Annales de l'I. H. P.

PIERRE HILLION
JEAN-PIERRE VIGIER

Le Théorème C, P, T dans la théorie quantique des mouvements internes de rotateurs relativistes

Annales de l'I. H. P., tome 16, nº 3 (1959), p. 217-234
<http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1959__16_3_217_0>

Le Théorème C, P, T
dans la
théorie quantique des mouvements internes de rotateurs relativistes

par

Pierre HILLION et Jean-Pierre VIGIER
Institut Henri Poincaré (Paris).

PREMIÈRE PARTIE.
APPROXIMATION NON RELATIVISTE

1. **Généralités.** — Nous nous proposons d'examiner dans cet article comment se comporte la théorie des rotateurs relativistes sous les opérations parité P (renversement des axes du genre espace), T renversement des axes du genre temps, ce qui amènera à la définition de l'opération conjuguée de charge et permettra de voir si le théorème C, P, T est vérifié.

Nous commencerons par l'approximation non relativiste où il est possible de donner un support géométrique simple à chacune des opérations C, P, T.

Rappelons rapidement les éléments nécessaires à cette étude : Dans la théorie que nous avons développée ([1]) des rotateurs relativistes ceux-ci sont supposés douées d'une structure réductible à deux points (théorie bilocale) et deux tétrapodes centrés respectivement en chacun de ces points.

L'approximation non relativiste de cette théorie conduit à l'étude du mouvement d'un trièdre trirectangle par rapport à un autre trièdre trirectangle au moyen des trois angles d'Euler habituels θ, φ, ψ, et

---

([1]) D. Bohm, P. Hillion, T. Takabayasi et J.-P. Vigier (sous presse aux *Prog. of Th. Physics*). Relativistic rotators and bilocal theory.

à l'aide d'un formalisme canonique utilisant l'hamiltonien H et les moments cinétiques J_k, J'_k, J^2. La quantification du mouvement transforme ces grandeurs géométriques en opérateurs et à cause des propriétés de commutabilité de J_z, J'_z, J^2, il est possible de rechercher les fonctions propres simultanées de ces trois opérateurs. On trouve

$$Y_l^{m,m'}(\theta, \varphi, \psi) = e^{j(m\varphi+m'\psi)}\,\Theta_l^{m,m'}(\theta),$$

$$\Theta_l^{m,m'}(\theta) = \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{-m+m'}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{-m-m'} \frac{d^{l-m}}{d\left(\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^{l-m}} \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{2l-2m'}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2l+2m'};$$

où l, m, m' sont des nombres entiers ou demi-entiers, $l \geqq 0$.

Les fonctions $Y_l^{m,m'}(\theta, \varphi, \psi)$ pour l fixé, constituent un espace vectoriel à $(2l+1)$ dimensions. Si l'on considère les sous-espaces vectoriels correspondant chacun à une valeur de m' fixé, les éléments de ces sous-espaces vectoriels se transforment entre eux sous le groupe des rotations suivant la représentations $\mathcal{D}(l)$ de ce groupe.

On est alors conduit à l'idée d'appeler particule les fonctions $Y_l^{m,m'}(\theta, \varphi, \psi)$ caractérisant un certain état interne (à l'approximation non relativiste), tous les états d'une même famille correspondant aux mêmes valeurs de l et de m'. Il est déjà connu que pour l entier on aura des familles de bosons et pour l demi-entier des familles de fermions. On peut alors se demander si (l, m') ne caractériseraient pas les particules d'une famille et $(l, -m')$ les antiparticules de cette famille. C'est ce problème que nous nous proposons précisément de traiter ici.

Pour donner un exemple, considérons le cas $l = \frac{1}{2}$; m' pouvant prendre les deux valeurs $\pm\frac{1}{2}$ on a deux sous-espaces vectoriels :

$$l = \frac{1}{2}, \qquad m' = \frac{1}{2} \qquad \begin{pmatrix} Y_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\theta, \varphi, \psi) = \cos\frac{\theta}{2}\, e^{\frac{j}{2}(\varphi+\psi)} \\ Y_{\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\theta, \varphi, \psi) = \sin\frac{\theta}{2}\, e^{-\frac{j}{2}(\varphi-\psi)} \end{pmatrix},$$

$$l = \frac{1}{2}, \qquad m' = -\frac{1}{2} \qquad \begin{pmatrix} Y_{\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(\theta, \varphi, \psi) = \cos\frac{\theta}{2}\, e^{-\frac{j}{2}(\varphi+\psi)} \\ Y_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(\theta, \varphi, \psi) = -\sin\frac{\theta}{2}\, e^{\frac{j}{2}(\varphi-\psi)} \end{pmatrix}.$$

Chaque élément de l'un de ces sous-espaces se transforme en l'autre élément du même sous-espace suivant la représentation $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}\right)$ du groupe des rotations à trois dimensions.

On s'aperçoit que chacun des sous-espaces précédents est le spineur satisfaisant à l'équation de Pauli exprimé en angles d'Euler (²). Alors si

$$\Psi^r = \begin{pmatrix} Y_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\theta, \varphi, \psi) \\ Y_{\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\theta, \varphi, \psi) \end{pmatrix}$$

est le spineur correspondant à la particule,
est-ce que

$$\Phi = \begin{pmatrix} Y_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(\theta, \varphi, \psi) \\ Y_{\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(\theta, \varphi, \psi) \end{pmatrix}$$

n'est pas le spineur correspondant à l'antiparticule?

2. **Les opérations P, T, C.** — Considérons deux trièdres trirectangles x, O, y, z ; x', O, y', z', les angles d'Euler sont déterminés par les relations

$$\cos\theta = \overrightarrow{Oz}.\overrightarrow{Oz'}, \qquad \cos\varphi = \overrightarrow{OV}.\overrightarrow{Ox}, \qquad \cos\psi = \overrightarrow{OV'}.\overrightarrow{Ox'}$$

OU est la ligne nodale intersection des plans xOy et $x'Oy'$. OV la perpendiculaire à OU dans xOy; OV' la perpendiculaire à OU dans $x'Oy'$.

