Annales de l'I. H. P.

Anatole Beck

Une loi forte des grands nombres dans des espaces de Banach uniformément convexes

Annales de l'I. H. P., tome 16, nº 1 (1958), p. 35-45
<http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1958__16_1_35_0>

Une loi forte des grands nombres dans des espaces de Banach uniformément convexes (1)

par

M. Anatole BECK (2)

à Harry Bakwin.

---

1. **Introduction.** — La loi forte des grands nombres est un théorème bien connu du Calcul des probabilités qui, sous sa forme la plus simple, est :

Théorème. — *Soit* $\{X_i\}$ *une suite de variables aléatoires réelles, indépendantes, de même loi et d'espérance mathématique nulle;*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \to 0 \qquad \textit{presque sûrement lorsque} \quad n \to \infty \quad (3).$$

On a observé que les hypothèses faites ci-dessus sont beaucoup plus fortes qu'il n'est nécessaire, et le théorème a été plusieurs fois renforcé en les affaiblissant; dans le cas de variables aléatoires indépendantes, Kolmogorov lui a donné sa forme la plus forte qui est :

Théorème. — *Soit* $\{X_i\}$ *une suite de variables aléatoires réelles, indépendantes, d'espérances mathématiques* $E(X_i) = 0$, *dont les variances* $\sigma_i^2 = E(X_i^2)$ *satisfont à* $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sigma_i^2}{i^2} < +\infty$;

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \to 0 \qquad \textit{presque sûrement lorsque} \quad n \to +\infty.$$

---

(1) Conférence faite à l'Institut Henri Poincaré le 30 janvier 1958.

(2) Yale University Travelling Fellow, 1957-1958.

(3) Dans cet article, toutes les convergences sont pour $n \to +\infty$, à moins que le contraire ne soit spécifié.

Notre but est de rendre la loi forte des grands nombres applicable à des suites de variables aléatoires indépendantes prenant leurs valeurs dans un espace de Banach. Il est vraisemblable que plus nos hypothèses sur l'espace de Banach seraient restrictives moins elles devraient l'être sur la suite de variables aléatoires. Par exemple, il est évident que si nous nous limitons à des espaces de Banach à un nombre fini de dimensions, le théorème sous sa forme la plus forte est encore vrai. D'autre part, le théorème sous sa forme faible, rappelé au début, est valable dans tout espace de Banach. Notre problème, ici, est de trouver une condition naturelle à imposer à l'espace de Banach de sorte qu'une suite de variables aléatoires, n'ayant pas nécessairement la même loi, mais dont les variances sont uniformément bornées, obéisse à la loi forte des grands nombres. Notre théorème principal, dont les termes seront définis plus loin, est :

THÉORÈME 1. — *Soit $\mathfrak{X}$ un espace de Banach uniformément convexe et $\{X_i\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathfrak{X}$. S'il existe un nombre* M *tel que, quel que soit i,*

$$E(X_i) = 0 \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Var}(X_i) = E(\|X_i\|^2) < M,$$

alors, presque sûrement, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ *tend fortement vers zéro lorsque* $n \to +\infty$.

Ce théorème a été démontré sous une hypothèse plus restrictive sur $\mathfrak{X}$ par R. Fortet et E. Mourier [1]. Nous montrerons également que si la condition de convexité uniforme est remplacée par la condition plus faible de convexité partout, le théorème est, en général, faux.

2. Définitions. — DÉFINITION 1. — Un espace de Banach, $\mathfrak{X}$, est dit *uniformément convexe* si, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, quels que soient a et $b \in \mathfrak{X}$, tels que $\|a\| \leq 1$, $\|b\| \leq 1$,

$$\|a+b\| > 2 - 2\delta \Rightarrow \|a-b\| < \varepsilon.$$

DÉFINITION 2. — Un espace de Banach, $\mathfrak{X}$, est dit *partout convexe* si, quel que soit $\varepsilon > 0$, pour tout $a \varepsilon \mathfrak{X}$ tel que $\|a\| \leq 1$ il existe $\delta > 0$

[1] Cf. *Bull. Sc. Math.*, 78, 1954, p. 14 et suiv.

