \rho_1} - \rho_2 \frac{\partial F}{\partial \rho_2} = 0$$

dont la solution générale est l'ensemble des fonctions ayant comme argument le produit $\rho_1 \times \rho_2$. Introduisons cette solution dans la première des équations (10.8), la deuxième étant alors identiquement satisfaite. Pour $\alpha = \rho_1 \rho_2$ on a

$$F(\alpha) = \rho_2 \frac{dF(\alpha)}{d\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \rho_2} = \alpha \frac{dF(\alpha)}{d\alpha},$$

ce qui conduit à poser $F(\alpha) = C\alpha$. Mais, puisque $F(\alpha) = \rho$ et $\alpha = \rho_1 \rho_2$, ceci équivaut à

$$\rho = C \rho_1 \rho_2$$

ou, ce qui revient au même,

$$f = K f_1 f_2,$$

c'est-à-dire à l'équation (10.4) qu'on voulait justement démontrer.

11. Généralisations et critique de la représentation précédente [15]. — Jusqu'ici nous nous sommes bornés à l'étude d'un système isolé de deux particules. Cherchons maintenant à le généraliser, soit en considérant des systèmes à plusieurs particules, soit en introduisant des potentiels extérieurs par la méthode du passage à la limite déjà rapportée.

Commençons par reprendre le système isolé de deux particules et regardons ce qui s'y passe si l'interaction classique disparaît. Il semble naturel de traduire cet état de choses en annulant le potentiel (classique) d'interaction et en supposant, en conséquence, que l'évolution de chaque onde réelle v_i devient indépendante du mouvement de l'autre singularité. Analytiquement, cela veut dire qu'au lieu d'avoir, comme auparavant

$$v_i = v_i(\vec{r}, \vec{R}_k(t), t)$$

nous devons simplement poser

$$v_i = v_i(\vec{r}, t).$$

Dans ces conditions il est clair que la presque totalité des termes du potentiel quantique disparaît et le système d'équations (6.1)-(6.4) — Q'_1 et Q'_2 étant donnés par (8.8) et (8.9) — devient ainsi

$$\begin{aligned}\frac{\partial a_1^2}{\partial t} - \frac{1}{m_1} \nabla(a_1^2 \nabla \varphi_1) &= 0, \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} &= \frac{1}{2 m_1} (\nabla \varphi_1)^2 - \frac{\hbar^2}{2 m_1} \frac{\nabla^2 a_1}{a_1} - \frac{\hbar^2}{2 m_2} \frac{\nabla^2 a_2}{a_2}, \\ \frac{\partial a_2^2}{\partial t} - \frac{1}{m_2} \nabla(a_2^2 \nabla \varphi_2) &= 0, \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} &= \frac{1}{2 m_2} (\nabla \varphi_2)^2 - \frac{\hbar^2}{2 m_2} \frac{\nabla^2 a_2}{a_2} - \frac{\hbar^2}{2 m_1} \frac{\nabla^2 a_1}{a_1}.\end{aligned}$$

Or il faut avouer que ce système a une étrange allure. On s'attendrait, naturellement, à trouver pour chaque particule une équation de Schrödinger et, en réalité, il n'en est rien, car nous y rencontrons, en plus, deux termes

$$-\frac{\hbar^2}{2 m_2} \frac{\nabla^2 a_2}{a_2} \quad \text{et} \quad -\frac{\hbar^2}{2 m_1} \frac{\nabla^2 a_1}{a_1}$$

vestiges du potentiel quantique supplémentaire introduit dans la représentation des systèmes.

En toute rigueur ceci ne suffit pas pour invalider le formalisme proposé parce que, dans ces conditions particulières (absence de potentiels classiques et de conditions aux limites), nous retombons effectivement dans le domaine d'approximation de l'Optique géométrique où tous ces termes du potentiel quantique sont nuls. Mais, de toute façon, une telle situation ne saurait pas être regardée comme satisfaisante.

Pour aller plus loin, passons au cas d'un système isolé de trois particules. Remarquons, tout d'abord, qu'une telle généralisation soulève de sérieuses difficultés ⁽¹¹⁾; mais, étant donné qu'il nous faudra reprendre plus loin cette analyse sous des conditions plus favorables, nous nous bornons à en exposer ici certaines conclusions importantes.

⁽¹¹⁾ Nous avons examiné brièvement cette question dans un travail antérieur [15]; quoique nous ne pourrions plus accepter certains détails tels qu'ils y sont exposés (en particulier, la forme des équations de évolution) ses conclusions essentielles nous semblent toujours valables.

Ainsi, si nous désignons par Q le potentiel quantique du système dans l'espace de configuration et par $Q_i (i = 1, 2, 3)$ les potentiels qui agissent sur chacune des particules (dans l'espace physique), il est évident, vu leur caractère de purs potentiels d'interaction, qu'il faut avoir

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3.$$

D'autre part, il est indispensable que, chaque fois que l'interaction d'une des particules avec les deux autres s'annule, les potentiels quantiques auxquels celles-ci restent soumises se réduisent à la forme postulée dans le cas d'un système de deux particules. Or un examen détaillé de ces potentiels montre que ces deux exigences sont incompatibles.

Plus significatif c'est le résultat suivant : si nous prenons un système de trois particules et faisons tendre vers l'infini l'une des masses nous obtenons un système de deux particules sous l'action d'un potentiel extérieur; on constate alors que les deux potentiels quantiques Q_1 et Q_2 deviennent égaux après ce passage à la limite. Néanmoins en présence d'un potentiel extérieur classique il est certain que les potentiels quantiques ont, à la fois, le caractère de potentiels d'interaction et de potentiels extérieurs. Comment s'expliquer donc, dans ces conditions, que la relation $Q_1 = Q_2$ reste valable même dans ce cas?

Quoi qu'il en soit nous sommes maintenant assurés que la représentation proposée n'est pas acceptable, malgré ses réussites dans le cas d'un système isolé de deux particules. Plus explicitement, il nous faut des raisons qui justifient un changement de forme des potentiels quantiques supplémentaires même dans ce cas particulier; et, étant donné qu'un théorème démontré auparavant nous impose de garder la définition de f par l'équation $f = f_1 \times f_2$, ceci nous amène à réexaminer la seule autre hypothèse introduite, celle du caractère de purs potentiels d'interaction attribué aux potentiels quantiques (pour des systèmes isolés).

Et, en effet, les arguments physiques sur lesquels s'appuie cette hypothèse semblent, à la critique, plutôt fallacieux. Nous nous disions que les potentiels quantiques ne pouvaient être que des potentiels d'interaction parce que, en absence de potentiels classiques extérieurs et de conditions aux limites à distance finie, le système n'avait effectivement aucun contact avec son environnement. Mais, en toute rigueur, les Q_i ne jouent un rôle de potentiels que dans les équations de Jacobi généralisées (7.7) et (7.9) où le « système physique » n'est constitué que

par les points matériels, les ondes réelles v_i elles-mêmes étant de ce point de vue, extérieures au « système ». Or les potentiels quantiques ne sont que des incidences de ce phénomène ondulatoire étendu sur le mouvement des points matériels. Donc, au contraire de ce que les apparences nous avaient conduit à supposer tout d'abord, il est indispensable d'admettre que les potentiels quantiques ont aussi toujours (même pour des systèmes isolés) un caractère de potentiels extérieurs.

12. Deuxième forme des potentiels quantiques [16]. — Comme nous l'avons déjà remarqué, les potentiels extérieurs et les potentiels d'interaction ont, dans le passage à l'espace de configuration, un comportement dissemblable. Vu les conclusions du paragraphe précédent il nous est donc indispensable de trouver un critère permettant de classer univoquement dans ces deux catégories les diverses composantes du potentiel quantique.

Certes ceci constitue un problème délicat. Nous savons que du fait que le potentiel quantique n'est pas une grandeur donnée mais une certaine fonction des amplitudes, codéterminées avec les phases, il résulte que tous les termes de ce potentiel de type nouveau sont modifiés par la présence de n'importe quel potentiel classique (extérieur ou d'interaction). Mais cette manifestation de la souplesse du potentiel quantique ne semble pas entraîner la nécessité de regarder ses diverses composantes comme ayant, à la fois, une nature de potentiel extérieur et de potentiel d'interaction. Si le potentiel quantique d'un système isolé a sûrement cette double nature, cela ne veut pas dire qu'il en est de même pour les termes qui le composent, pris séparément.

Si nous nous rapportons au cas d'une seule particule sous l'action d'un potentiel extérieur (ou de conditions aux limites, ce qui revient au même) le potentiel quantique n'est pas nul et il a, dans ces conditions, exclusivement la nature d'un potentiel extérieur : tant qu'il n'y a pas d'interaction classique, l'évolution d'une particule ignore la présence éventuelle de toutes les autres dans les environs, leurs ondes v_i ne pouvant jamais « interférer ».

De ces considérations nous tirons que, si un potentiel quantique ne peut jamais se borner à être un potentiel d'interaction, il peut y avoir de purs potentiels quantiques extérieurs. Et ceci nous suggère fortement d'admettre que ce ne sont que les potentiels quantiques supplémentaires

(introduits par la présence d'une interaction classique) qui ont un caractère de potentiels d'interaction. Autrement dit, nous allons supposer que tous les termes du potentiel quantique qui s'annulent avec les interactions classiques ont la nature d'un potentiel d'interaction, les autres termes étant censés représenter un potentiel quantique extérieur.

Ceci étant, reprenons un système de deux particules et appelons Q_i les potentiels quantiques dans l'espace physique. Nous devons maintenant avoir

$$(12.1) \quad Q_i = Q_{ii} + Q_{ij}$$

où Q_{ij} est le potentiel quantique d'interaction et Q_{ii} le potentiel quantique extérieur. La théorie de la particule individuelle nous donne l'expression de Q_{ii} :

$$(12.2) \quad Q_{ii} = -\frac{\hbar^2}{2m_i} \frac{\nabla_i^2 f_i}{f_i}.$$

D'autre part, il est indispensable que les deux potentiels quantiques d'interaction soient égaux, $Q_{ij} = Q_{ji}$. Comme la Mécanique analytique nous impose que

$$Q = Q_{11} + Q_{22} + Q_{12}$$

(Q étant le potentiel quantique du système dans l'espace de configuration) et nous avons, dans l'équation (8.7), la forme de Q en fonction de f_1 et de f_2 , pour $f = f_1 \times f_2$,

$$Q = -\frac{\hbar^2}{2m_1} \left(\frac{\nabla_1^2 f_1}{f_1} + \frac{2(\nabla_1 f_1 \cdot \nabla_1 f_2)}{f_1 f_2} + \frac{\nabla_1^2 f_2}{f_2} \right) - \frac{\hbar^2}{2m_2} \left(\frac{\nabla_2^2 f_1}{f_1} + \frac{2(\nabla_2 f_1 \cdot \nabla_2 f_2)}{f_1 f_2} + \frac{\nabla_2^2 f_2}{f_2} \right)$$

nous pouvons en tirer la forme de Q_{ij} :

$$(12.3) \quad \begin{aligned} Q_{21} = Q_{12} = & -\frac{\hbar^2}{2m_1} \left(\frac{2(\nabla_1 f_1 \cdot \nabla_1 f_2)}{f_1 f_2} + \frac{\nabla_1^2 f_2}{f_2} \right) \\ & - \frac{\hbar^2}{2m_2} \left(\frac{2(\nabla_2 f_1 \cdot \nabla_2 f_2)}{f_1 f_2} + \frac{\nabla_2^2 f_2}{f_2} \right). \end{aligned}$$