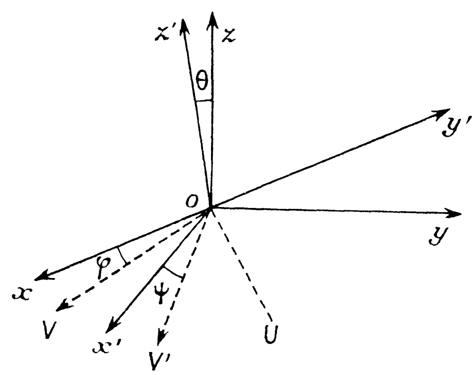

Fig. 1.

Si l'on désigne par a_k^r l'ensemble des trois axes Ox, Oy, Oz et si l'on désigne par b_k^r l'ensemble des trois axes Ox', Oy', Oz',

$$k,\ r = 1,\ 2,\ 3,$$

(²) D. Bohm, J. Tiomno et R. Schiller, *Nuovo Cimento*, suppl. nº 1, 1955.

on a les relations

$$b_k^r = \Lambda_s^r a_k^s,$$

où Λ_r^s est la matrice des cosinus directeurs. Explicitement elle s'écrit

$$\Lambda_r^s = \begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\theta\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi & \sin\varphi\cos\theta\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi & -\sin\theta\cos\psi \\ -\cos\varphi\cos\theta\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi & -\sin\varphi\cos\theta\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi & \sin\theta\sin\psi \\ \cos\varphi\sin\theta & \sin\varphi\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}.$$

Cherchons d'abord comment représenter les opérations P et T à l'aide des angles d'Euler.

L'opération P est la transformation $z \to -z$. Géométriquement, c'est la figure déduite de la figure initiale comme son image dans un miroir supposé situé dans le plan xOy. On trouve donc immédiatement

$$\mathrm{P} \left| \begin{array}{l} \theta \to -\theta, \\ \varphi \to \varphi, \\ \psi \to \psi. \end{array} \right.$$

On peut obtenir ce résultat analytiquement en remarquant qu'en l'appliquant aux a_k^r et b_k^r l'opération P peut être représentée par la matrice

$$\mathrm{P} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \mathrm{P}^{-1};$$

dans ces conditions,

$$(\Lambda_r^s)' \to \mathrm{P}^{-1}\Lambda_r^s \mathrm{P}$$

et il est facile de voir que

$$(\Lambda_r^s)' = \Lambda_r^s(-\theta).$$

Pour l'opération T définie comme $t \to -t$ on sait [3] que le formalisme canonique est invariant sous les transformations simultanées :

$$t \to -t,$$
$$p_k \to -p_k,$$

où les p_k sont les moments canoniquement conjugués des variables q_k.

Donc ici si l'on considère les moments p_φ, p_ψ, p_θ canoniquement conjugués aux angles φ, ψ, θ, il faudra effectuer la transformation

$$p_\varphi \to -p_\varphi,$$
$$p_\psi \to -p_\psi,$$
$$p_\theta \to -p_\theta.$$

[3] *Cf.*, par exemple, A. Mercier, *Analytical and canonical formalism in Physics*, North Holland Publ.

Comme p_φ et p_ψ sont des fonctions linéaires de $\dot\varphi$ et de $\dot\psi$ de la forme $A \sin^2\theta\, \dot\varphi$ et $B \sin^2\theta\, \dot\psi$ cette transformation impose de changer φ en $-\varphi$, ψ en $-\psi$; de la même façon, $p_\theta = C\dot\theta$, ce qui amène à changer θ en $-\theta$, d'où :

$$T \left| \begin{array}{l} \theta \to -\theta, \\ \varphi \to -\varphi, \\ \psi \to -\psi. \end{array} \right.$$

Si l'on effectue simultanément les deux opérations P et T, on obtiendra l'opération :

$$PT \left| \begin{array}{l} \theta \to \theta, \\ \varphi \to -\varphi, \\ \psi \to -\psi. \end{array} \right.$$

Ceci définit une opération C telle que C, P, T soit l'identité. Géométriquement, l'opération C représente une rotation en sens inverse respectivement autour de Oz et Oz'.

Cette opération C peut être considérée comme l'opération conjuguée de charge.

On a donc les trois transformations :

$$P \left| \begin{array}{l} \theta \to -\theta, \\ \varphi \to \varphi, \\ \psi \to \psi; \end{array} \right. \qquad T \left| \begin{array}{l} \theta \to -\theta, \\ \varphi \to -\varphi, \\ \psi \to -\psi; \end{array} \right. \qquad C \left| \begin{array}{l} \theta \to \theta, \\ \varphi \to -\varphi, \\ \psi \to -\psi. \end{array} \right.$$

3. **Comportement des fonctions d'onde sous les opérations C, P, T.** — Comme on connaît la transformation à appliquer aux angles d'Euler, il suffit de porter le résultat directement dans les fonctions d'onde. Il vient :

$$\text{(1)} \qquad P\, Y_l^{m,m'}(\theta, \varphi, \psi) = Y_l^{m,m'}(-\theta, \varphi, \psi),$$

$$\text{(2)} \qquad T\, Y_l^{m,m'}(\theta, \varphi, \psi) = Y_l^{m,m'}(-\theta, -\varphi, -\psi),$$

$$\text{(3)} \qquad C\, Y_l^{m,m'}(\theta, \varphi, \psi) = Y_l^{m,m'}(\theta, -\varphi, \psi).$$

Or :

$$Y_l^{m,m'}(\theta, \varphi, \psi) = e^{i(m\psi + m'\varphi)}\, \Theta_l^{m,m'}(\theta).$$

Ce polynome $\Theta_l^{m,m'}(\theta)$ a les propriétés suivantes; il peut s'écrire :

$$\Theta_l^{m,m'}(\theta) = \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{-d} \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{-s} \frac{d^p}{d\left(\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^p} \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{2d+2p} \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2s+2p},$$

avec

$$d = |m - m'|, \qquad s = |m + m'|, \qquad p = l - \frac{d}{2} - \frac{s}{2},$$

d, s, p sont des entiers ; donc :

$$\Theta_l^{m,m'}(\theta) = \Theta_l^{-m,-m'}(\theta), \tag{4}$$

$$\Theta_l^{m,m'}(-\theta) = (-1)^d\, \Theta_l^{m,m'}(\theta). \tag{5}$$

Donc, compte tenu des relations (4) et (5), les expressions (1), (2), (3) deviennent :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\, Y_l^{m,m'}(\theta, \varphi, \psi) &= (-1)^d\, Y_l^{m,m'}(\theta, \varphi, \psi),\\
\mathrm{T}\, Y_l^{m,m'}(\theta, \varphi, \psi) &= (-1)^d\, Y_l^{-m,-m'}(\theta, \varphi, \psi),\\
\mathrm{C}\, Y_l^{m,m'}(\theta, \varphi, \psi) &= Y_l^{-m,-m'}(\theta, \varphi, \psi).
\end{aligned}$$

On voit donc bien que si $Y_l^{m,m'}(\theta, \varphi, \psi)$ est la fonction d'onde correspondant à l'état interne d'une particule, $Y_l^{-m,-m'}(\theta, \varphi, \psi)$ est la fonction d'onde de l'antiparticule correspondante.