tel que, pour tout $b \in \mathfrak{X}$ tel que $\| b \| \leq 1$,

$$\| a + b \| > 2 - 2\delta \Rightarrow \| a - b \| < \varepsilon.$$

DÉFINITION 3. — Soit (S, Σ, m) un espace mesuré et $\mathfrak{X}$ un espace de Banach. Si une application X de S dans $\mathfrak{X}$ est telle que :

1° il existe un ensemble $S_0 \in \Sigma$ tel que $m(S - S_0) = 0$ et que $X(S_0) = (X(s)/s \in S_0)$ est séparable ;

2° pour tout ensemble de Borel $A \subset \mathfrak{X}$, $X^{-1}(A) = (s/X(s) \in A) \in \Sigma$, nous appellerons X une *fonction fortement mesurable* [de (S, Σ, m) dans $\mathfrak{X}$] ([5]).

DÉFINITION 4. — Soit X une fonction fortement mesurable de (S, Σ, m) dans $\mathfrak{X}$. S'il existe un élément $y \in \mathfrak{X}$ tel que, pour toute fonctionnelle linéaire bornée x^* définie sur $\mathfrak{X}$, on ait

$$\int_S x^*(X(s))\, m(ds) = x^*(y),$$

nous dirons que X est *fortement intégrable* et nous appellerons y l'*intégrale* de X ([6]).

DÉFINITION 5. — Un espace probabilisé [noté (Ω, B, Pr)] est un espace mesuré de mesure totale 1 $[Pr(\Omega) = 1]$. Adoptant la terminologie habituelle du Calcul des probabilités, nous appellerons les fonctions fortement mesurables de Ω dans $\mathfrak{X}$, des *$\mathfrak{X}$-variables aléatoires* ([7]). Si X est fortement intégrable, nous appellerons son intégrale l'*espérance mathématique*, EX, de X.

DÉFINITION 6. — Soit $(X_\alpha/\alpha \in A)$, une collection de $\mathfrak{X}$-variables aléatoires, si pour tout entier positif m, tout choix de m des X_α, X_{α_1}, ...,

---

([5]) *Cf.* E. HILLE, *Functional Analysis and Semi-groups* (*Amer. Math. Soc.*, Colloquium Publications, n° 31, p. 40-50).

([6]) Cette définition est celle de l'intégrale faible ou intégrale de Pettis. Nous utilisons la propriété que, pour les fonctions fortement mesurables, l'intégrale faible et l'intégrale forte existent en même temps et sont égales (*Cf.* B. J. PETTIS, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 44. 1958, p. 277-304.)

([7]) Selon l'usage l'auteur parle de variables aléatoires réelles (complexes) plutôt que de variables aléatoires à valeurs réelles (à valeurs complexes).

X_{α_m} et tout choix de m ensembles de Borel dans $\mathfrak{X}$, $K_1, \ldots, K_m$, on a

$$\Pr\{X_{\alpha_1} \in K_1, \ldots, X_{\alpha_m} \in K_m\} = \prod_{i=1}^{m} \Pr\{X_{\alpha_i} \in K_i\},$$

nous disons que les X_α sont *indépendantes*.

DÉFINITION 7. — Si X est une $\mathfrak{X}$-variable aléatoire nous définissons la *variance* de X par

$$\operatorname{Var} X = E(\|X\|^2).$$

DÉFINITION 8. — Si X est une $\mathfrak{X}$-variable aléatoire et s'il existe une transformation φ de Ω dans lui-même, préservant la mesure, et telle que $X(\varphi(\omega)) = -X(\omega)$ pour presque-tout $\omega \in \Omega$ (et dorénavant nous utiliserons la terminologie *presque sûrement*), nous dirons que X est *symétrique*.

DÉFINITION 9. — Soit $\{X_i\}$ une suite de $\mathfrak{X}$-variables aléatoires. Nous posons

$$c\{X_i\} = \underset{\Omega}{\text{ess. sup.}}\ \underset{n}{\text{lim. sup.}} \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \right\|.$$

Rappelons qu'on appelle supremum essentiel sur un ensemble Ω d'une fonction numérique $f(x)$, $x \in \Omega$, un nombre qui n'est dépassé par $f(x)$ que, au plus, sur un ensemble de mesure nulle.