Bref, nous nous proposons de garder comme équations d'évolution le système (6.1)-(6.4) mais en prenant, pour les potentiels quantiques supplémentaires qui y sont introduits, des expressions correspondantes à (12.3), c'est-à-dire en posant

$$(12.4) \quad \begin{aligned} Q'_1 = Q'_2 = & -\frac{\hbar^2}{2m_1} \left(\frac{2(\nabla a_1 \cdot \nabla_1 a_2)}{a_1 a_2} + \frac{\nabla_1^2 a_2}{a_2} \right) \\ & - \frac{\hbar^2}{2m_2} \left(\frac{2(\nabla_2 a_1 \cdot \nabla a_2)}{a_1 a_2} + \frac{\nabla_2^2 a_1}{a_1} \right). \end{aligned}$$

Cette nouvelle forme des potentiels quantiques nous assure que, dès que l'interaction classique disparaît, le mouvement de chaque particule est gouverné par une équation de Schrödinger. En plus, tous les raisonnements qui nous ont permis de déduire le formalisme habituel dans l'espace de configuration restent *mutatis mutandis* valables, en accord avec les remarques que nous avons faites en temps utile. Donc, cette deuxième version des potentiels quantiques est, en ce qui concerne les systèmes de deux particules, au moins aussi satisfaisante que l'ancienne. Et nous allons voir qu'il est maintenant possible de passer à des cas plus généraux.

13. Généralisation au cas de plusieurs particules sous l'action de potentiels extérieurs [17]. — Pour représenter un système isolé de trois particules nous prendrons trois points matériels de masses m_j et de coordonnées $\vec{R}_j(t)$ et trois ondes réelles, continues, φ_j de la forme

$$(13.1) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi_j(\vec{r}, R_k(t), R_l(t), t) &= a_j(r - R_k(t), r - R_l(t), t) \exp \frac{i \varphi_j(\vec{r}, R_k(t), R_l(t), t)}{\hbar} \\ (j, k, l &= 1, 2, 3; j \neq k \neq l; j \neq l), \end{aligned} \right.$$

supposées être des solutions du système d'équations

$$(13.2) \quad \frac{\partial a_j^2}{\partial t} - \frac{1}{m_j} \nabla(a_j^2 \nabla \varphi_j) = 0,$$

$$(13.3) \quad \frac{\partial \varphi_j}{\partial t} = \frac{1}{2 m_j} (\nabla \varphi_j)^2 + V_{jk}(\vec{r} - \vec{R}_k(t), t) + V_{jl}(\vec{r} - \vec{R}_l(t), t) + Q_j,$$

$$(13.4) \quad \begin{aligned} Q_j(\vec{r} - \vec{R}_k(t), \vec{r} - \vec{R}_l(t), \vec{r} - \vec{R}_j(t), t) \\ = - \frac{\hbar^2}{2} \left[\frac{1}{m_j} \left(\frac{\nabla^2 a_j}{a_j} + \frac{2(\nabla a_j \cdot \nabla_j a_k)}{a_j a_k} + \frac{\nabla_j^2 a_k}{a_k} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2(\nabla a_j \cdot \nabla_j a_l)}{a_j a_l} + \frac{\nabla_j^2 a_l}{a_l} + \frac{2(\nabla_j a_k \cdot \nabla_j a_l)}{a_k a_l} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{m_k} \left(\frac{2(\nabla a_k \cdot \nabla_k a_j)}{a_j a_k} + \frac{\nabla_k^2 a_j}{a_j} + \frac{(\nabla_k a_j \cdot \nabla_k a_l)}{a_j a_l} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{m_l} \left(\frac{2(\nabla a_l \cdot \nabla_l a_j)}{a_j a_l} + \frac{\nabla_l^2 a_j}{a_j} + \frac{(\nabla_l a_j \cdot \nabla_l a_k)}{a_j a_k} \right) \right]. \end{aligned}$$

En principe ce formalisme doit nous donner, comme auparavant, pour des conditions initiales bien déterminées, soit l'évolution des ondes φ_j ,

soit les mouvements des points matériels. De même, nous pouvons en tirer le système d'équations d'Hamilton-Jacobi généralisées pour le mouvement des points matériels, système qui, bien entendu, est de la forme

$$(13.5) \quad \frac{\partial f_j^2}{\partial t} - \frac{1}{m_j} \nabla_j (f_j^2 \nabla_j S_j) = 0,$$

$$(13.6) \quad \frac{\partial S_j}{\partial t} = \frac{1}{2 m_j} (\nabla_j S_j)^2 + V_{jk}(\vec{R}_j - \vec{R}_k(t), t) + V_{jl}(\vec{R}_j - \vec{R}_l(t), t) + Q_j'$$

$$(13.7) \quad Q_j(\vec{R}_j - \vec{R}_k, \vec{R}_j - \vec{R}_l, \vec{R}_k - \vec{R}_l, t) \\ = -\frac{\hbar^2}{2} \left[\frac{1}{m_j} \left(\frac{\nabla_j^2 f_j}{f_j} + \frac{2(\nabla_j f_j \cdot \nabla_j f_k)}{f_j f_k} + \frac{\nabla_j^2 f_k}{f_k} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2(\nabla_j f_j \cdot \nabla_j f_l)}{f_j f_l} + \frac{\nabla_j^2 f_l}{f_l} + \frac{2(\nabla_j f_k \cdot \nabla_j f_l)}{f_k f_l} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{m_k} \left(\frac{2(\nabla_k f_k \cdot \nabla_k f_j)}{f_k f_j} + \frac{\nabla_k^2 f_j}{f_j} + \frac{(\nabla_k f_j \cdot \nabla_k f_l)}{f_j f_l} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{m_l} \left(\frac{2(\nabla_l f_l \cdot \nabla_l f_j)}{f_l f_l} + \frac{\nabla_l^2 f_j}{f_j} + \frac{(\nabla_l f_j \cdot \nabla_l f_k)}{f_j f_k} \right) \right].$$

Pour passer à l'espace de configuration nous commencerons par séparer, dans chaque potentiel quantique Q_j , le potentiel extérieur Q_{jj} du potentiel d'interaction $Q_{jj'}$. Pour y parvenir faisons disparaître toutes les interactions classiques et, en accord avec notre critère fondamental, regardons comme appartenant au potentiel quantique extérieur les termes qui ne s'annulent point. Nous obtenons donc

$$(13.8) \quad Q_{jj} = -\frac{\hbar^2}{2 m_j} \frac{\nabla_j^2 f_j}{f_j}$$

et, puisque nous devons avoir

$$(13.9) \quad Q_j = Q_{jj} + Q_{jj'},$$

les équations (13.8) et (13.7) nous déterminent $Q_{jj'}$. Or, selon la Mécanique analytique, le potentiel quantique qui, dans l'espace de configuration agit sur le système, doit être donné par

$$(13.10) \quad Q = \sum_{j=1}^n \left(Q_{jj} + \frac{1}{2} Q_{jj'} \right)$$

ce qui entraîne, par substitution des valeurs de Q_{jj} et $Q_{jj'}$,

$$(13.11) \quad Q = -\frac{\hbar^2}{2} \left[\frac{1}{m_1} \left(\frac{\nabla_1^2 f_1}{f_1} + \frac{\nabla_1^2 f_2}{f_2} + \frac{\nabla_1^2 f_3}{f_3} + \frac{2(\nabla_1 f_1 \cdot \nabla_1 f_2)}{f_1 f_2} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2(\nabla_1 f_1 \cdot \nabla_1 f_3)}{f_1 f_3} + \frac{2(\nabla_1 f_2 \cdot \nabla_1 f_3)}{f_2 f_3} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{m_2} \left(\frac{\nabla_2^2 f_1}{f_1} + \frac{\nabla_2^2 f_2}{f_2} + \frac{\nabla_2^2 f_3}{f_3} + \frac{2(\nabla_2 f_1 \cdot \nabla_2 f_2)}{f_1 f_2} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2(\nabla_2 f_1 \cdot \nabla_2 f_3)}{f_1 f_3} + \frac{2(\nabla_2 f_2 \cdot \nabla_2 f_3)}{f_2 f_3} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{m_3} \left(\frac{\nabla_3^2 f_1}{f_1} + \frac{\nabla_3^2 f_2}{f_2} + \frac{\nabla_3^2 f_3}{f_3} + \frac{2(\nabla_3 f_1 \cdot \nabla_3 f_2)}{f_1 f_2} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2(\nabla_3 f_1 \cdot \nabla_3 f_3)}{f_1 f_3} + \frac{2(\nabla_3 f_2 \cdot \nabla_3 f_3)}{f_2 f_3} \right) \right].$$

Puisque le raisonnement du paragraphe 10 reste valable dans le cas de trois particules, nous définirons une amplitude f dans l'espace de configuration par l'équation

$$(13.12) \quad f = f_1 \times f_2 \times f_3$$

et, dans ces conditions, (13.11) peut encore se mettre sous la forme

$$(13.12) \quad Q = -\frac{\hbar^2}{2} \left[\frac{1}{m_1} \frac{\nabla_1^2 f}{f} + \frac{1}{m_2} \frac{\nabla_2^2 f}{f} + \frac{1}{m_3} \frac{\nabla_3^2 f}{f} \right].$$

Comme nous pouvons substituer les trois équations de Jacobi généralisées (13.6) par une seule équation de Jacobi généralisée, écrite dans l'espace de configuration, nous aurons ainsi

$$(13.14) \quad \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{2m_1} (\nabla_1 S)^2 + \frac{1}{2m_2} (\nabla_2 S)^2 + \frac{1}{2m_3} (\nabla_3 S)^2 + V_{12} + V_{13} + V_{23} + Q,$$

où Q est, bien sûr, justement donné par (13.13). Pour obtenir une deuxième équation, indispensable à la codétermination de S et de f , nous n'avons qu'à reprendre des considérations analogues à celles du paragraphe 9, ce qui nous conduira à une équation de continuité qui s'écrit

$$(13.15) \quad \frac{\partial f^2}{\partial t} - \frac{1}{m_1} \nabla_1 (f^2 \nabla_1 S) - \frac{1}{m_2} \nabla_2 (f^2 \nabla_2 S) - \frac{1}{m_3} \nabla_3 (f^2 \nabla_3 S) = 0.$$

Mais, étant donné que l'ensemble des équations (13.13), (13.14) et (13.15) ne représente que la décomposition de l'équation de Schrödinger dans l'espace de configuration pour un système de trois particules, ceci équivaut à la démonstration que cette équation nous donne

les mêmes mouvements des points matériels que nos équations de base (13.2)(13.3) et (13.4).