On aurait pu définir l'opération P par les relations :

$$\mathrm{P}\left|\begin{aligned} &\theta \to \theta,\\ &\varphi \to \pi + \varphi,\\ &\psi \to \pi + \psi ;\end{aligned}\right.$$

on aurait alors :

$$\mathrm{C}\left|\begin{aligned} &\theta \to -\theta,\\ &\varphi \to -\pi - \varphi,\\ &\psi \to -\pi - \psi.\end{aligned}\right.$$

Ceci semble plus satisfaisant, car on aurait finalement :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\, Y_l^{m,m'}(\theta, \varphi, \psi) &= Y_l^{m,m'}(\theta, \varphi, \psi),\\
\mathrm{T}\, Y_l^{m,m'}(\theta, \varphi, \psi) &= (-1)^d\, Y_l^{-m,-m'}(\theta, \varphi, \psi),\\
\mathrm{C}\, Y_l^{m,m'}(\theta, \varphi, \psi) &= (-1)^d\, Y_l^{-m,-m'}(\theta, \varphi, \psi).
\end{aligned}$$

La fonction d'onde reste invariante sous l'opération P. Dans tous les cas leur norme est invariante sous cette opération.

DEUXIÈME PARTIE.

CAS RELATIVISTE.

1. Généralités. — Dans le cas relativiste on a affaire à deux tétrapodes a_μ^ξ et b_μ^ξ (ξ, $\mu = 1, 2, 3, 4$) en mouvement l'un autour de l'autre. On peut introduire six angles d'Euler : trois réels θ_1, φ_1, ψ_1 ;

trois imaginaires purs $i\theta_2$, $i\varphi_2$, $i\psi_2$ et étudier l'effet des opérations P, T, C en tenant compte des relations

$$b_\mu^\xi = \Lambda_\eta^\xi\, a_\mu^\eta,$$

où Λ_η^ξ est la matrice 4×4 des cosinus directeurs ([4]).

On peut aussi, comme on l'a montré ([4]), définir à partir du tétrapode a_μ^ξ deux trièdres trirectangles complexes conjugués

$$\vec{A}^{r\pm} = \vec{a}^s \wedge \vec{a}^t \pm \vec{a}^r \wedge \vec{a}^4,$$

$\vec{a}^4$ est imaginaire pur; r, s, t, permutation circulaire de 1, 2, 3.

Les flèches indiquent qu'on se limite aux composantes spatiales des vecteurs. De la même façon, à partir du tétrapode b_μ^ξ on a les deux trièdres trirectangles complexes conjugués

$$\vec{B}^{r\pm} = \vec{b}^s \wedge \vec{b}^t \pm \vec{b}^r \wedge \vec{b}^4$$

$\vec{b}^4$ est imaginaire pur.

La transformation de Lorentz qui amène a_μ^ξ en b_μ^ξ se décompose en deux rotations tridimensionnelles complexes conjuguées qui amènent, l'une A^{r+} en B^{r+} et l'autre A^{r-} en B^{r-}. On est alors amené à définir deux séries complexes conjuguées de trois angles d'Euler :

$$\omega^+ = \{\theta^+, \varphi^+, \psi^+\}, \qquad \omega^- = \{\theta^-, \varphi^-, \psi^-\},$$
$$\omega^- = \overline{(\omega^+)}$$

et les moments cinétiques correspondants $J_k^\pm$, $J_k'^\pm$, $(J^\pm)^2$.

Après quantification des équations du mouvement, ces moments cinétiques deviennent des opérateurs et les fonctions propres simultanées des opérateurs $J_3^\pm$, $J_3'^\pm$, $(J^\pm)^2$ sont :

$$U_{l^+,l^-}^{m^+,m^-,m'^+,m'^-}(\omega^+, \omega^-) = \{Y_{l^+}^{m^+,m'^+}(\omega^+), Y_{l^-}^{m^-,m'^-}(\omega^-)\}.$$

Pour des valeurs fixées de l^+, l^-, m'^+, m'^-, ces fonctions sont les éléments d'un espace vectoriel qui se transforment sous le groupe propre de Lorentz suivant la représentation $\mathcal{D}(l^+, l^-)$.

Il est désirable d'obtenir un espace vectoriel de fonctions qui se transforment sous le groupe complet de Lorentz suivant la représentation

$$\mathcal{D}(l^+, l^-) \oplus \mathcal{D}(l^-, l^+) \qquad (\oplus, \text{ somme directe}).$$

([4]) F. HALBWACHS, P. HILLION et J.-P. VIGIER, *Ann. Inst. H. Poincaré* (même numéro).

Pour cela, il faut d'abord examiner quel est l'effet de l'opération parité.

Cette opération se définit par les relations :

$$P a_\mu^r \to - a_\mu^r, \qquad P b_\mu^r = - b_\mu^r \qquad (r = 1, 2, 3);$$

comme :

$$\vec{A}_r^\pm = \vec{a}^s \wedge \vec{a}^t \pm \vec{a}^r \wedge \vec{a}^{(4)},$$
$$\vec{B}_r^\pm = \vec{b}^s \wedge \vec{b}^t \pm \vec{b}^r \wedge \vec{b}^{(4)},$$

il est visible que :

$$P\,\vec{A}_r^\pm \to \vec{A}_r^\mp,$$
$$P\,\vec{B}_r^\pm \to \vec{B}_r^\mp.$$

Donc l'opération P change les angles ω^+ en ω^-.