3. QUELQUES LEMMES. — Dans les lemmes 2-5, nous supposerons que $\mathfrak{X}$ est un espace de Banach uniformément convexe (*cf.* Définition 1), et que $\{X_i\}$ est une suite de $\mathfrak{X}$-variables aléatoires telles que :

1° les X_i ($i = 1, 2, \ldots$) sont indépendantes ;
2° chaque X_i est symétrique ($i = 1, 2, \ldots$) ;
3° $E(X_i) = 0$ ($i = 1, 2, \ldots$)

de plus, dans chacun de ces lemmes, nous imposerons une quatrième condition à la suite $\{X_i\}$, variable d'un lemme à l'autre.

Nous avons d'abord besoin de noter que :

LEMME 1. — *Pour tout quadruple $(a, b, \varepsilon, \delta)$ de nombres positifs, il existe un entier* N *tel que, si :*

1° *n est un entier plus grand que* N ;

2° $Z_1, \ldots, Z_n$ *sont n variables aléatoires complexes, indépendantes, quelconques ;*

3° $|E(Z_i)| \leqq a \; (i = 1, 2, \ldots, n)$;

4° $\mathrm{Var}(Z_i) = E(|Z_i|^2) \leqq b \; (i = 1, 2, \ldots, n)$;

$$\Pr\{|Z_1 + \ldots + Z_n| \leqq n(a + \varepsilon)\} \geqq 1 - \delta.$$

Pour démontrer ce lemme il suffit de remarquer que la variable aléatoire complexe $Z_1 + \ldots + Z_n$ a une espérance mathématique dont la valeur absolue ne dépasse pas na, et une variance au plus égale à nb. Donc

$$\Pr\{|Z_1 + \ldots + Z_n| \leqq n(a + \varepsilon)\} \geqq \Pr\{|Z_1 + \ldots + Z_n - E(Z_1 + \ldots + Z_n)| \leqq n\varepsilon\}$$

et une application de l'inégalité de Tchebichef fournit facilement le résultat désiré.

Lemme 2. — *Si, en plus de l'hypothèse générale faite dans ce paragraphe, on suppose que :*

4° $$\|X_i\| \leqq 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

alors, presque sûrement,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

tend fortement vers zéro lorsque $n \to +\infty$.

En effet, de l'inégalité triangulaire résulte que, pour toute suite $\{X_i\}$ satisfaisant à la condition 4°, $c\{X_i\} \leqq 1$. Donc, si nous définissons C par

$$C = \sup[c\{X_i\} \; \{X_i\} \text{ satisfaisant à } 1°, 2°, 3°, 4°],$$

nous savons que C existe et que $C \leqq 1$.

La convergence forte de $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ vers zéro, presque sûrement, est équivalente à $C = 0$, et c'est ce fait que nous allons démontrer. Utilisant les mêmes notations que dans la définition 1, choisissons un $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que le δ lui correspondant dans l'espace de Banach, uniformément convexe, $\mathfrak{X}$, considéré, satisfasse à $1 + \varepsilon < 2 - 2\delta$. Soit η un nombre positif arbitraire, de la définition de C résulte qu'on peut trouver une suite $\{U_i\}$ de $\mathfrak{X}$-variables aléatoires, satisfaisant à 1°, 2°, 3°, 4° et telles que $c\{U_i\} > C - \eta$. Définissons maintenant une suite $\{V_i\}$ de $\mathfrak{X}$-variables aléatoires par $2V_i = U_{2i} + U_{2i-1}$ on voit facilement que $\{V_i\}$ satisfait à 1°, 2°, 3°, 4° et que $c\{V_i\} = c\{U_i\}$. En outre, puisque les U_i sont symétriques et indépendantes,

$$\Pr\{\|U_{2i} + U_{2i-1}\| > 2 - 2\delta\} \leqq \Pr\{U_{2i} - U_{2i-1}\| < \varepsilon\} = \Pr\{\|U_{2i} + U_{2i-1}\| < \varepsilon\}$$
$$(i = 1, 2, \ldots),$$

soit

$$\Pr\{\|V_i\| > 1 - \delta\} \geqq \Pr\left\{\|V_i\| < \frac{\varepsilon}{2}\right\}, \qquad \text{pour tout } i.$$