Ayant démontré cette équivalence il nous faut encore examiner si les diverses conditions de raccordement que nous devons imposer au système d'équations fondamentales (13.2), (13.3) et (13.4) suffisent, effectivement, pour déterminer leur forme d'une façon univoque. Autrement dit, nous allons montrer qu'il n'y a qu'un système d'équations — celui qui a été postulé — permettant de satisfaire les trois conditions suivantes :

A. Si toutes les interactions classiques s'annulent, chaque particule doit obéir à une équation de Schrödinger dans l'espace à trois dimensions;

B. Si les interactions classiques d'une des particules avec les deux autres s'annulent, celles-ci doivent être gouvernées par les équations admises auparavant pour un système de deux particules;

C. Les mouvements des inhomogénéités sont correctement décrits par l'équation de Schrödinger dans l'espace de configuration.

En dernière analyse il s'agit de démontrer non seulement que ces conditions suffisent pour imposer au potentiel quantique la forme (13.4), mais encore qu'elles sont alors automatiquement respectées.

Si nous voulons retrouver l'équation de Schrödinger dans l'espace de configuration, le potentiel quantique du système [vu le caractère inévitable de la définition (13.12)] doit certainement être de la forme (13.12). Mais, en annulant toutes les interactions classiques, ceci devient

$$(13.16) \quad Q_{\text{ext}} = -\frac{\hbar^2}{2} \left[\frac{1}{m_1} \frac{\nabla_1^2 f_1}{f_1} + \frac{1}{m_2} \frac{\nabla_2^2 f_2}{f_2} + \frac{1}{m_3} \frac{\nabla_3^2 f_3}{f_3} \right].$$

Ainsi, l'introduction dans l'espace physique de potentiels quantiques extérieurs de la forme (13.8), en plus de très bien s'accorder avec (13.16), est justement la seule façon de respecter la condition A ci-dessus.

Tous les termes de (13.7), à l'exception de ceux qui se trouvent dans l'expression (13.16), doivent être regardés comme appartenant au potentiel quantique d'interaction du système. Pour décomposer celui-ci nous allons supprimer les interactions $j \rightarrow k$ et $k \rightarrow l$ en envisageant les termes qui ne s'annulent pas (et ceci toujours d'accord avec notre cri-

tière fondamentale) comme essentiellement liés à l'interaction $j \rightarrow k$. Représentons cet ensemble de composantes par Q_{jk} , en supposant comme il est naturel que $Q_{kj} = Q_{jk}$; nous obtenons alors à partir de (13.16),

$$(13.17) \quad Q_{jk} = Q_{kj} = -\frac{\hbar^2}{2} \left[\frac{1}{m_j} \left(\frac{2(\nabla_j f_j \cdot \nabla_j f_k)}{f_j f_k} + \frac{\nabla_j^2 f_k}{f_k} \right) + \frac{1}{m_k} \left(\frac{2(\nabla_k f_j \cdot \nabla_k f_k)}{f_j f_k} + \frac{\nabla_k^2 f_j}{f_j} \right) \right]$$

et la concordance de cette expression avec (12.3) nous assure le respect de la condition B. D'autre part, comme celui de la condition C est déjà assuré nous savons, effectivement, que des potentiels quantiques de la forme (13.4) satisfont nos trois conditions fondamentales de raccord.

Si l'on avait, comme pour les potentiels classiques,

$$Q = Q_{11} + Q_{22} + Q_{33} + Q_{12} + Q_{13} + Q_{23}$$

ceci suffirait déjà pour déterminer la forme des potentiels quantiques parce qu'alors il suffirait d'écrire

$$Q_j = Q_{jj} + Q_{jk} + Q_{jl}.$$

Néanmoins la comparaison de (13.11) avec (13.8) et (13.17) nous montre qu'on a, en réalité,

$$(13.18) \quad Q = Q_{11} + Q_{22} + Q_{33} + Q_{12} + Q_{13} + Q_{23} + Q_{1(23)} + Q_{2(31)} + Q_{3(12)},$$

avec

$$(13.19) \quad Q_{j(kl)} = -\frac{\hbar^2}{m_j} \frac{(\nabla_j a_k \cdot \nabla_j a_l)}{a_k a_l}$$

et ceci entraîne qu'il faut admettre que les potentiels quantiques dans l'espace physique sont de la forme

$$(13.20) \quad Q_j = Q_{jj} + Q_{jk} + Q_{jl} + L_j.$$

Nous supposons, d'une façon générale, qu'on doit poser

$$(13.21) \quad L_j = a_j Q_{j(kl)} + b_j Q_{k(lj)} + c_j Q_{l(jk)},$$

où $a_1, a_2, \dots, c_3$ sont neuf constantes, pour l'instant arbitraires. C'est dans la mesure où nous serons capables de les déterminer, sans y introduire d'hypothèses supplémentaires, que nous pourrons dire que nos conditions générales suffisent réellement pour déterminer les potentiels Q_j .

Nous remarquons maintenant que chaque grandeur $Q_{j(kl)}$ s'annule, soit avec l'interaction $j \rightarrow k$, soit avec l'interaction $j \rightarrow l$ (ce qui explique leur existence hors des potentiels d'interaction mutuelle Q_{jm}); d'autre part nous voyons que les $Q_{j(kl)}$ sont symétriques en k et en l .

Or les potentiels L_j sont soumis à des conditions de symétrie assez sévères. Ainsi, il est évident qu'en ce qui concerne (par exemple) L_1 , les indices 2 et 3 doivent jouer des rôles symétriques. Si nous rapprochons cette remarque des propriétés des $Q_{j(kl)}$ nous sommes amenés à diminuer sensiblement le nombre des constantes indéterminées dans les équations (13.21) lesquelles deviennent

$$(13.22) \quad L_j = A_j Q_{j(kl)} + B_j (Q_{k(lj)} + Q_{l(jk)}).$$

En outre, il est indispensable que ces grandeurs présentent une certaine symétrie les unes par rapport aux autres ou, plus explicitement, que L_1 soit par rapport à l'indice 1 comme L_2 par rapport à l'indice 2, etc. Ceci implique qu'on doit poser

$$A_1 = A_2 = A_3 = A \quad \text{et} \quad B_1 = B_2 = B_3 = B$$

et les équations (13.22) s'écrivent

$$(13.23) \quad L_j = A Q_{j(kl)} + B (Q_{k(lj)} + Q_{l(jk)}).$$

Nous n'y trouvons plus que deux constantes arbitraires. Mais, du fait que les L_j ont certainement la nature de potentiels d'interaction, la comparaison de (13.18) avec (13.20) nous apporte, comme condition supplémentaire à satisfaire

$$2(Q_{1(23)} + Q_{2(31)} + Q_{3(12)}) = L_1 + L_2 + L_3,$$

d'après laquelle (13.23) devient

$$(13.24) \quad L_j = 2(1 - B) Q_{j(kl)} + B (Q_{k(lj)} + Q_{l(jk)}).$$

Pour démontrer qu'il n'y a qu'une seule valeur acceptable pour B considérons le cas particulier où il n'y a pas d'interaction entre deux des particules, disons l et k ; dans ces conditions, il est évident que $Q_{k(lj)} = Q_{l(jk)} = 0$ et (13.24) se réduit à

$$L_j = 2(1 - B) Q_{j(kl)}; \quad L_k = L_l = B Q_{j(kl)} \\ (j, k, l \text{ fixes}).$$

Mais, dans ce cas particulier, le principe de conservation de l'énergie exige que le potentiel quantique d'interaction de la particule j soit égal à la somme de ceux des particules k et l . Nous avons donc

$$Q_{jk} + Q_{jl} + 2(1 - B) Q_{j(kl)} = Q_{kj} + Q_{lj} + 2B Q_{j(kl)}$$

et étant donné qu'il est toujours $Q_{jk} = Q_{kj}$ et $Q_{jl} = Q_{lj}$, ceci nous impose de prendre $B = \frac{1}{2}$; l'équation (13.24) s'écrit, finalement,

$$(13.25) \quad L_j = Q_{j(kl)} + \frac{1}{2} (Q_{k(lj)} + Q_{l(jk)}).$$

Si nous substituons maintenant, dans l'expression (13.20), les diverses grandeurs Q_{jj} , Q_{jk} , Q_{jl} et L_j par leurs formulations explicites en fonction des amplitudes — et ceci selon les équations (13.8), (13.17) et (13.25) — nous retrouverons l'expression de Q_j postulée dans les équations (13.4). Nous avons ainsi non seulement expliqué les raisons qui nous avaient conduit à postuler cette forme pour les potentiels quantiques, mais encore démontré qu'elle est la seule formulation possible.

Nous nous dispenserons d'examiner le cas d'un système de quatre particules car les potentiels quantiques se compliquent assez rapidement sans que cette analyse nous apporte rien de nouveau; en réalité on ne rencontre aucune difficulté supplémentaire dans la généralisation du formalisme présenté ici au cas d'un système d'un nombre arbitraire de particules.

Mais il nous faut dire encore quelques mots sur la question de l'introduction de potentiels extérieurs par la méthode du passage à la limite dont il a déjà été question. Or, d'après ce qui vient d'être dit, il est évident que ce problème aura maintenant une solution satisfaisante. Ainsi, pour un système de deux particules, si l'une des masses tend vers l'infini la singularité correspondante deviendra immobile; le potentiel quantique d'interaction s'annulera et nous en tirerons la conclusion que l'autre particule va obéir à l'équation de Schrödinger habituelle comprenant un potentiel extérieur. De même, des représentations d'un système de trois particules, nous pourrions obtenir celles d'un système de deux particules sous l'action d'un potentiel extérieur. Il en résulte, en particulier, la démonstration de la validité du formalisme habituel dans l'espace de configuration, même en présence de potentiels extérieurs.

14. — Représentations dans l'espace physique et formalismes dans l'espace de configuration. — Avant d'aborder l'étude de la théorie statistique des systèmes nous voulons ajouter aux résultats des paragraphes précédents certaines remarques qui mettront en lumière quelques-unes de leurs plus importantes caractéristiques.

D'accord avec l'interprétation causale de la Mécanique ondulatoire nous avons pris comme représentation fondamentale une certaine description des systèmes dans l'espace physique, capable de nous donner non seulement les mouvements des points matériels, mais aussi l'évolution des ondes réelles, étendues, ν_i . A partir de cette formulation de base nous avons pu déduire les équations du mouvement des points matériels et il a été dès lors remarqué que, quoique mathématiquement équivalentes, ces deux descriptions n'avaient pas le même contenu physique. Car il est bien évident que les équations du mouvement des points matériels ne s'intéressent pas directement à la connaissance des ondes ν_i ; bien que le système d'équations de Jacobi généralisées dans l'espace physique nous fournisse, en réalité, une information complète sur ces ondes, ce fait est purement accidentel étant donné que, de ce point de vue, les ondes ν_i ne comptent que par leur action sur les mouvements des points matériels, c'est-à-dire en tant que sources du potentiel quantique.

Ces remarques prennent toute leur valeur une fois qu'à été obtenue la description des mouvements de l'ensemble des points matériels du système par une seule équation écrite dans l'espace de configuration (équation de Schrödinger). Quoique étant équivalent aux deux premiers, en ce qui concerne la dynamique des points matériels, ce dernier formalisme ne nous apporte aucune description explicite des ondes ν_i dont l'existence ne se manifeste qu'implicitement par la présence des potentiels quantiques.