On peut le voir directement en raisonnant sur les a_μ^ξ et b_μ^ξ. A l'opération P on peut adjoindre la matrice :

$$P = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = P^{-1}.$$

Dans ces conditions :

$$\Lambda_\eta^\xi \to P^{-1} \Lambda_\eta^\xi P = \Lambda_\eta'^\xi,$$

et il est facile de voir que :

$$\Lambda_s^r = \Lambda_s'^r,$$
$$\Lambda_4^4 = \Lambda_4'^4,$$
$$\Lambda_s^4 = -\Lambda_s'^4,$$
$$\Lambda_4^r = -\Lambda_4'^r.$$

Or, si l'on se reporte au tableau des cosinus directeurs donnés ci-après, il est facile de voir qu'on passe de Λ_η^ξ à $\Lambda_\eta'^\xi$ en changeant θ_2, φ_2, ψ_2 en $-\theta_2$, $-\varphi_2$, $-\psi_2$, c'est-à-dire précisément en changeant ω^+ en ω^-.

Λ_η^ξ.

ξ.	$\eta = 1$.
1............	$\cos\varphi_1 \cos\theta_1 \cos\psi_1 - \sin\varphi_1 \operatorname{ch}\theta_2 \sin\psi_1$
2............	$-\cos\varphi_1 \cos\theta_1 \sin\psi_1 - \sin\varphi_1 \operatorname{ch}\theta_2 \cos\psi_1$
3............	$\cos\varphi_1 \sin\theta_1 \operatorname{ch}\psi_2 - \sin\varphi_1 \operatorname{sh}\theta_2 \operatorname{sh}\psi_2$
4............	$-\cos\varphi_1 \sin\theta_1 \operatorname{sh}\psi_2 + \sin\varphi_1 \operatorname{sh}\theta_2 \operatorname{ch}\psi_2$

ξ.	$\eta = 2$.
1............	$\sin\varphi_1 \cos\theta_1 \cos\psi_1 + \cos\varphi_1 \operatorname{ch}\theta_2 \sin\psi_1$
2............	$-\sin\varphi_1 \cos\theta_1 \sin\psi_1 + \cos\varphi_1 \operatorname{ch}\theta_2 \cos\psi_1$
3............	$\sin\varphi_1 \sin\theta_1 \operatorname{ch}\psi_2 + \cos\varphi_1 \operatorname{sh}\theta_2 \operatorname{sh}\psi_2$
4............	$-\sin\varphi_1 \sin\theta_1 \operatorname{sh}\psi_2 - \cos\varphi_1 \operatorname{sh}\theta_2 \operatorname{ch}\psi_2$

ξ.	$\eta = 3$.
1	$-\operatorname{ch}\varphi_2 \sin\theta_1 \cos\psi_1 + \operatorname{sh}\varphi_2 \operatorname{sh}\theta_1 \sin\psi_1$
2	$\operatorname{ch}\varphi_2 \sin\theta_1 \sin\psi_1 + \operatorname{sh}\varphi_2 \operatorname{sh}\theta_2 \cos\psi_1$
3	$\operatorname{ch}\varphi_2 \cos\theta_1 \operatorname{ch}\psi_2 + \operatorname{sh}\varphi_2 \operatorname{ch}\theta_2 \operatorname{sh}\psi_2$
4	$-\operatorname{ch}\varphi_2 \cos\theta_1 \operatorname{sh}\psi_2 - \operatorname{sh}\varphi_2 \operatorname{ch}\theta_2 \operatorname{ch}\psi_2$

ξ.	$\eta = 4$.
1	$\operatorname{sh}\varphi_2 \sin\theta_1 \cos\psi_1 - \operatorname{ch}\varphi_2 \operatorname{sh}\theta_2 \sin\psi_1$
2	$-\operatorname{sh}\varphi_2 \sin\theta_1 \sin\psi_1 - \operatorname{ch}\varphi_2 \operatorname{sh}\theta_2 \cos\psi_1$
3	$-\operatorname{sh}\varphi_2 \cos\theta_1 \operatorname{ch}\psi_2 - \operatorname{ch}\varphi_2 \operatorname{ch}\theta_2 \operatorname{sh}\psi_2$
4	$\operatorname{sh}\varphi_2 \cos\theta_1 \operatorname{sh}\psi_2 + \operatorname{ch}\varphi_2 \operatorname{ch}\theta_2 \operatorname{ch}\psi_2$

Si l'on applique l'opération parité aux fonctions d'onde, il vient donc

$$\mathrm{P}\,\mathrm{U}_{l^+,l^-}^{m^+,m^-,m'^+,m'^-}(\omega^+,\omega^-) = \mathrm{U}_{l^-,l^+}^{m^-,m^+,m'^-,m'^+}(\omega^+,\omega^-).$$

On est alors amené à considérer les opérateurs :

$$\mathrm{S}'_k = \mathrm{J}'^+_k + \mathrm{J}'^-_k$$

(ces opérateurs S'_k sont invariants sous l'opération parité) et à chercher les fonctions propres simultanées des opérateurs :

$$\mathrm{J}_3^{\pm},\quad \mathrm{S}'_3,\quad (\mathrm{J}^+)^2,\quad (\mathrm{J}^-)^2,\quad (\mathrm{S}')^2;$$

on trouve facilement leurs fonctions propres qui s'écrivent

$$\mathrm{Z}_{l^+,l^-,s'}^{m^+,m^-,m'}(\omega^+,\omega^-) = \sum_{-m'^+,-m'^-} (l^+, l^-, -m'^+, -m'^- \mid l^+, l^-, s', -m') \times \mathrm{Y}_{l^+}^{m^+,m'^+}(\omega^+)\,\mathrm{Y}_{l^-}^{m^-,m'^-}(\omega^-).$$

Pour des valeurs fixées de l^+, l^-, s', m', ces fonctions constituent un espace vectoriel dont les éléments se transforment sous le groupe de Lorentz suivant la représentation

$$\mathcal{D}(l^+, l^-) \oplus \mathcal{D}(l^-, l^+).$$

On peut déterminer facilement comment agit l'opération P sur ces fonctions, Il vient :

$$\mathrm{P}\,\mathrm{Z}_{l^+,l^-,s'}^{m^+,m^-,m'}(\omega^+,\omega^-) = \sum_{-m'^+,-m'^-} (l^+, l^-, m'^+, -m'^- \mid l^+, l^-, s', -m') \times \mathrm{Y}_{l^+}^{m^+,m'^+}(\omega^-)\,\mathrm{Y}_{l^-}^{m^-,m'^-}(\omega^+).$$