Puisque $1 + \varepsilon < 2 - 2\delta$, il résulte que, quel que soit i, $E(\|V_i\|) \leqq 1 - \delta$. Puisque $\operatorname{Var}(\|V_i\|) \leqq \sup(\|V_i\|^2) \leqq 1$, quel que soit i, on peut appliquer le lemme 1 à la suite $\{\|V_i\|\}$ et au quadruple $(1 - \delta, 1, \eta, \eta)$, soit N l'entier correspondant. Choisissons un entier $k \geqq N$, et définissons une suite $\{W_i\}$ de $\mathfrak{X}$-variables aléatoires par

$$kW_i = V_{ki} + V_{ki-1} + \ldots + V_{ki-k+1} \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Comme précédemment, on voit facilement que $\{W_i\}$ satisfait à 1°, 2°, 3°, 4° et que

$$c\{W_i\} = c\{V_i\} = c\{U_i\}.$$

En outre, il résulte du lemme 1, que

$$\Pr\{\|W_i\| \leqq 1 - \delta + \eta\} \geqq 1 - \eta.$$

Définissons alors deux suites $\{Y_i\}$ et $\{Z_i\}$ de $\mathfrak{X}$-variables aléatoires par

$$\left.\begin{array}{llll} Y_i = W_i, & Z_i = 0, & \text{si} & \|W_i\| \leqq 1 - \delta + \eta \\ Y_i = 0, & Z_i = W_i, & \text{si} & \|W_i\| > 1 - \delta + \eta \end{array}\right\} i = 1, 2, \ldots.$$

Il est clair que $\{Y_i\}$ satisfait à 1°, 2°, 3° et, puisque $\|Y_i\| \leqq 1 - \delta + \eta$, il résulte de la définition de C que

$$c\{Y_i\} \leqq C(1 - \delta + \eta).$$

Il est clair également que $\{Z_i\}$ satisfait à 1°, 2°, 3°, 4° et que

$$\Pr\{\|Z_i\| > 0\} \leqq \eta.$$

Donc

$$\begin{aligned} c\{Z_i\} &= \operatorname*{ess.\,sup.}_{\Omega}\ \operatorname*{lim.\,sup.}_{n} \left\| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i \right\| \\ &\leqq \operatorname*{ess.\,sup.}_{\Omega}\ \operatorname*{lim.\,sup.}_{n} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \| Z_i \| \\ &\leqq \eta, \end{aligned}$$

ceci résultant de la loi forte des grands nombres pour des variables aléatoires réelles, puisque $E(\|Z_i\|) \leqq \eta$, quel que soit i.

Soit en rapprochant les résultats ci-dessus :

$$\begin{aligned} C - \eta \leqq c\{U_i\} = c\{V_i\} &= c\{W_i\} \\ &\leqq c\{Y_i\} + c\{Z_i\} \\ &\leqq C(1 - \delta + \eta) + \eta \\ &\leqq C - C\delta + 2\eta. \end{aligned}$$

Donc $C\delta \leqq 3\eta$, quel que soit η; par conséquent, puisque $\delta > 0$, on a bien $C = 0$.

LEMME 3. — *S'il existe un nombre* M, *indépendant de* i, *tel que* $\|X_i\| < M$, *presque-sûrement* $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ *tend fortement vers zéro lorsque* $n \to +\infty$.

La démonstration est évidente.

LEMME 4. — *Si, quel que soit* i, $\operatorname{Var}(X_i) \leqq 1$, *presque sûrement* $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ *tend fortement vers zéro lorsque* $n \to +\infty$.

Choisissons un entier positif arbitraire, k, et posons

$$\left.\begin{array}{lll} Y_i = X_i, & Z_i = 0 & \text{si } \|X_i\| \leqq k \\ Y_i = 0, & Z_i = X_i & \text{si } \|X_i\| > k \end{array}\right\} \quad i = 1, 2, \ldots.$$

Puisque

$$E(\|X_i\|^2) \leqq 1, \qquad E(\|Z_i\|^2) \leqq 1$$

et puisque

$$E(k\|Z_i\|) \leqq E(\|Z_i\|^2) \leqq 1, \qquad E(\|Z_i\|) \leqq \frac{1}{k}, \quad \text{quel que soit } i.$$