Or, du point de vue de l'interprétation causale, les ondes étendues sont aussi réelles que les points matériels eux-mêmes. Nous pouvons donc conclure que, du point de vue de l'interprétation causale de la Mécanique ondulatoire, la représentation d'un système de particules par une équation de Schrödinger dans l'espace de configuration est une description appauvrie, la seule s'avérant vraiment complète étant celle de l'espace physique.

Il est d'ailleurs curieux de constater que, dans nos analyses précé-

dentes, s'est glissée une autre représentation des mouvements des points matériels dans l'espace de configuration. Si nous nous bornons au cas de deux particules cela correspond à prendre, pour traduire l'existence du potentiel quantique du système, deux fonctions $f_1(\vec{R}_1, \vec{R}_2, t)$ et $f_2(\vec{R}_1, \vec{R}_2, t)$ au lieu d'en prendre une seule $f(\vec{R}_1, \vec{R}_2, t)$ — qui est d'ailleurs, d'après (8.2), égale au produit des deux précédentes.

Dans ces conditions, pour définir complètement la représentation, nous devons avoir un ensemble de trois équations d'évolution : une équation de Jacobi généralisée et deux équations « auxiliaires », indispensables à la codétermination de la fonction principale de Hamilton S et des deux fonctions f_1 et f_2 à travers lesquelles s'exprime le potentiel quantique. Il est aisé de voir que ces trois équations, déduites de (6.1)-(6.4) et de (12.4), en prenant en considération le critère fondamental sur la nature du potentiel quantique, sont de la forme

$$(14.1) \quad \begin{cases} \frac{df_1}{dt} = \frac{1}{m_2} \nabla_2 f_1 \nabla_2 S + \frac{1}{m_1} \nabla_1 f_1 \nabla_1 S + \frac{1}{2m_1} f_1 \nabla_1^2 S, \\ \frac{df_2}{dt} = \frac{1}{m_1} \nabla_1 f_2 \nabla_1 S + \frac{1}{m_2} \nabla_2 f_2 \nabla_2 S + \frac{1}{2m_2} f_2 \nabla_2^2 S, \\ \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2m_1} (\nabla_1 S)^2 + \frac{1}{2m_2} (\nabla_2 S)^2 + V_{12} + Q(f_1, f_2), \end{cases}$$

c'est-à-dire ce sont les équations (9.2), (9.3) et (8.5) précédemment rencontrées ⁽¹²⁾.

Nous ne pousserons pas plus loin cette analyse, car il ne semble pas que les représentations de ce type soient guère intéressantes. La raison de cela vient du fait que le schéma déterministe que nous développons ici n'est, pratiquement, jamais applicable à cause de l'existence de fluctuations aléatoires agissant sur le système : on aurait affaire, effectivement, à une vraie théorie « à paramètres cachés ». Or si les conditions d'existence de la théorie statistique ultérieure sont assez libérales en ce qui concerne la forme des potentiels quantiques (comme nous le verrons au chapitre suivant), elles supposent que les équations « auxiliaires » sont des équations de continuité hydrodynamique, condition qui visiblement, n'est pas satisfaite par le système d'équations (14.1).

⁽¹²⁾ Dans l'équation (8.5) il y a lieu alors pour exprimer le potentiel quantique en termes de f_1 et de f_2 , selon (8.7).

CHAPITRE V.

THÉORIE STATISTIQUE DES SYSTÈMES DE PARTICULES
DE NATURE DIFFÉRENTE.

15. **L'hypothèse des fluctuations aléatoires.** — La théorie présentée jusqu'ici, soit pour la particule individuelle, soit pour les systèmes, est essentiellement déterministe dans le sens qu'une connaissance précise de l'état du système physique à l'instant initial permet, en principe, la prévision rigoureuse de son évolution ultérieure. Pour retrouver les énoncés probabilistes habituels, justifiés par l'expérience, et notamment l'interprétation de $|\Psi|^2 d\tau$ comme une probabilité de présence, la théorie de la double solution doit ajouter à ce schéma un autre postulat, auquel MM. D. Bohm et J.-P. Vigier [18] ont donné la forme d'une « hypothèse des fluctuations aléatoires ».

Avant de passer à l'examen du postulat de Bohm et Vigier (pour conclure, d'ailleurs, à son insuffisance dans le cas des systèmes) nous voulons insister sur le fait que les probabilités ainsi introduites ne se confondent pas avec celles qu'on rencontre dans le formalisme habituel où il s'agit de probabilités « pures », tout déterminisme sous-jacent étant exclu *a priori*. D'autre part, et quoique l'hypothèse des fluctuations aléatoires joue un rôle qui a des analogies avec celui du postulat ergodique (ou quasi-ergodique) en Mécanique statistique, il ne faut pas pousser trop loin cette identification. Car les probabilités rencontrées en théorie cinétique des gaz, par exemple, résultent de notre ignorance de l'état initial du système ainsi que de notre incapacité à résoudre complètement les équations du mouvement. Or l'introduction du hasard dans l'interprétation causale de la Mécanique ondulatoire, tout en provenant (comme toujours) de la trop grande complexité de la nature, correspond à l'impossibilité où nous nous trouvons de décrire en détail les interactions entre une partie restreinte de l'Univers et son environnement. Ainsi, dans notre cas, même pour une seule particule dont les conditions initiales seraient exactement connues, nous serions forcément conduits à ne pouvoir faire que des prévisions probabilistes.

Comme l'ont fait MM. Bohn et Vigier dans leur Mémoire original, nous allons exposer l'hypothèse des fluctuations aléatoires dans un langage hydrodynamique. Dans tout ce qui va suivre ces modèles hydrodynamiques seront, d'ailleurs, constamment utilisés; quoiqu'ils n'apportent rien de fondamentalement nouveau ils s'avèrent ici, par les visualisations qu'ils permettent et les analogies qu'ils suggèrent, un précieux instrument de travail.

Ainsi et conformément aux remarques précédentes, une particule sera représentée par un fluide réel, de densité $\rho = a^2(\vec{r}, t)$ et de vitesse $\vec{v} = -\frac{\nabla\varphi}{m}$ dans lequel se déplace une inhomogénéité qui suit les lignes de courant à la vitesse locale du fluide (théorème du guidage). La fonction $\psi = a \exp \frac{i\varphi}{\hbar}$ obéissant à l'équation de Schrödinger, nous avons

$$(15.1) \quad \frac{da^2}{dt} - \frac{1}{m} \nabla(a^2 \nabla\varphi) = 0,$$

$$(15.2) \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2m} (\nabla\varphi)^2 + V(\vec{r}, t) - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 a}{a}.$$

L'équation (15.1) signifie que le fluide est conservatif; (15.2) est l'équation d'Euler du potentiel des vitesses. Nous savons, du reste, qu'il est même possible, avec ce modèle, d'interpréter le potentiel quantique en termes de tensions internes du fluide [5]. Remarquons encore que nous pourrions avoir introduit ce modèle à partir des fonctions $f(\vec{R}_1, t)$ et $S(\vec{R}_1, t)$ précédemment définies mais, pour l'instant, cela ne servirait qu'à nous éloigner de la formulation primitive de Bohm et Vigier.

Le postulat des fluctuations aléatoires revient à supposer que ce fluide est soumis à des fluctuations qui changent sa densité de ρ en ρ' et sa vitesse de $\vec{v}$ en $\vec{v}'$, leur caractère aléatoire se traduisant par les quatre conditions suivantes :

a. ρ' et $\vec{v}'$ continuent d'obéir à une équation de conservation hydrodynamique;

b. l'inhomogénéité suit toujours les lignes de courant à la vitesse locale;

c. les valeurs moyennes de ρ' et de $\vec{v}'$ sont respectivement ρ et $\vec{v}$;

d. une inhomogénéité qui est dans un élément de volume du fluide a une probabilité non nulle d'arriver à n'importe quel autre élément de volume du fluide.

Nous ne discuterons pas la question de l'origine physique de ces fluctuations; pour cela on peut se rapporter au Mémoire original déjà cité. Mais nous insistons sur le fait que ces fluctuations doivent toujours être envisagées comme des phénomènes physiques réels, ayant une existence objective.

M. L. de Broglie nous a fait remarquer ⁽¹³⁾ que la structure de la théorie exige que les équations (15.1) et (15.2) restent toujours valables et que, dans ces conditions, l'existence de fluctuations doit certainement pouvoir se traduire par l'introduction de certains potentiels supplémentaires adéquats dans l'équation (15.2). Nous utiliserons ce point de vue pour conclure que la condition *a* de Bohm-Vigier est une simple conséquence du formalisme général, vu que l'équation de continuité (15.1) reste formellement inchangée en présence de potentiels perturbateurs. Il en est de même pour la condition *b* car son énoncé est précisément l'équivalent du théorème du guidage dont la démonstration [13] est indépendante de la forme des potentiels présents dans l'équation (15.2).

Étant ainsi débarrassés de ces hypothèses, nous pouvons traduire le postulat des fluctuations aléatoires dans un langage hydrodynamique en imposant seulement aux effets de ces fluctuations les deux conditions qui suivent :

a'. le mouvement moyen du fluide est son mouvement en absence de fluctuations;

b'. les inhomogénéités ont une probabilité non nulle de passer d'une ligne de courant (non perturbée) du fluide à n'importe quelle autre.

On sait que l'hypothèse des fluctuations aléatoires a permis à MM. Bohm et Vigier de démontrer, grâce surtout à la généralisation d'un des théorèmes fondamentaux de la théorie classique des chaînes de Markov [19], que la probabilité de présence de l'inhomogénéité dans l'élément de volume $d\tau$ est donnée par $a^2(\vec{r}, t) d\tau$, le vecteur $\vec{r}$ définissant ici un point intérieur au volume $d\tau$; dans le cas d'une seule par-

⁽¹³⁾ Communication privée.

ticule ils retrouvaient ainsi l'un des résultats les plus importants de l'interprétation purement probabiliste.

Néanmoins, à la fin de leur travail, ces auteurs ont ajouté une remarque qui nous semble discutable. En effet, ils prétendent que, vu l'indépendance de leur démonstration par rapport au nombre de dimensions de l'espace (et ce nombre n'y joue en vérité aucun rôle), nous sommes à même de généraliser leurs conclusions au cas de la représentation des systèmes dans l'espace de configuration. Nous ne pouvons pas souscrire à ce raisonnement, car le postulat des fluctuations aléatoires est une hypothèse sur l'existence et la nature de certains champs de forces réels; nous nous devons, donc, de les décrire dans l'espace physique. En outre, poser le même postulat dans l'espace physique ou dans l'espace de configuration revient, effectivement, à introduire deux ensembles d'hypothèses différentes sur les effets des potentiels aléatoires. Nous reprendrons plus loin cette question.

16. Un modèle hydrodynamique pour les systèmes. — Avant de généraliser aux systèmes de particules le théorème fondamental de Bohm-Vigier nous développerons un modèle hydrodynamique qui traduit convenablement la formulation analytique précédemment proposée. L'étude de ce modèle nous permettra, en particulier, de mettre en évidence certaines propriétés du schéma déterministe, indispensables à ce qui va suivre.