Donc, d'après la propriété suivante des paramètres de Clebsch-Gordan ([5]),

$$\begin{aligned}&(l^+,\ l^-,\ -m'^+,\ -m'^-\mid l^+,\ l^-,\ s',\ -m')\\&\quad=(-1)^{l^++l^--s'}(l^-,\ l^+,\ -m'^-,\ -m'^+\mid l^-,\ l^+,\ s',\ -m'),\end{aligned}$$

on a finalement :

$$\mathrm{P}\, Z_{l^+,l^-,s'}^{m^+,m^-,m'}(\omega^+,\ \omega^-)=(-1)^{l^++l^--s'}\, Z_{l^-,l^+,s'}^{m^-,m^+,m'}(\omega^+,\ \omega^-).$$

2. **L'opération T.** — L'opération T se définit par les relations

$$\mathrm{T}\, a_\mu^{(4)}=-a_\mu^{(4)};\qquad \mathrm{T}\, b_\mu^{(4)}=-b_\mu^{(4)}.$$

Il est bien connu ([6]) qu'il n'existe pas de transformation linéaire permettant d'exprimer l'opération T. On pourrait songer à utiliser la matrice

$$\mathrm{T}'=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{vmatrix}=(\mathrm{T}')^{-1}$$

analogue à P.

Mais il est facile de voir que

$$(\mathrm{T}')^{-1}\Lambda_\eta^\xi\,\mathrm{T}'=\mathrm{P}^{-1}\Lambda_\eta^\xi\,\mathrm{P}.$$

On aboutirait donc au résultat absurde que les opérations P et T sont identiques.

En fait, ce qui caractérise l'opération T, c'est le changement de signe de Λ_4^4.

Or :

$$\Lambda_4^4=\operatorname{sh}\varphi_2\cos\theta_1\operatorname{sh}\psi_2+\operatorname{ch}\varphi_2\operatorname{ch}\theta_2\operatorname{ch}\psi_2.$$

Il est facile de voir que $\Lambda_4^4>0$; par contre, si l'on effectue le changement $\theta_2\to\theta_2+i\pi$, on obtient :

$$\Lambda_4^4(\theta_2+i\pi)=\operatorname{sh}\varphi_2\cos\theta_1\operatorname{sh}\psi_2-\operatorname{ch}\varphi_2\operatorname{ch}\theta_2\operatorname{ch}\psi_2.$$

Donc :

$$\Lambda_4^4(\theta_2+i\pi)<0.$$

([5]) J. M. Blatt et V. F. Weisskopff, *Theoretical nuclear Physics*, Appendice A, p. 791.

([6]) *Voir*, par exemple, J. M. Jauch et F. Röhrlich, *The theory of photons and electrons.*

On peut aussi changer θ_1 en $\theta_1 + \pi$, alors :

$$\Lambda_4^4(\theta_1 + \pi, \theta_2 + i\pi) = - \Lambda_4^4(\theta_1, \theta_2).$$

On observera d'ailleurs qu'on a les relations :

$$\Lambda_\eta^\xi(\theta_1 + \pi, \theta_2 + i\pi) = - \Lambda_\eta^\xi(\theta_1, \theta_2).$$

De plus, l'opération

$$\begin{aligned} \theta_1 &\to \theta_1 + \pi, \\ \theta_2 &\to \theta_2 + i\pi \end{aligned}$$

laisse θ^+ et θ^- inchangés.

Par ailleurs, si l'on examine les relations

$$\begin{aligned} \vec{A}^{r\pm} &= \vec{a}^s \wedge \vec{a}^t \pm \vec{a}^r \wedge \vec{a}^4, \\ \vec{B}^{r\pm} &= \vec{b}^s \wedge \vec{b}^t \pm \vec{b}^r \wedge \vec{b}^4; \end{aligned}$$

comme :

$$T\,\vec{a}^4 = - \vec{a}^4, \qquad T\,\vec{b}^4 = - \vec{b}^4,$$

on en déduit :

$$\begin{aligned} T\,\vec{A}^{r\pm} &= \vec{A}^{r\mp}, \\ T\,\vec{B}^{r\pm} &= \vec{B}^{r\mp}, \end{aligned}$$

soit :

$$T\,\omega^\pm \to \omega^\mp.$$

Dans ces conditions, l'opération T appliquée aux angles d'Euler s'écrit :

$$T\begin{pmatrix} \omega^+ \to \omega^- \\ \omega^- \to \omega^+ \\ \theta_1 \to \theta_1 + \pi \\ \theta_2 \to \theta_2 + i\pi \end{pmatrix}.$$

Dans ces conditions, la matrice $\Lambda_\eta^\xi(\theta_1, \theta_2)$ deviendra, sous l'opération T,

$$\Lambda_\eta'^\xi = T'^{-1} \Lambda_\eta^\xi(\theta_1 + \pi, \theta_2 + i\pi) T',$$

où T′ est la matrice déja définie :

$$T' = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix},$$

soit :

$$\Lambda'^{\xi}_{\eta} = - T'^{-1} \Lambda^{\xi}_{\eta} T.$$

Ceci peut être considéré comme définissant une transformation linéaire entre $-b^{\xi}_{\mu}$ et a^{ξ}_{μ},

$$-b^{\xi}_{\mu} = (T')^{-1} \Lambda^{\xi}_{\eta}(\theta_1, \theta_2)\, T\, a^{\xi}_{\mu}.$$

Dans ces conditions, si l'on fait porter l'opération T sur $-b^{\xi}_{\mu}$ et sur a^{ξ}_{μ}, ceci revient à changer ω^+ en $-\omega^-$ et ω^- en $-\omega^+$, d'où :

$$\begin{aligned} T\, Z^{m^+, m^-, m'}_{l^+, l^-, s'}(\omega^+, \omega^-) &= Z^{m^+, m^-, m'}_{l^+, l^-, s'}(-\omega^-, -\omega^+) \\ &= \sum_{-m'^+, -m'^-} (l^+, l^-, -m'^-, -m'^- \mid l^+, l^-, s', -m') \\ &\quad \times Y^{m^+, m'^+}_{l^+}(-\omega^-)\, Y^{m^-, m'^-}_{l^-}(-\omega^+). \end{aligned}$$

soit, d'après la relation déjà indiquée :

$$\begin{aligned} T\, Z^{m^+, m^-, m'}_{l^+, l^-, s'}(\omega^+, \omega^-) &= (-1)^{l^+ + l^- - s'} \\ &\quad \times \sum_{-m'^+, -m'^-} (l^-, l^+, -m'^-, -m'^+ \mid l^-, l^+, s', -m') \\ &\quad \times Y^{m^+, m'^+}_{l^+}(-\omega^-)\, Y^{m^-, m'^-}_{l^-}(-\omega^+). \end{aligned}$$