Donc

$$
\begin{aligned}
c\{Z_i\} &= \operatorname*{ess.\,sup.}_{\Omega}\ \operatorname*{lim.\,sup.}_{n} \left\| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i \right\| \\
&\leq \operatorname*{ess.\,sup.}_{\Omega}\ \operatorname*{lim\,sup.}_{n} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \| Z_i \| \\
&\leq \frac{1}{k}
\end{aligned}
$$

par application de la loi forte des grands nombres pour des variables aléatoires réelles. Du lemme 3 résulte que

$$c\{Y_i\} = 0,$$

donc

$$c\{X_i\} \leq c\{Y_i\} + c\{Z_i\} \leq \frac{1}{k}$$

quel que soit k, donc

$$c\{X_i\} = 0.$$

Lemme 5. — *S'il existe un nombre* M, *indépendant de* i, *tel que*

$$\mathrm{Var}(X_i) \leq M,$$

presque sûrement $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ *tend fortement vers zéro, lorsque* $n \to +\infty$.

La démonstration est évidente.

4. Démonstration du théorème 1. — Considérons l'espace mesuré produit $\Omega \times \Omega$, de (Ω, B, Pr) par lui-même. Définissons dans $\Omega \times \Omega$ la suite $\{Y_i\}$ de $\mathfrak{X}$-variables aléatoires par

$$Y_i(\omega_1, \omega_2) = X_i(\omega_1) - X_i(\omega_2) \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Il est facile de voir que les Y_i sont indépendantes, que chaque Y_i est symétrique et a une espérance mathématique nulle. En outre

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega\times\Omega} \| Y_i \|^2\, d(\omega_1, \omega_2) &= \int_{\Omega\times\Omega} \| X_i(\omega_1) - X_i(\omega_2) \|^2\, d(\omega_1, \omega_2) \\
&\leq \int_{\Omega\times\Omega} (\| X_i(\omega_1) \| + \| X_i(\omega_2) \|)^2\, d(\omega_1, \omega_2) \\
&\leq \int_{\Omega\times\Omega} [2\, \| X_i(\omega_1) \|^2 + 2\, \| X_i(\omega_2) \|^2]\, d(\omega_1, \omega_2) \\
&\leq 4\,M
\end{aligned}
$$

de sorte que $\operatorname{Var}(Y_i)$ est borné uniformément et que, en vertu du lemme 5

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i(\omega_1) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i(\omega_2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i(\omega_1, \omega_2)$$

tend fortement vers zéro lorsque $n \to +\infty$, presque sûrement, c'est-à-dire pour presque tout (ω_1, ω_2) dans $\Omega \times \Omega$. Lorsqu'il en est ainsi, nous dirons que ω_1 et ω_2 sont *cohérents;* il est évident que la cohérence est une relation d'équivalence et, il résulte des remarques ci-dessus, qu'une des classes d'équivalence contient presque tout Ω ; soit Ω_0 cet ensemble de points et ω_0 un élément de Ω_0. Il suffit maintenant de démontrer que $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i(\omega_0)$ tend fortement vers zéro lorsque $n \to +\infty$. Soit $\varepsilon > 0$, arbitraire ; pour n suffisamment grand, disons plus grand que N_1, on a

$$(1) \qquad \Pr\left\{\left\| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i(\omega_0) \right\| < \varepsilon \right\} > \quad .$$

$x^\star$ désignant une fonctionnelle linéaire bornée quelconque sur $\mathfrak{X}$ telle que $\|x^\star\| \leqq 1$, les variables aléatoires complexes $x^\star(X_i)$ ont toutes une espérance mathématique nulle et une variance au plus égale à M. Donc, par application du lemme 1, il existe un nombre, soit N_2, correspondant au quadruple $\left(\varepsilon, M, \varepsilon, \frac{1}{2}\right)$, tel que si $n > N_2$.

$$(2) \qquad \Pr\left\{\left| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x^\star(X_i) \right| \leqq \varepsilon + \varepsilon \right\} > \frac{1}{2},$$

uniformément pour tout $x^\star$, tel que $\|x^\star\| \leqq 1$.