Pour décrire un système de deux particules de nature différente nous introduirons deux fluides sur chacun desquels se déplace une inhomogénéité astreinte à suivre les lignes de courant à la vitesse locale. L'interaction entre les deux particules (et, ici, le mot particule veut toujours dire : un fluide plus l'inhomogénéité correspondante) aura son origine dans l'existence de champs de forces classiques, créés par chacune des inhomogénéités et agissant sur l'évolution de l'autre fluide.

Si nous nous donnons et la forme initiale des fluides et les positions initiales des inhomogénéités, l'évolution du système sera représentée par l'évolution corrélée de deux certains fluides et les mouvements correspondants des respectives inhomogénéités. Mais si nous supposons que les positions initiales de celles-ci ne sont pas connues, alors la description de l'ensemble des deux particules correspondra à toute une

famille de couples corrélés de fluides, famille à deux paramètres vectoriels.

En effet, nous savons que sans introduire les positions initiales des inhomogénéités il nous est impossible de déterminer la dépendance des coordonnées $\vec{R}_1$ et $\vec{R}_2$ par rapport au temps et, en conséquence, d'obtenir la forme des fonctions

$$v_i = v_i(\vec{r}, t);$$

mais le formalisme nous dit aussi que, même dans ce cas, nous pouvons toujours calculer les fonctions

$$v_i = F_i(\vec{r}, \vec{R}_k(t), t),$$

ou encore, étant donné que la corrélation des mouvements des inhomogénéités entraîne la dépendance de la trajectoire de chacune (pour une certaine forme initiale des fluides) par rapport aux positions initiales de l'ensemble des deux,

$$v_i = F_i(\vec{r}, \vec{R}_{10}, \vec{R}_{20}, t)$$

(où $\vec{R}_{j0}$ est la position initiale de l'inhomogénéité j), c'est-à-dire deux familles de fonctions à deux paramètres vectoriels qui sont les couples de positions initiales possibles des deux inhomogénéités.

Au lieu de considérer deux familles de fluides nous regarderons cet ensemble comme une famille de couples de fluides, chaque couple correspondant à une certaine valeur des deux constantes $\vec{R}_{j0}$; et il est évident qu'il y a une correspondance biunivoque entre ces couples de fluides et les mouvements corrélés possibles des deux inhomogénéités. En particulier, il n'y a qu'une seule ligne de courant qui puisse effectivement être parcourue dans chacun de ces fluides. Bref, cette famille est l'ensemble représentatif, pour une certaine forme initiale des fluides, de toutes les évolutions corrélées possibles des deux inhomogénéités.

Il vaut la peine de mettre en parallèle cette situation avec le cas d'une seule particule où, même en absence de tout renseignement sur la position de l'inhomogénéité, le système physique était représentable par un certain fluide (bien déterminé, une fois connue sa forme initiale) sur lequel, par contre, toutes les lignes de courant étaient des trajectoires possibles de l'inhomogénéité. Nous verrons plus loin que c'est dans cette dissemblance que repose l'originalité de la théorie statistique des systèmes.

Comme auparavant nous traduirons ici l'existence de fluctuations aléatoires par l'introduction de certains potentiels extérieurs : nous admettrons donc qu'un potentiel supplémentaire agit, de temps en temps, sur chaque fluide. Étant donné que les deux fluides sont de nature différente et occupent des régions distinctes de l'espace (quoique plus ou moins superposables) nous n'introduirons, en principe, aucune corrélation entre les perturbations sur les deux fluides. Mais, comme dans le cas d'une seule particule, nous remarquerons que les fluides restent conservatifs même pendant les fluctuations, les inhomogénéités, d'accord avec le théorème du guidage, suivant toujours les lignes de courant du fluide (perturbé) correspondant.

D'autre part, la structure de notre formalisme entraîne obligatoirement la modification par n'importe quelle fluctuation de l'évolution de l'ensemble des deux particules car, même si la fluctuation n'agit que sur un des fluides, le changement correspondant va se faire sentir dans tout le système physique.

Enfin, il ne paraît plus possible d'admettre, comme dans le cas de la particule individuelle, que « la fluctuation fait passer l'inhomogénéité d'une ligne de courant à un autre ». En effet, nous savons déjà que, pour une position initiale quelconque des inhomogénéités, le système doit être représenté par toute une famille de couples de fluides et, pour chacun de ces couples, il n'y a qu'une paire de trajectoires corrélées qui peuvent être décrites. Ainsi, si nous envisageons un changement « virtuel » (instantané) des positions des inhomogénéités, ceci entraînera certainement la représentation du système par un autre des couples de fluides de la famille. Mais s'il s'agissait d'un changement réel, produit par un potentiel (aléatoire) supplémentaire, nous ne pourrions même plus, en général, traduire une telle modification par le passage à un autre couple de la famille de fluides parce que cela reviendrait à supposer que les effets d'un potentiel extérieur peuvent toujours être mis en correspondance avec une modification convenable des positions initiales des inhomogénéités.

Nous devons néanmoins remarquer que, même dans le cas d'une seule particule, l'idée que « la fluctuation fait passer l'inhomogénéité d'une ligne de courant à une autre » (ces lignes de courant se référant au fluide non perturbé) n'a de sens que dans la mesure où la première partie de l'hypothèse des fluctuations aléatoires nous assure que « le fluide lui-

même est, en moyenne, insensible à la présence des potentiels perturbateurs ». Une hypothèse correspondante dans le cas des systèmes se traduirait visiblement par la supposition que la famille de couples de fluides représentative du système n'est pas changée, en moyenne, par l'existence des potentiels aléatoires. Et admettre que les fluctuations ne provoquent qu'un changement du couple de la famille qui représente effectivement le système aurait alors (et alors seulement) tout le sens nécessaire.

17. L'hypothèse des fluctuations aléatoires généralisée. — De ce qui vient d'être dit on peut déjà prévoir que l'hypothèse des fluctuations aléatoires (telle que l'ont énoncée MM. Bohm et Vigier) ne peut pas être retenue pour les systèmes; nous allons donc commencer par démontrer que, sous une forme inchangée, elle deviendrait alors, dans ce nouveau contexte, contradictoire [20].

Nous savons réellement que cette hypothèse suppose explicitement que l'existence des fluctuations efface toute connaissance précise des positions des inhomogénéités (condition a' du paragraphe 15), ce qui implique qu'elles doivent modifier profondément et d'une façon imprévisible leurs trajectoires respectives. Mais notre formalisme exige que l'évolution des fluides dépende explicitement des mouvements des inhomogénéités. Il est donc contradictoire d'admettre simultanément (condition b') que l'évolution des fluides est insensible aux effets des fluctuations.

Ainsi il nous faut maintenant formuler une hypothèse des fluctuations aléatoires généralisée, utilisable dans le cas des systèmes et se réduisant au postulat de Bohm-Vigier dès que les interactions classiques s'annulent [21].

Dans le cas d'une seule particule, les hypothèses faites sur les effets des fluctuations reviennent à admettre, du point de vue des fluides, que nous ne pouvons plus connaître que leur évolution moyenne, laquelle coïncide, d'ailleurs, avec l'évolution rigoureuse en absence de fluctuations. De même, leurs effets sur l'inhomogénéité peuvent (aussi) s'exprimer en disant qu'elles ne nous laissent qu'une connaissance statistique qui conduit à prendre un ensemble de fluides identiques sur chacun desquels l'inhomogénéité a une de ses positions initiales possibles comme ensemble statistique représentatif du système.

Or, une fois que l'action des fluctuations aléatoires a été traduite dans ce langage, nos analyses précédentes suggèrent fortement la généralisation nécessaire. Nous savons que, hors d'une connaissance précise des positions des inhomogénéités, la description maximale du système est donnée par la famille de couples de fluides (avec les inhomogénéités correspondantes) dont il a déjà été question. Nous admettrons donc, dans le même esprit que dans le cas d'une seule particule, que c'est cette description maximale qui est insensible aux fluctuations; comme il a déjà été montré, cela représente une hypothèse physique sur les effets des potentiels perturbateurs et revient à postuler que leur nature est telle que :

A. Le mouvement moyen des fluides est décrit par la famille de couples de fluides qui les représenteraient en absence de perturbations.

Pour retrouver l'ensemble statistique correspondant à tous les couples de positions initiales possibles nous n'avons qu'à nous rappeler la correspondance biunivoque (déjà démontrée) entre cet ensemble et la famille de couples de fluides à deux paramètres vectoriels. Le postulat que « les inhomogénéités ont une probabilité non nulle de passer d'une ligne de courant (non perturbée) à n'importe quelle autre » se traduira donc, ici, en supposant que, à cause des fluctuations,

B. le système a une probabilité non nulle de passer d'un couple de fluides à n'importe quel autre de la même famille.

La possibilité d'assurer un support analytique indispensable à cette hypothèse des fluctuations aléatoires généralisée dépend, en dernière analyse, de notre capacité à déterminer les fonctions

$$v_j = v_j(\vec{r}, \vec{R}_k(t), t)$$

indépendamment de toute connaissance des trajectoires des inhomogénéités. Et nous en sommes bien assurés dès que les formes initiales des fluides sont connues.

Il ne nous reste qu'à démontrer que notre postulat se réduit à celui de Bohm-Vigier dès que les interactions s'annulent. Or, dans ce cas, chaque fluide deviendra indépendant de l'autre inhomogénéité, la famille de couples de fluides se décomposant alors en deux familles distinctes, une pour chaque particule. Dans chaque famille tous les éléments seront identiques du point de vue des fluides et ne se distingueront que par le

fait qu'ils attribuent des positions différentes à l'inhomogénéité respective; à chaque élément correspond une inhomogénéité se déplaçant sur une certaine ligne de courant, différente d'un élément à un autre. Dans ces conditions, si tous les membres d'une famille deviennent la représentation d'un même état bien déterminé du fluide correspondant, notre condition A se borne à exprimer que le mouvement moyen du fluide est son mouvement non perturbé (condition a' de Bohm-Vigier); de même, la condition B revient à supposer, en absence d'interactions, que les perturbations font passer l'inhomogénéité d'une ligne de courant à une autre (condition b' de Bohm-Vigier).

Enfin il est important de remarquer que de l'hypothèse des fluctuations aléatoires généralisée il résulte que, même en présence de potentiels perturbateurs aléatoires, les mouvements des points matériels restent toujours corrélés. En effet, et à l'exemple de ce qui arrivait déjà dans le cas d'une seule particule, l'action des fluctuations revient à laisser les fluides inchangés (en moyenne) et à modifier imprévisiblement les positions initiales. Or, étant donné qu'à chaque couple de positions initiales correspond un certain mouvement corrélé, nous voyons que les effets des fluctuations se traduisent par le passage (incontrôlable) d'une paire de mouvements corrélés à une autre. Cela va avoir d'intéressantes conséquences.