Or :

$$Y^{m^+, m'^+}_{l^+}(-\omega^-) = (-1)^{l^+}\, Y^{-m^+, -m'^+}_{l^+}(\omega^-), \qquad \text{où } d^+ = |m'^+ - m^+|,$$

$$Y^{m^-, m'^-}_{l^-}(-\omega^+) = (-1)^{l^-}\, Y^{-m^-, -m'^-}_{l^-}(\omega^+), \qquad \text{où } d^- = |m'^- - m^-|,$$

d'où :

$$\begin{aligned} T\, Z^{m^+, m^-, m'}_{l^+, l^-, s'}(\omega^+, \omega^-) &= (-1)^{l^+ + l^- - s'}(-1)^{d^+ + d^-} \\ &\quad \times \sum_{-m'^+, -m'^-} (l^-, l^+, -m'^-, -m'^+ \mid l^-, l^+, s', -m') \\ &\quad \times Y^{-m^+, -m'^+}_{l^+}(\omega^+)\, Y^{-m^-, -m'^-}_{l^-}(\omega^-). \end{aligned}$$

Nous allons maintenant démontrer une autre propriété des paramètres de Clebsch-Gordan. Définissons ([5]) :

$$\begin{aligned} &V(l^+, l^-, s', m'^+, m'^-, m') \\ &\quad = (-1)^{s' - m'}(2s' + 1)^{-\frac{1}{2}}(l^+, l^-, -m'^+, -m'^- \mid l^+, l^-, s', -m'). \end{aligned}$$

On a la relation suivante :

$$\begin{aligned} &V(l^+, l^-, s', m'^+, m'^-, m') \\ &\quad = (-1)^{l^+ + l^- + s'}\, V(l^+, l^-, s', -m'^+, -m'^-, -m'), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}(-1)^{s'-m'}(l^+,\ l^-,\ -m'^+,\ -m'^-\mid l^+,\ l^-,\ s',\ -m')\\ =(-1)^{s'+m'}(-1)^{l^++l^-+s'}(l^+,\ l^-,\ m'^+,\ m'^-\mid l^+,\ l^-,\ s',\ m'),\end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned}(l^+,\ l^-,\ -m'^+,\ -m'^-\mid l^+,\ l^-,\ s',\ -m')\\ =(-1)^{2m'}(-1)^{l^++l^-+s'}(l^+,\ l^-,\ -m'^+,\ -m'^-\mid l^+,\ l^-,\ s',\ m'),\end{aligned}$$

d'où, en portant cette relation dans l'expression de $T\,Z_{l^+,\,l^-,\,s'}^{m^+,\,m^-,\,m'}(\omega^+,\ \omega^-)$,

$$\begin{aligned}T\,Z_{l^+,\,l^-,\,s'}^{m^+,\,m^-,\,m'}(\omega^+,\ \omega^-)&=(-1)^{2(l^++l^-+m')}(-1)^{d^++d^-}\\ &\times\sum_{-m'^+,\,-m'^-}(l^-,\ l^+,\ m'^-,\ m'^+\mid l^-,\ l^+,\ s',\ -m')\\ &\times Y_{l^+}^{-m^+,\,-m'^+}(\omega^-)\,Y_{l^-}^{-m^-,\,-m'^-}(\omega^-).\end{aligned}$$

Comme l^++l^-+m' est un entier, $2(l^++l^-+m')$ est pair.

Et comme $d^++d^-=|m'^+-m^++m'^--m^-|$ à un entier pair près;

et que $m'^++m'^-=m'$, d'après une propriété des paramètres de Clebsch-Gordan, on a :

$$T\,Z_{l^+,\,l^-,\,s'}^{m^+,\,m^-,\,m'}(\omega^+,\ \omega^-)=(-1)^{|m'-m^+-m^-|}\,Z_{l^-,\,l^+,\,s'}^{-m^+,\,-m^-,\,-m'}(\omega^+,\ \omega^-).$$

On remarquera, en outre, que m' et m^++m^- étant simultanément entiers ou demi-entiers, $|m'-m^+-m^-|$ est un entier.

Si l'on pose :

$$d=|m'-m^+-m^-|;$$

il vient finalement :

$$T\,Z_{l^+,\,l^-,\,s'}^{m^+,\,m^-,\,m'}(\omega^+,\ \omega^-)=(-1)^{d}\,Z_{l^-,\,l^+,\,s'}^{-m^-,\,-m^+,\,-m'}(\omega^+,\ \omega^-).$$

3. **L'opération C.** — Appliquée aux angles d'Euler les opérations P et T sont définies par les relations

$$P\begin{pmatrix}\omega^+\to\omega^-\\ \omega^-\to\omega^+\end{pmatrix},\qquad T\begin{pmatrix}\omega^+\to\omega^-\\ \omega^-\to\omega^+\\ \theta_1\to\theta_1+\pi\\ \theta_2\to\theta_2+i\pi\end{pmatrix}.$$

On en déduit que l'opération PT est caractérisée par

$$PT=\begin{pmatrix}\theta_1\to\theta_1+\pi\\ \theta_2\to\theta_2+i\pi\end{pmatrix}.$$

Donc :

$$C=\begin{pmatrix}\theta_1\to\theta_1+\pi\\ \theta_2\to\theta_2+i\pi\end{pmatrix}.$$

Appliquée aux fonctions $Z_{l+,l-,s'}^{m+,m-,m'}(\omega^+, \omega^-)$ les opérations P et T sont caractérisées par les relations