Choisissons une fonctionnelle arbitraire $x^\star$, telle que $\|x^\star\| \leqq 1$, et un entier arbitraire $n_0 > N_1, N_2$, on a

$$(1) \qquad \Pr\left\{\left\| \frac{1}{n_0}\sum_{i=1}^{n_0} X_i - \frac{1}{n_0}\sum_{i=1}^{n_0} X_i(\omega_0) \right\| < \varepsilon \right\} > \frac{1}{2}$$

et

$$(2) \qquad \Pr\left\{\left| \frac{1}{n_0}\sum_{i=1}^{n_0} x^\star(X_i) \right| \leqq 2\varepsilon \right\} > \frac{1}{2}.$$

Puisque les deux probabilités ci-dessus sont supérieures à $\frac{1}{2}$, il existe un ω_1, qui peut dépendre du choix de n_0 et de $x^\star$, pour lequel les inégalités (1) et (2) sont simultanément vérifiées. On a

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n_0}\sum_{i=1}^{n_0} x^\star(\mathrm{X}_i(\omega_0))\right| &\leq \left|\frac{1}{n_0}\sum_{i=1}^{n_0} x^\star(\mathrm{X}_i(\omega_0)-\mathrm{X}_i(\omega_1))\right| + \left|\frac{1}{n_0}\sum_{i=1}^{n_0} x^\star(\mathrm{X}_i(\omega_1))\right| \\ &\leq \left\|\frac{1}{n_0}\sum_{i=1}^{n_0}(\mathrm{X}_i(\omega_0)-\mathrm{X}_i(\omega_1))\right\| + 2\varepsilon \\ &< 3\varepsilon,\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x^\star(\mathrm{X}_i(\omega_0))\right| < 3\varepsilon,$$

pour tout $x^\star$ tel que $\|x^\star\| \leq 1$ si $n > \mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2$. Par application du théorème de Hahn-Banach, on voit que

$$\left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i(\omega_0)\right\| < 3\varepsilon$$

si n est assez grand, le théorème en résulte puisque ε est arbitraire.

5. **Un contre-exemple.** — Nous allons maintenant présenté un espace de Banach réflexif, partout convexe (*cf.* Définition 2), possédant une base au sens le plus fort [8], et pour lequel le théorème 1 est faux. La façon dont le théorème devient inexact fait comprendre l'importance de l'hypothèse de convexité uniforme.

Exemple. — Soit $\mathfrak{A}$ l'espace vectoriel complexe des suites $\{z_i\}$ de nombres complexes, telles que

$$\|\{z_i\}\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty}\left[\sum_{i=2^{j-1}}^{2^j-1} |z_i|^{1+\frac{1}{j}}\right]^{\frac{2j}{1+j}} < +\infty.$$

On voit facilement que cet espace de Banach est réflexif et partout convexe, en outre, si l'on désigne par u_i la suite dont le $i^{\text{ième}}$ terme est

[8] C'est-à-dire tout élément est représentable de façon unique par une somme finie ou infinie de multiples complexes des éléments de la base.

égal à 1 dont tous les autres sont nuls, tout élément de $\mathfrak{A}$ est représentable de façon unique par une somme infinie de multiples complexes de ces vecteurs unités u_i. Définissons une suite $\{U_i\}$ de variables aléatoires, indépendantes, et telles que,

$$\Pr\{U_i = u_i\} = \Pr\{U_i = -u_i\} = \frac{1}{2} \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Pour tout entier positif n et tout $\omega \in \Omega$, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U_i$ est une suite $y(n, \omega)$ dont les n premiers termes sont égaux à $\pm\frac{1}{n}$ et dont tous les autres sont nuls. Choisissons k tel que $2^k \leqq n < 2^{k+1}$, on a

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U_i \right\|^2 &= \sum_{j=1}^{\infty}\left[\sum_{i=2^{j-1}}^{2^j-1} |y(n, \omega)_i|^{1+\frac{1}{j}}\right]^{\frac{2j}{1+j}} \\
&\geqq \left[\sum_{i=2^{k-1}}^{2^k-1}\left(\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{k}}\right]^{\frac{2k}{1+k}} \\
&> \left[2^{k-1}\left(\frac{1}{2^{k+1}}\right)^{1+\frac{1}{k}}\right]^{\frac{2k}{1+k}} = 2^{\frac{-6k-2}{k+1}} \\
&> 2^{-6}.
\end{aligned}$$

Donc, quels que soient n et ω,

$$\left\| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U_i \right\| > \frac{1}{8},$$

ce qui est en contradiction avec le théorème 1.