18. La signification statistique des amplitudes. — Après avoir généralisé aux systèmes l'hypothèse des fluctuations aléatoires de Bohm-Vigier nous devrions, logiquement, nous proposer de refaire leur démonstration dans ce cas plus général. Néanmoins il semble bien plus simple de montrer que, avec certaines précautions, leur raisonnement reste toujours applicable. Et, pour cela, nous commencerons par démontrer la proposition suivante :

Soit un système physique constitué par deux fluides avec les inhomogénéités correspondantes et supposons que les formes initiales de ces fluides nous sont données. Alors chaque particule peut ignorer l'existence de l'autre (tout en gardant la même évolution) dès que nous introduisons dans ses équations d'évolution un potentiel quantique et un potentiel classique très bien déterminés et dépendant d'un paramètre vectoriel fonction du temps.

Admettons, tout d'abord, qu'il n'y a pas de fluctuations. La connaissance des formes initiales des fluides nous permet de déterminer les fonctions

$$a_j = a_j(\vec{r}, \vec{R}_k(t), t).$$

Or le potentiel quantique d'interaction qui agit sur le fluide j est, selon (12.4), une fonction donnée de a_j et de a_k . D'autre part, les mouvements des inhomogénéités étant corrélés, nous pouvons certainement exprimer $\vec{R}_j(t)$ en fonction de $\vec{R}_k(t)$. Bref, le potentiel quantique supplémentaire est de la forme

$$Q_j = F_j(\vec{r}, \vec{R}_k(t), t)$$

F_j étant une fonction bien déterminée pour chaque forme initiale des deux fluides. Identiquement, le potentiel classique d'interaction, fonction des mêmes variables,

$$V_{jk} = V_{jk}(\vec{r}, \vec{R}_k(t), t)$$

est le potentiel classique supplémentaire à introduire dans les équations d'évolution du fluide j . Et il est bien évident que, dans ces conditions il revient au même de regarder les deux particules en interaction ou de supposer chacune des particules « isolée » et soumise à ces potentiels supplémentaires « extérieurs ». Remarquons encore qu'on retrouve ainsi séparément les deux moitiés de chaque couple de fluides de la famille représentative.

S'il y a des potentiels perturbateurs aléatoires, l'analyse précédente reste valable. Certes les mouvements des inhomogénéités deviennent alors inconnaisables mais, selon les idées de base de la théorie, le concept de trajectoire garde un sens physique précis et cela suffit pour que le raisonnement puisse être maintenu, étant donné qu'il ne réclame aucune détermination de ces paramètres. En outre, les hypothèses de définition du caractère aléatoire des fluctuations nous assurent (comme il a déjà été montré) la permanence de la corrélation des mouvements des inhomogénéités, nous permettant ainsi de continuer à supposer qu'en principe chaque trajectoire est exprimable en fonction de l'autre. Remarquons encore que, compte tenu de la dépendance du fluide par rapport au paramètre dont il vient d'être question, notre hypothèse des fluctuations aléatoires généralisée se réduit, de ce point de vue, au postulat de Bohm-Vigier.

Or, une fois assurés de ces résultats, nous pouvons profiter du fait que la démonstration du théorème fondamental de Bohm-Vigier, tout en exigeant explicitement que le fluide soit conservatif (ce qui se vérifie aussi dans notre cas) ne pose aucune restriction à la forme des potentiels classiques et quantiques qui se présentent dans l'équation d'Euler du mouvement; il est même tout à fait possible de la refaire en considérant ces grandeurs (et, donc, le fluide lui-même) comme fonctions d'un paramètre.

Nous arrivons ainsi à la conclusion que le théorème fondamental reste vrai dans le cas plus général que nous examinons ici. Cela peut s'exprimer en disant que, pour chacun des fluides, la grandeur

$$(18.1) \quad \alpha_j^2(\vec{r}, \vec{R}_k(t), t)$$

représente la densité de probabilité de présence de l'inhomogénéité correspondante au point $\vec{r}$ et à l'instant t .

Vu le caractère non linéaire de nos équations d'évolution, on pourrait peut-être avoir des doutes sur la cohérence de ce résultat. Il est néanmoins aisé de montrer [21] que cette non linéarité permet, tout de même, la normalisation et que la conservation des probabilités de présence est bien assurée.

Pour ce qui est de la conservation des probabilités elle est effectivement contenue dans l'existence d'équations de continuité hydrodynamique; nous pouvons, d'ailleurs, la retrouver d'une façon explicite si nous nous rappelons que l'équation d'évolution de chaque fluide est de la forme

$$(18.2) \quad \Delta v_j - \frac{2m_j}{\hbar^2} (V_{jk} + Q_{jk}) v_j = \frac{2m_j i}{\hbar} \frac{\partial v_j}{\partial t},$$

où Q_{jk} , le potentiel quantique d'interaction, est (d'après sa définition) une fonction réelle. Multiplions cette équation par v_j^* et faisons la différence avec l'équation complexe conjuguée de celle-ci; il nous vient

$$(18.3) \quad v_j^* \Delta v_j - v_j \Delta v_j^* = \frac{2m_j i}{\hbar} \frac{\partial}{\partial t} (v_j v_j^*)$$

ce qui est bien l'équation de conservation habituelle. Il s'ensuit, en particulier, qu'on doit attribuer au fluide fictif de probabilités une vitesse qui coïncide formellement avec celle qui nous est donnée par le théorème du guidage et, donc, que la vitesse du fluide fictif est partout

égale à la vitesse qu'aurait l'inhomogénéité dans les points correspondants. Cela signifie que l'état d'équilibre, une fois atteint, va se maintenir automatiquement.

Avec des équations non linéaires la normalisation sera, en général, impossible. Mais, dans notre cas, les termes non linéaires (qui appartiennent au potentiel quantique supplémentaire) sont des fonctions homogènes de a_j et de a_k et cette propriété suffit pour autoriser toujours la normalisation. Un examen de la forme des équations fondamentales montre que, si a_j et a_k en sont des solutions, il en est de même de $C_j a_j$ et de $C_k a_k$, C_j et C_k étant des constantes arbitraires.

Pour distinguer clairement les ondes v_j , qui ont une existence physique réelle, des ondes fictives qui ne représentent que les distributions des densités de présence de inhomogénéités, nous introduirons deux nouvelles fonctions

$$(18.4) \quad \psi_j = C_j v_j \quad (j = 1, 2)$$

obéissant aux mêmes équations d'évolution, Les v_j étant complètement déterminés, les constantes de normalisation C_j seront alors fixées par la condition habituelle

$$(18.5) \quad \int_{\tau} |\psi_j|^2 d\tau = 1$$

19. Probabilités de présence dans l'espace physique. — Nous arrivons maintenant aux résultats essentiels de cette théorie statistique des systèmes. Reprenons donc les modèles hydrodynamiques mais, au lieu de supposer que sur chaque fluide se déplace une inhomogénéité, imaginons qu'il y en a tout un nuage; nous pouvons nous représenter cela aisément en attribuant aux fluides une structure moléculaire (le nombre des molécules étant proportionnel en chaque point de la densité du fluide) et en admettant qu'un certain nombre de ces molécules sont des molécules marquées, leur densité représentant, bien entendu, la densité de probabilité de présence de l'inhomogénéité réelle.

S'il n'y avait pas de fluctuations toutes les molécules suivraient les tubes de courant où elles se trouvaient initialement; en particulier, une connaissance exacte de la position initiale de l'inhomogénéité réelle se traduirait alors en disant que toutes les molécules marquées resteraient dans un même petit tube-trajectoire. Mais la présence de potentiels aléatoires va déformer les tubes de courant et il résulte qu'au bout d'un

certain temps, étant donné que (selon l'hypothèse des fluctuations aléatoires) les tubes de courant perturbés auront sûrement traversé tous les tubes de courant non perturbés, les molécules marquées se seront dispersées par tout le fluide. Le théorème fondamental de Bohm-Vigier nous dit que cette dispersion n'est pas uniforme mais homogène; le nombre de molécules marquées qui se trouveront dans un certain élément de volume n'est pas proportionnel au volume lui-même, mais au nombre total de molécules que s'y trouvent. Image qui semble, du point de vue physique, très satisfaisante.

Pourtant il faut prendre en considérations qu'il s'agit ici d'un ensemble de deux fluides en interaction. Nous ne pouvons pas oublier que l'évolution de chaque fluide dépend du mouvement de l'autre inhomogénéité, ce qui se fait sentir dans la théorie statistique des systèmes par le fait que la densité de probabilité de présence de l'inhomogénéité j en $\vec{r}$ et à l'instant t nous est donnée, non par une fonction de r et de t , $f(r, t)$, mais par une fonction de $\vec{r}$, de $\vec{R}_k(t)$ et de t ,

$$(19.1) \quad a_j^2(\vec{r}, \vec{R}_k(t), t),$$

où $\vec{R}_k(t)$ est la position à cet instant de l'autre inhomogénéité. Ainsi, il est évident que la probabilité de présence de l'inhomogénéité j à l'instant t va dépendre de la position de l'inhomogénéité k au même instant; plus explicitement, (19.1) nous donne la densité de probabilité de présence de j en $\vec{r}$, k étant supposée être simultanément au point $\vec{R}_k$. Mais, bien entendu, pour cette inhomogénéité nous ne connaissons non plus que sa distribution de probabilités de présence. Alors nous devons commencer par demander quelle est la probabilité pour que, à l'instant t , l'inhomogénéité 1 soit en $d\tau_1$, et 2 soit en $d\tau_2$.

Avec notre modèle précédent la détermination de cette grandeur est très simple car on voit bien que nous n'avons qu'à multiplier le nombre de molécules marquées (du type 1) qui sont en $d\tau_1$, à l'instant t par le nombre de molécules marquées (du type 2) qui sont simultanément en $d\tau_2$ et diviser le résultat par le produit des nombres totaux de molécules marquées. Or nous avons déjà démontré que les nombres des molécules existantes en $d\tau_1$ et $d\tau_2$ sont respectivement proportionnels à $|\psi_1|^2 d\tau_1$ et $|\psi_2|^2 d\tau_2$; les nombres totaux de molécules sont constants

parce que les fluides sont conservatifs. Donc la probabilité demandée correspondra à

$$(19.2) \quad P = k |\psi_1|^2 |\psi_2|^2 d\tau_1 d\tau_2.$$

D'une façon plus explicite, si nous représentons par $\vec{R}_j$ un vecteur qui repère un point intérieur au petit volume $d\tau_j$, cela peut encore s'écrire

$$(19.3) \quad P = k |\psi_1(\vec{R}_1, \vec{R}_2, t)|^2 |\psi_2(\vec{R}_1, \vec{R}_2, t)|^2 d\tau_1 d\tau_2;$$

dès que les fonctions soient normalisées on devra poser $k = 1$. Et, évidemment, à partir de cette grandeur fondamentale plusieurs autres peuvent être calculées. Par exemple, si nous voulons la probabilité que l'inhomogénéité 1 soit dans le volume Ω , quelle que soit la position de 2, nous n'avons qu'à déterminer l'intégrale

$$(19.4) \quad \int_{\Omega} d\vec{R}_1 \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_1|^2 |\psi_2|^2 d\vec{R}_2.$$

Nous pouvons arriver à ces résultats d'une façon légèrement différente en nous appuyant sur la représentation d'un système par la famille de couples de fluides dont nous avons parlé plus haut. Car nous savons qu'à chaque couple correspondent (à un instant quelconque, dorénavant fixé) deux positions des inhomogénéités, bien déterminées en absence de fluctuations si les conditions initiales sont assez bien connues. Dans cette famille il y a tout un ensemble de couples de fluides correspondant à une certaine position de l'inhomogénéité k à l'instant t — disons $\vec{R}_k(t)$ — chacun de ces couples représentant une localisation bien définie de l'inhomogénéité j ($k \neq j$). Ceci n'est qu'une conséquence de la correspondance biunivoque entre la famille de couples de fluides et l'ensemble des trajectoires corrélées possibles des points matériels.