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\, Z_{l+,l-,s'}^{m+,m-,m'}(\omega^+, \omega^-) &= (-1)^{l^++l^--s'} Z_{l-,l+,s'}^{m-,m+,m'}(\omega^+, \omega^-),\\ \mathrm{T}\, Z_{l+,l-,s'}^{m+,m-,m'}(\omega^+, \omega^-) &= (-1)^{d} Z_{l-,l+,s'}^{-m-,-m+,-m'}(\omega^+, \omega^-), \end{aligned}$$

avec

$$d = |\, m' - m^+ - m^- \,|,$$

d'où :

$$\mathrm{C}\, Z_{l+,l-,s'}^{m+,m-,m'}(\omega^+, \omega^-) = (-1)^{l^++l^-+d-s'} Z_{l+,l-,s'}^{-m+,-m-,-m'}(\omega^+, \omega^-).$$

Donc si $Z_{l+,l-,s'}^{m+,m-,m'}(\omega^+, \omega^-)$ et la fonction d'onde correspondant à l'état interne d'une particule, $(-1)^\alpha Z_{l+,l-,s}^{-m+,-m-,-m'}(\omega^+, \omega^-)$ est la fonction d'onde correspondant à l'état interne d'une antiparticule avec :

$$\alpha = l^+ + l^- + d - s'.$$

On peut appliquer ceci au cas de la représentation

$$\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus \mathcal{D}\left(0, \frac{1}{2}\right).$$

Les fonctions $Z_{l+,l-,s'}^{m+,m-,m'}(\omega^+, \omega^-)$ se transformant suivant cette représentation sont caractérisées par :

$$\left.\begin{matrix} l^+ = 0, & \frac{1}{2} \\ l^- = 0, & \frac{1}{2} \end{matrix}\right\}, \qquad s' = \frac{1}{2}, \qquad m' = \frac{1}{2} \quad \text{pour les particules;}$$

$$\left.\begin{matrix} l^+ = 0, & \frac{1}{2} \\ l^- = 0, & \frac{1}{2} \end{matrix}\right\}, \qquad s' = \frac{1}{2}, \qquad m' = -\frac{1}{2} \quad \text{pour les antiparticules.}$$

Dans chaque cas on aura quatre fonctions $Z_{l+,l-,s'}^{m+,m-,m'}(\omega^+, \omega^-)$ qu'on peut grouper en deux spineurs de Dirac, l'un étant le spineur particule et l'autre le spineur antiparticule. D'une façon explicite,

$$\Psi = \begin{bmatrix} Z_{\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-) \\ Z_{\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-) \\ -Z_{0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^{0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-) \\ -Z_{0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^{0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-) \end{bmatrix}, \qquad \Phi = \begin{bmatrix} Z_{\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-) \\ -Z_{\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-) \\ -Z_{0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^{0,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-) \\ Z_{0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^{0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-) \end{bmatrix}.$$

Si l'on attribue le spineur Ψ à la particule il faut attribuer le spineur Φ à l'antiparticule.

Si l'on définit le spineur Φ^* comme le spineur déduit du précédent en prenant le conjugué des variables complexes dépendant de l'imaginaire j il vient :

$$\Phi^* = \begin{bmatrix} Z^{\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}}(\omega^+,\omega^-) \\ Z^{-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}}(\omega^+,\omega^-) \\ -Z^{0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}}_{0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\omega^+,\omega^-) \\ = Z^{0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}_{0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\omega^+,\omega^-) \end{bmatrix}.$$

Si l'on a fait usage de la relation démontrée précédemment :

$$\begin{aligned}&(l^+, l^-, -m'^+, -m'^- \mid l^+, l^-, s', -m') \\ &\quad = (-1)^{2m'}(-1)^{l^+ + l^- + s'}(l^+, l^-, m'^+, m'^- \mid l^+, l^-, s', m').\end{aligned}$$

on retrouve Ψ. Par contre, si l'on définit $\overline{\Phi}$ comme le spineur déduit de Φ en prenant le complexe conjugué simultanément des variables définies avec l'imaginaire i et de celles définies avec l'imaginaire j, il vient :

$$\overline{\Phi} = \begin{bmatrix} Z^{\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}}(\omega^-,\omega^+) \\ -Z^{-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}}(\omega^-,\omega^+) \\ -Z^{0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}}_{0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\omega^-,\omega^+) \\ +Z^{0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}_{0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\omega^-,\omega^+) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z^{0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}}_{0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\omega^+,\omega^-) \\ -Z^{0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}_{0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\omega^+,\omega^-) \\ -Z^{\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}}(\omega^+,\omega^-) \\ -Z^{-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}}(\omega^+,\omega^-) \end{bmatrix}$$

et l'on retrouve la relation habituelle entre le spineur et le spineur conjugué de charge.

Nous allons maintenant considérer les sous-espaces vectoriels des fonctions $Z^{m^+,m^-,m'}_{l^+,l^-,s'}(\omega^+,\omega^-)$ caractérisés par les valeurs suivantes des nombres l^+, l^-, s', m' :

$$l^+ = l^- = \frac{1}{2}, \qquad s' = m' = 0.$$

Comme on l'a déjà indiqué, ces fonctions se transforment sous le groupe complet de Lorentz suivant la représentation $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. On sait, en outre ([7]), que les êtres géométriques qui ont cette propriété sont les quadrivecteurs :

$$Z^{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}(\omega^+,\ \omega^-),\quad Z^{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}(\omega^+,\ \omega^-),\quad Z^{\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}(\omega^+,\ \omega^-),\quad Z^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}(\omega^+,\ \omega^-).$$

On a défini ([8]) la norme dans l'espace vectoriel des fonctions $Z^{m+,m-,m'}_{l+,l-,s'}(\omega^+,\ \omega^-)$ ainsi que leur produit scalaire.