Si nous prenons maintenant en considération les effets des fluctuations, il est évident que la démonstration de Bohm-Vigier se traduira dans ce contexte en disant qu'à un état dans lequel k est au point $\vec{R}_k$ et j au point $\vec{r}$ ($\vec{r}$ quelconque mais fixe) on doit faire correspondre un « poids statistique » $C_j \alpha_j(\vec{r}, \vec{R}_k(t), t)$.

Supposons alors qu'il nous faut la probabilité pour que l'inhomogénéité 1 soit en $d\tau_1$ et l'inhomogénéité 2 soit en $d\tau_2$. Pour l'obtenir nous

n'avons qu'à prendre dans cet ensemble de fluides tous les couples qui satisfont à cette condition, chacun avec le poids statistique correspondant. Or, d'après ce qui vient d'être dit, il y en a $C_1 C_2 \alpha_1^2 \alpha_2^2 d\tau_1 d\tau_2$ ⁽¹⁴⁾. Nous retrouvons donc l'expression (19.3).

Remarquons encore que, d'après ces résultats, la définition de l'amplitude dans l'espace de configuration par la formule (8.2) correspond bien au théorème des probabilités composées. Cette question ⁽¹⁵⁾ peut, néanmoins, en soulever une autre; quelle est, dans ce formalisme, l'expression de la probabilité de présence de l'inhomogénéité j en $\vec{dr}$ *quand* l'inhomogénéité k est au point $\vec{R}_k$?

Tout d'abord et en accord avec les considérations précédentes, il faut écarter résolument toute interprétation de $a_j(r, \vec{R}_k(t), t) \vec{dr}$ comme une probabilité conditionnelle; quoique la localisation du point matériel nous soit inaccessible, l'inhomogénéité k est sûrement au point $\vec{R}_k$ (point inconnu) et pas ailleurs. Ensuite nous ne devons pas oublier que la probabilité introduite plus haut n'a pas un sens précis. On peut la regarder comme voulant dire: quelle est la probabilité pour que j soit en $\vec{dr}$ *quand on sait déjà* que k est en $\vec{R}_k$? Dans ces conditions, ceci équivaut à demander quelle est la probabilité pour que j soit en $\vec{dr}$ quelle que soit la position de k , car si nous avons connaissance du fait que k est en $\vec{R}_k$ cela doit être contenu dans la forme de la fonction d'onde qui ne pourra alors être non nulle sauf pour cette position de k . Mais on peut aussi prendre cette question comme signifiant: quelle est la probabilité pour que j soit en $\vec{dr}$ *si l'on suppose* que k est en $\vec{R}_k$? Sous cette forme le problème correspond à la détermination de la probabilité pour que simultanément j soit en $\vec{dr}$ et k soit en $\vec{R}_k$; nous retombons donc sur le cas général précédemment étudié.

20. Le formalisme dans l'espace de configuration. — Du point de vue de la théorie de la double solution, le formalisme dans l'espace de

⁽¹⁴⁾ Ce résultat a été obtenu indépendamment par M. L. de Broglie sous une forme proche de celle-ci (communication privée).

⁽¹⁵⁾ Elle s'est posée dès le commencement de ces recherches. Voir [11], Note 3.

configuration n'est rien de plus qu'une transcription mathématique de certaines propriétés de la représentation fondamentale, celle de l'espace physique. Or, pour ce qui est des résultats de la théorie statistique des systèmes, cette transcription est immédiate.

En effet, nous avons démontré que la probabilité pour que, à l'instant t , l'inhomogénéité 1 soit en $d\vec{R}_1$ et l'inhomogénéité 2 soit en $d\vec{R}_2$ est donnée, dans l'espace physique, par l'expression (19.2)

$$P = k f_1^2(\vec{R}_1, \vec{R}_2, t) f_2^2(\vec{R}_1, \vec{R}_2, t) d\vec{R}_1 d\vec{R}_2.$$

Mais, selon l'équation de définition de f (8.2), et dès que nous y introduisons l'élément de volume dans l'espace de configuration

$$d\vec{R} = d\vec{R}_1 d\vec{R}_2,$$

cela peut aussi s'écrire sous la forme

$$(20.1) \quad P = k f^2 d\vec{R};$$

si nous définissons une onde ψ , dans l'espace de configuration, par l'équation

$$(20.2) \quad \psi = k \Phi$$

[Φ étant la fonction dont la phase est la fonction principale de Hamilton du système et qui a été définie comme étant une solution de (8.4)], l'expression (20.1) devient

$$(20.3) \quad P = |\psi|^2 d\vec{R},$$

ce qui est bien d'accord avec le postulat fondamental de l'interprétation habituelle.

Nous voulons reprendre une fois encore le langage hydrodynamique pour en tirer une propriété intéressante. Dans l'espace physique un système de deux particules est représenté par une famille de couples de fluides, corrélés, la détermination de celui qui décrit effectivement le système étant subordonnée (en absence de fluctuations) aux positions initiales des inhomogénéités. Or nous voyons que le fluide fictif dans l'espace de configuration est défini d'une façon telle qu'il est le même pour tous les couples de fluides dans l'espace physique. Ainsi, dans la première représentation, nous n'avons un couple de fluides bien déterminé qu'en connaissant les positions initiales des inhomogénéités; en

revanche, le choix d'un certain couple nous fixe la paire de lignes de courant parcourues. Dans l'espace de configuration le fluide fictif est toujours le même et la position initiale des points matériels ne sert qu'à choisir une certaine ligne de courant comme trajectoire.

Dans ces conditions, l'hypothèse des fluctuations aléatoires généralisée, transcrite dans le langage de l'espace de configuration, revient à supposer que le fluide fictif est, « en moyenne », insensible aux potentiels perturbateurs et que chaque tube-trajectoire perturbé doit, au cours du temps, traverser tous les tubes-trajectoires non perturbés. Nous retrouvons donc, à six dimensions, les mêmes hypothèses que pour une seule particule dans l'espace physique.

C'est ceci qui justifie *a posteriori* la remarque de MM. Bohm et Vigier dont nous avons parlé à la fin du paragraphe 15. Évidemment leur conclusion était correcte, comme il le fallait. Mais il n'en était ainsi que du fait que l'hypothèse des fluctuations aléatoires, tout en acquérant un autre contenu physique, reste néanmoins formellement inchangée quand on passe du cas d'une seule particule à la description d'un système dans le formalisme de l'espace de configuration.

APPENDICE.

SUR UN MÉMOIRE DE M. DARWIN TENDANT A PROUVER L'IMPOSSIBILITÉ DE REPRÉSENTER LES SYSTÈMES HORS DE L'ESPACE DE CONFIGURATION.

Au cours des premières années de la Mécanique ondulatoire, et depuis que Bohr en a proposé l'interprétation par son fameux principe de la complémentarité, certains théoriciens se sont attachés à montrer que ce point de vue purement probabiliste était le seul possible. Cet état d'esprit a, par exemple, conduit M. von Neumann [23] à une célèbre démonstration de l'impossibilité de réinterprétation du formalisme habituel au moyen de n'importe quelle théorie « à paramètres cachés », démonstration dont le caractère fallacieux a été récemment mis en évidence par M. L. de Broglie [4].

Du même ordre d'idées relève un travail de M. Darwin [24], présenté à la même époque, se proposant de décourager à l'avance toute tentative destinée à bâtir une Mécanique ondulatoire des systèmes hors de l'espace de configuration. Il nous a donc paru naturel de présenter ici une analyse critique du Mémoire de M. Darwin en mettant en évidence les bonnes raisons qui nous conduisent à refuser ses conclusions. En outre, cet examen détaillé d'un problème particulier nous apportera un exemple concret de la réinterprétation causale de la réussite du formalisme dans l'espace de configuration. Dans tout ce qui suit nous pourrons, d'ailleurs, profiter largement des remarques de M. de Broglie sur cette question ⁽¹⁶⁾.

Tout d'abord décrivons l'expérience de M. Darwin en utilisant les concepts de la Physique classique.

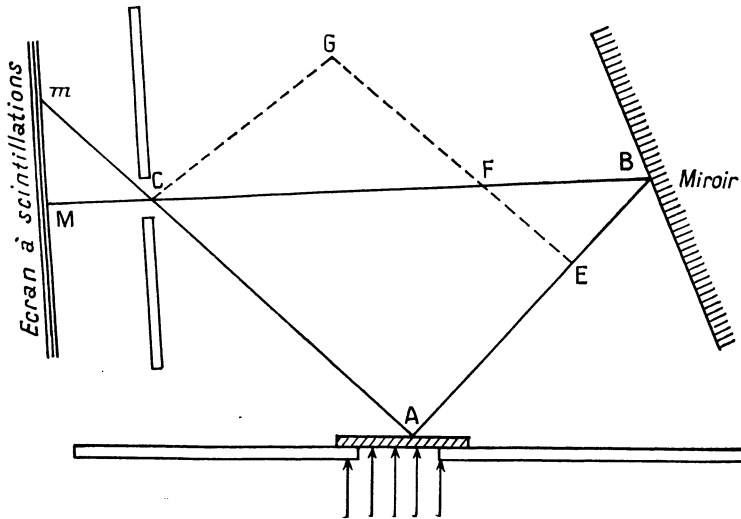
Un flux monocinétique de particules de masse M et de vitesse V tombe normalement sur un film homogène (dont les atomes ont une masse m) placé sur une ouverture d'un écran plan. En raison des chocs, des atomes du film vont être éjectés vers le haut tandis que la trajectoire rectiligne des particules incidentes sera plus ou moins déviée. Mais, étant donnés les théorèmes de conservation de l'énergie et de l'impulsion, il est évident que les mouvements de chaque paire de points matériels seront étroitement corrélés : la connaissance de la direction $\overline{AB}$ du mouvement de M entraîne la détermination, soit des modules des vitesses des deux particules, soit de la direction $\overline{AC}$ du mouvement de m . M. Darwin peut parler d'une « paire cohérente » de particules.

Supposons alors qu'un miroir est utilisé pour réfléchir les particules M de façon que leur trajectoire va rencontrer celle des atomes M au point C , où est placé un autre écran percé d'un trou. Sur un dispositif d'observation (par exemple : un écran à scintillations) placé derrière l'écran troué, les atomes M , après avoir parcouru la trajectoire $\overline{ABC}$ arriveront (en général) au point M , tandis que les atomes m tomberont sur le point m , dans le prolongement de $\overline{AC}$.