Considérons les quatre vecteurs :

$$a^{(1)}_\mu = \frac{1}{2}\left(Z^{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}(\omega^+,\ \omega^-) + Z^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}(\omega^+,\ \omega^-)\right),$$

$$a^{(2)}_\mu = \frac{1}{2i}\left(Z^{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}(\omega^+,\ \omega^-) - Z^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}(\omega^+,\ \omega^-)\right),$$

$$a^{(3)}_\mu = \frac{1}{2}\left(Z^{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}(\omega^+\ \omega^-,) + Z^{\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}(\omega^+,\ \omega^-)\right),$$

$$a^{(4)}_\mu = \frac{1}{2i}\left(Z^{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}(\omega^+,\ \omega^-) - Z^{\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}(\omega^+,\ \omega^-)\right).$$

On constate immédiatement les résultats suivants :

a. Les quatre vecteurs $a^{(1)}_\mu$, $a^{(2)}_\mu$, $a^{(3)}_\mu$ $a^{(4)}_\mu$ sont indépendants et orthogonaux.

b. Sous l'opération P :

$$\begin{aligned} P\,a^{(1)}_\mu &= -\,a^{(1)}_\mu, \\ P\,a^{(2)}_\mu &= -\,a^{(2)}_\mu, \\ P\,a^{(3)}_\mu &= -\,a^{(3)}_\mu, \\ P\,a^{(4)}_\mu &= \,a^{(4)}_\mu. \end{aligned}$$

On en conclut que $a^{(1)}_\mu$, $a^{(2)}_\mu$, $a^{(3)}_\mu$ sont trois vecteurs du genre espace, tandis que $a^{(4)}_\mu$ est du genre temps, le signe de la norme de $a^{(1)}_\mu$ et $a^{(2)}_\mu$ est le même, ce qui est évident puisque $a^{(2)}_\mu = C a^{(1)}_\mu$ et que $C^\star C = 1$; en outre, il est opposé au signe de $a^{(4)}_\mu$.

Si l'on divise $a^{(1)}_\mu$, $a^{(2)}_\mu$, $a^{(3)}_\mu$, $a^{(4)}_\mu$ par leurs normes, on obtient ainsi un tétrapode analogue aux tétrapodes a^ξ_μ et b^ξ_μ dont on était parti, mais il s'agit ici d'un tétrapode fonctionnel.

([7]) *Cf.* E. M. Corson, *Introduction to tensors, spinors and relativistic wave equations*, Blacke and Sons.

([8]) P. Hillion et J.-P. Vigier, *Inst. H. Poincaré* (même fascicule).

L'opération T n'étant pas linéaire, on ne peut s'attendre à avoir les relations

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{T}\, a_\mu^{(r)} &= a_\mu^{(r)} \\ \mathrm{T}\, a_\mu^{(4)} &= -\, a_\mu^{(4)} \end{aligned}\right\} \qquad (r = 1, 2, 3).$$

On vérifie effectivement que dans l'espace fonctionnel ces relations ne sont pas vraies, mais qu'on a à la place :

$$\begin{aligned} \mathrm{T}\, a_\mu^{r} &= -\, a_\mu^{r}, \\ \mathrm{T}\, a_\mu^{(4)} &= a_\mu^{(4)}. \end{aligned}$$

Comme on l'a montré, ces équations doivent s'écrire

$$\begin{aligned} \mathrm{T}\, a_\mu^{r}\, (\theta_1, \theta_2, \varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2) &= -\, a_\mu^{r}\, (\theta_1 + \pi, \theta_2 + i\pi, \varphi_1, \psi_1, \varphi_2, \psi_2), \\ \mathrm{T}\, a_\mu^{(4)}(\theta_1, \theta_2, \varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2) &= \, a_\mu^{(4)}(\theta_1 + \pi, \theta_2 + i\pi, \varphi_1, \psi_1, \varphi_2, \psi_2). \end{aligned}$$

Enfin, il faut faire une dernière remarque : dans l'étude déjà signalée ([8]) sur la définition de la norme des fonctions $Z_{l^+, l^-, s'}^{m^+, m^-, m'}(\omega^+, \omega^-)$ on a laissé ouverte la question de l'interprétation de cette norme, la métrique étant indéfinie dans l'espace vectoriel des fonctions. Toutefois, on a envisagé la possibilité que les états physiques seraient tels que le carré de leur norme soit positif. Il y a contradiction entre cette possibilité et le fait de considérer $a_\mu^{(4)}$ comme un vecteur du genre temps.

En effet, dans la métrique forte qu'on a définie :

$$\begin{aligned} a_\mu^{(4)} a_\mu^{(4)} = {} & \left(Z_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0}^{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0}(\omega^+, \omega^-),\, Z_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0}^{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0}(\omega^+, \omega^-) \right) \\ & + \left(Z_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0}^{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0}(\omega^+, \omega^-),\, Z_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0}^{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0}(\omega^+, \omega^-) \right). \end{aligned}$$

Or ceci ne peut être négatif qu'en supposant chaque terme au second membre négatif, ce qui, si l'hypothèse précédente était admise, reviendrait à admettre que $Z_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0}^{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0}(\omega^+, \omega^-)$ et $Z_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0}^{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0}(\omega^+, \omega^-)$ ne correspondent pas à des états physiques.

Pour lever cette contradiction, il semble qu'on pourrait restreindre un peu l'hypothèse précédente en envisageant les deux cas où $l^+ + l^-$ est demi-entier ou entier. Dans le cas de $l^+ + l^-$ demi-entier, on imposerait aux fonctions $Z_{l^+, l^-, s'}^{m^+, m^-, m'}(\omega^+, \omega^-)$ ayant une signification physique d'être, dans le sous-espace vectoriel à métrique définie positive en interprétant leur norme comme une probabilité. Dans le cas de $l^+ + l^-$ entier on ne ferait pas de différence entre les deux sous-espaces vectoriels, sinon en considérant qu'il y a des vecteurs du genre espace et d'autres vecteurs du genre temps, la norme serait donc interprétée comme une distance au sens géométrique du terme.

4. **Conclusion.** — On a donc pu établir le comportement des fonctions $Z_{l^+, l^-, s'}^{m^+, m^-, m'}(\omega^+, \omega^-)$ sous chacune des opérations C, T, P. Ceci justifie le choix qu'on a fait ([1]) dans la classification des états élémentaires en caractérisant les états particules par les trois nombres m^+, m^-, m' et les états antiparticules correspondants par $-m^+$, $-m^-$, $-m'$. Il a, en outre, été montré que dans le cas de la représentation $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus \mathcal{D}\left(0, \frac{1}{2}\right)$ on retrouvait le spineur conjugué de charge tel qu'il est défini habituellement dans la théorie de Dirac. Pour la représentation $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ à laquelle correspondent des vecteurs fonctionnels isomorphes aux vecteurs de l'espace-temps de la relativité spéciale, l'opération P a donc bien le caractère du renversement des sens du genre espace, ce qui prouve la cohérence de la théorie.

Enfin, l'application aux angles d'Euler des trois opérations C, P, T donne une image claire de la modification de leur structure interne lorsqu'on passe de l'état particule à l'antiparticule. En particulier dans le cas non relativiste, l'interprétation géométrique est évidente.