Admettons néanmoins qu'au départ du point A la vitesse des particules M soit supérieure à celle des atomes m . Il est aisé de constater

⁽¹⁶⁾ Communication privée.

que, dans ce cas particulier, on peut toujours trouver une position du miroir et du deuxième écran de façon à provoquer une deuxième collision entre les particules M et m , cette fois au point C . Et, alors, ceci donnera lieu à l'observation d'un phénomène spécial sur l'écran à scintillations; des particules seront détectées ailleurs qu'aux points M et m .



Pour décrire le même phénomène avec des ondes se propageant dans l'espace physique, M . Darwin associé à l'atome m et à la particule M des ondes sphériques centrées au point A . On est ainsi amené à interpréter un événement particulier ayant lieu au point C , pour une certaine position du miroir, en des termes d'interférence de l'onde de m , arrivée directement de A , avec celle de M préalablement réfléchi par le miroir.

Cette interprétation s'avère néanmoins impossible, car elle supposerait une différence de phase privilégiée entre les deux ondes à leur point de rencontre C . Or il est possible d'obtenir, par l'introduction de deux miroirs en E et F , que l'onde attachée à M arrive à C avec la même phase que précédemment, ayant effectué un parcours d'une longueur différente. Il suffit que cette différence des trajets $\overline{EBF} - \overline{EF}$ soit égale à un multiple entier de la longueur d'onde. Les conditions d'interférence restant ainsi inchangées le même phénomène serait à prévoir, conclusion qui n'est certainement pas exacte puisque les deux

atomes n'arriveraient plus simultanément au point C. De même, si les miroirs étaient placés aux points E et G, de façon que le parcours $\overline{AEGC}$ soit égal au parcours $\overline{ABC}$, les possibilités de choc au point C resteraient naturellement inchangées mais les conditions d'interférence ne seraient plus les mêmes vu que l'angle de croisement des ondes est différent de celui de l'expérience originale.

Nous laisserons de côté ce qui concerne les intensités, car cela semble largement suffisant pour autoriser M. Darwin à conclure que la représentation ondulatoire dans l'espace physique est en désaccord avec les résultats expérimentaux. Nous ne reprendrons pas non plus les calculs de M. Darwin se rapportant à la représentation du système par une seule onde dans l'espace de configuration car ils n'apportent rien d'essentiel. Nous nous bornons à rappeler qu'ils conduisent à une prévision correcte des faits expérimentaux.

L'analyse de cette expérience semble donc montrer qu'il n'est pas possible de bâtir un formalisme satisfaisant pour la Mécanique ondulatoire des systèmes hors de l'espace de configuration.

Il nous semble que les raisonnements de M. Darwin sont logiquement irréprochables. Si nous ne pouvons pas souscrire à ses conclusions, c'est parce qu'elles s'appuient sur une hypothèse qui n'est pas physiquement correcte. Car M. Darwin n'a pas tenu compte du fait que l'expérience impose la représentation d'une particule par un train d'ondes qui, à l'échelle macroscopique, est pratiquement ponctuel.

Rappelons, tout d'abord, quelques données expérimentales. Soit un électron de V eV d'énergie. Une application directe de la formule fondamentale de De Broglie nous dit que la longueur d'onde de l'onde correspondante est donnée en (négligeant les corrections relativistes) par l'expression suivante :

$$\lambda = \frac{12,25}{\sqrt{V}} \cdot 10^{-8} \text{ cm.}$$

Des difficultés expérimentales (liées, en particulier, aux problèmes d'obtention des ultra-vides) empêchent d'obtenir des faisceaux monochromatiques d'électrons d'énergie inférieure à environ 50 eV. On en déduit que λ ne peut guère dépasser 10^{-8} cm pour les électrons. Et nous obtenons des seuils encore plus bas pour les autres particules (protons ou atomes, par exemple) qui sont nettement plus lourdes.

D'autre part, des dispositifs analogues au biprisme de Fresnel de l'Optique classique ont permis à MM. Möllenstedt et Düker [25] et à MM. Faget et Fert [26] la détermination de la longueur des trains d'ondes électroniques. Si nous nous rapportons au Mémoire de MM. Möllenstedt et Düker nous y trouvons que la longueur des trains d'ondes d'une énergie de 25 000 eV est de l'ordre de $1.5 \cdot 10^{-4}$ cm. Donc les trains d'ondes doivent contenir environ $2 \cdot 10^5$ longueurs d'onde. Et nous arrivons ainsi à la conclusion que les dimensions d'un train d'ondes électronique doivent être inférieures à $10^6 \cdot 10^{-8} = 10^{-2}$ cm, soit un dixième de millimètre. A l'échelle microscopique ils sont bien toujours quasi ponctuels.

Reprenons maintenant le raisonnement de M. Darwin. Il est exact que l'explication des résultats de l'expérience exige que les deux corpuscules arrivent simultanément au point où la deuxième collision doit avoir lieu : c'est ce que nous appellerons avec M. de Broglie la « condition de rencontre ». Et l'on se rend compte aisément qu'en employant des ondes sphériques homogènes une telle condition ne pourra jamais être satisfaite (comme M. Darwin l'a justement remarqué). Mais il n'en est pas de même en prenant en considération l'existence de petits trains d'ondes pratiquement ponctuels. Alors la description ondulatoire dans le cadre de l'espace physique va visiblement s'accorder avec la description corpusculaire classique, contrairement aux conclusions originales de Darwin.

L'interprétation causale de la Mécanique ondulatoire par la théorie de la double solution nous place dans une situation beaucoup plus favorable à l'explication de l'expérience de Darwin que celle correspondant à l'interprétation habituelle. Car ce nouveau point de vue prend en considération l'existence d'une inhomogénéité au sein de l'onde, en introduisant ainsi automatiquement une certaine sorte de localisation.

L'interaction entre les particules est décrite, en termes classiques, comme se réduisant à des chocs. Nous traduirons cela au moyen d'un potentiel d'interaction qui n'a des valeurs non nulles que pour des petites distances. En termes des équations du mouvement des inhomogénéités [voir, par exemple, les équations (7.7) et (7.9)] cela correspond à dire que le potentiel d'interaction ne se révèle agissant que si les inhomogénéités sont suffisamment rapprochées. Nous retrouvons donc, pratiquement, la « condition de rencontre » dont il a été question.

Du point de vue de l'interprétation causale nous sommes ainsi en mesure de retrouver les résultats expérimentaux même avec des ondes sphériques ou des trains d'ondes de grandes dimensions.

Ce qui est le plus frappant, c'est l'explication donnée par l'interprétation causale de la réussite des calculs de M. Darwin qui utilisent une onde homogène étendue se propageant dans l'espace de configuration. Effectivement nous sommes arrivés à la conclusion que le formalisme de l'espace de configuration n'était qu'une description des mouvements possibles des inhomogénéités; donc la localisation spaciales des particules y est implicitement rétablie. En particulier, nous remarquons le fait que le potentiel classique d'interaction qui s'y introduit $V(\vec{R}_1 - \vec{R}_2)$ est une fonction de la distance mutuelle des inhomogénéités et suppose donc la localisation. Et il est sûr que la possibilité de retrouver la « condition de rencontre » offerte par cette méthode ne résulte que du fait que le potentiel classique d'interaction n'est agissant que pour les petites valeurs du vecteur $\vec{R}_1 - \vec{R}_2$.

Le rétablissement de la localisation des particules (au sujet de laquelle M. L. de Broglie a beaucoup insisté dans un récent article [27]) semble ainsi devoir nous apporter une meilleure compréhension de la Mécanique ondulatoire des systèmes. Il nous semble que, du moins, il est à la base de l'explication du succès de l'équation de Schrödinger dans l'espace de configuration.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] L. DE BROGLIE, *Une tentative d'interprétation causale et non linéaire de la Mécanique ondulatoire (la théorie de la double solution)*, Gauthier-Villars, Paris, 1956.
- [2] J.-P. VIGIER, *Structure des micro-objets dans l'interprétation causale de la théorie des quanta (Thèse)*, Gauthier-Villars, Paris, 1956.
- [3] H. FREISTADT, *Suppl. Nuovo Cimento*, t. 5, 1957, p. 1.
- [4] L. DE BROGLIE, *La théorie de la mesure en Mécanique ondulatoire (interprétation usuelle et interprétation causale)*, Gauthier-Villars, Paris, 1957.
- [5] T. TAKABAYASI, *Prog. Theor. Phys.*, t. 8, 1952, p. 143.
- [6] L. DE BROGLIE, *C. R. Acad. Sc.*, t. 235, 1952, p. 1345.
- [7] J.-P. VIGIER, *C. R. Acad. Sc.*, t. 235, 1952, p. 1372.
- [8] L. DE BROGLIE, *C. R. Acad. Sc.*, t. 239, 1954, p. 521 et 565.

- [9] L. DE BROGLIE, *La Mécanique ondulatoire des systèmes de corpuscules*, Gauthier-Villars, Paris, 1950.
 - [10] H. GOLDSTEIN, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, New-York, 1950.
 - [11] L. DE BROGLIE et J. ANDRADE E SILVA, *C. R. Acad. Sc.*, t. 244, 1957, p. 528.
 - [12] E. L. INCE, *Ordinary Differential Equations*, Dover, New-York, 1956.
 - [13] L. DE BROGLIE, *C. R. Acad. Sc.*, t. 239, 1954, p. 737.
 - [14] H. LAMB, *Hydrodynamics*, Cambridge University Press, 1932.
 - [15] J. ANDRADE E SILVA, *C. R. Acad. Sc.*, t. 245, 1957, p. 1893.
 - [16] J. ANDRADE E SILVA, *C. R. Acad. Sc.*, t. 245, 1957, p. 2018.
 - [17] J. ANDRADE E SILVA, *C. R. Acad. Sc.*, t. 246, 1958, p. 391.
 - [18] D. BOHM et J.-P. VIGIER, *Phys. Rev.*, t. 96, 1954, p. 208.
 - [19] W. FELLER, *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, John Wiley, New-York, 1957.
 - [20] J. ANDRADE E SILVA, *C. R. Acad. Sc.*, t. 248, 1959, p. 1785.
 - [21] J. ANDRADE E SILVA, *C. R. Acad. Sc.*, t. 248, 1959, p. 1947.
 - [22] J. ANDRADE E SILVA, *C. R. Acad. Sc.*, t. 248, 1959, p. 2291.
 - [23] J. VON NEUMANN, *Les fondements mathématiques de la théorie des quanta*, Alcan, Paris, 1946 ((trad. PROCA).
 - [24] C. G. DARWIN, *Proc. Roy. Soc. (London)*, A, t. 124, 1929, p. 375.
 - [25] G. MÖLLENSTEDT et H. DÜKER, *Z. Physik.*, t. 145, 1956, p. 377.
 - [26] J. FAGET et C. FERT, *C. R. Acad. Sc.*, t. 243, 1956, p. 2028, et t. 244, 1957, p. 2368; *Cahiers de Physique*, n° 83, 1957, p. 285.
 - [27] L. de BROGLIE, *J. Phys. Rad.*, t. 20, 1959, p. 963.
-