ANNALES DE L'I. H. P.

M.S. BARTLETT

Processus stochastiques ponctuels

Annales de l'I. H. P., tome 14, nº 1 (1954-1955), p. 35-60
<http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1954__14_1_35_0>

© Gauthier-Villars, 1954-1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P. » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Processus stochastiques ponctuels

par

M. S. BARTLETT,
Professeur à l'Université de Manchester.

---

1. **Les processus ponctuels et leur spécification.** — L'idée d'événements aléatoires dans le temps, se produisant indépendamment ou non d'événements antérieurs, est habituelle dans la théorie des probabilités, et les cas simples où il sera traité d'événements ponctuels, c'est-à-dire d'événements sans prolongements dans le temps, ne créeront aucune difficulté théorique. Si nous considérons des événements indépendants ayant une densité constante stochastique ν d'apparition dans le temps, il est bien connu que le nombre total $N(t-t_0)$ d'événements qui se produisent dans l'intervalle de t_0 à t suit la loi (discrète) de Poisson avec $\nu(t-t_0)$ comme moyenne, ou d'une manière équivalente, la loi de probabilité de l'intervalle de temps entre deux événements consécutifs dont l'expression est l'exponentielle (continue) $\nu e^{-\nu\tau} d\tau$. On peut considérer ce processus comme stationnaire dans le sens que ces caractéristiques de la loi d'une suite d'événements restent invariables par rapport à une translation sur l'axe de temps. M. le Professeur Wold (1949) en particulier a montré comment un processus ponctuel stationnaire bien plus compliqué peut être étudié au moyen de variables associées, telles que τ. Par exemple, pour une loi arbitraire de τ ($\tau > 0$) nous arrivons à un processus simple de « renouvellement »; Wold considère de plus le cas où τ dépend de l'intervalle précédent.

Comme classe de processus ponctuels nettement différents nous avons les processus multiplicatifs et non stationnaires que l'on rencontre en Physique et en Biologie, lorsque les événements représentent les « naissances » de nouveaux individus. Ici, encore, on peut étudier ces

processus au moyen des variables convenables telles que le nombre total d'individus $N(t)$, ou l'intervalle entre les naissances, etc. Cependant, en Physique et en Biologie de nombreux processus concernent le mouvement ou la multiplication de particules ou d'individus dépendant d'un ou plusieurs paramètres continus, comme les positions ou énergies des particules, ou encore les âges des individus. La réalisation, à chaque instant de ce genre de processus consiste en un nombre de points isolés dans l'espace, de points le long de l'axe d'énergie, etc. Ce sont surtout ces processus-là que nous allons traiter avec des exemples dans nos conférences. Pour ceux-ci leur caractère « ponctuel » est plus fondamental que pour les processus ponctuels liés à l'axe du temps. Cependant, nous verrons plus tard que les méthodes qui ont été développées pour leur étude peuvent parfois être utiles dans ce dernier cas.

Considérons le cas de particules ayant leur énergie propre dans un champ continu ; d'autres cas comme l'âge des individus ou les coordonnées de « position » de particules ou d'individus peuvent être traités de la même façon. En effet, il est toujours possible de considérer de tels paramètres comme de nouveaux paramètres continus de quelque processus stochastique à plusieurs dimensions (et dans le cas, par exemple, de plantes distribuées « statiquement » dans un champ, ce sera la méthode adoptée). On les considère cependant plus souvent comme un ensemble évoluant de variables aléatoires. L'inconvénient immédiat c'est qu'à toute valeur donnée de l'énergie ε on peut attribuer non pas une probabilité non nulle mais seulement une densité de probabilité. A première vue cela ne peut pas apparaître comme un grand obstacle, mais il faut noter que l'intégration de la densité ne peut donner que l'espérance mathématique (du premier ordre) pour des nombres de particules dont les énergies se trouvent dans des intervalles définis de ε, alors que nous aurons souvent à étudier également les fluctuations de ces nombres. Dans leurs recherches sur ce problème posé par la cascade produite par les rayons cosmiques, Bhabha et Ramakrishnan introduisent des fonctions de densité d'ordre supérieur, que Ramakrishnan appelle des densités de produits. Une méthode assez semblable a été introduite indépendamment dans la théorie stochastique de la croissance de population par D. G. Kendall qui a examiné sa relation avec l'emploi de la fonctionnelle caractéristique. Nous reviendrons sur ce rapport tout à l'heure, mais rappelons d'abord la méthode directe de Ramakrishnan.

Supposons que $N(\varepsilon, t)$ désigne le nombre total de particules à l'instant t avec une énergie inférieure ou égale à ε. Nous supposerons que l'équation de densité existe :

$$f_1(\varepsilon, t)\, d\varepsilon = E\{ d_\varepsilon N(\varepsilon, t)\},$$

de sorte que la probabilité d'une particule dans $(\varepsilon, \varepsilon + \delta\varepsilon)$ est $f_1\, \delta\varepsilon + o(\delta\varepsilon)$ et que la probabilité d'en avoir plus d'une est $o(\delta\varepsilon)$. Il est possible d'envisager des situations où cette condition n'est pas satisfaite, par exemple si deux particules de même énergie peuvent surgir avec une probabilité non nulle. La théorie peut naturellement être étendue, si cela est nécessaire, pour englober ces possibilités, mais elles ne se présentent pas d'habitude dans les applications. Comme je l'ai dit, l'intégrale de $f_1(\varepsilon)$ par rapport à ε donne simplement la moyenne des nombres de particules dans l'intervalle d'intégration (la loi d'addition ne s'applique pas dans sa forme simple, car, en général, ces événements ne sont pas incompatibles). De toute façon, si nous écrivons l'équation du second ordre des densités de produits :

$$f_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2)\, d\varepsilon_1\, d\varepsilon_2 = E\{ d N(\varepsilon_1)\, d N(\varepsilon_2)\};$$

ceci peut s'interpréter comme une probabilité d'avoir simultanément une particule en $(\varepsilon_1, \varepsilon_1 + d\varepsilon_1)$ et une autre en $(\varepsilon_2, \varepsilon_2 + d\varepsilon_2)$ (pour des intervalles disjoints inconditionnellement du nombre de particules dans d'autres intervalles de ε). Remarquons que lorsque $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$:

$$E\{[d N(\varepsilon_1)]^2\} = E\{ d N(\varepsilon_1)\} = f_1(\varepsilon_1)\, d\varepsilon_1,$$

et la formule pour le moment du second ordre du nombre $\Delta N(\varepsilon)$ dans un intervalle non nul $(\varepsilon, \varepsilon + h)$ devient par conséquent

$$\begin{aligned} E\{[\Delta N(\varepsilon)]^2\} &= \int_\varepsilon^{\varepsilon+h} \int_\varepsilon^{\varepsilon+h} E\{ d N(\varepsilon_1)\, d N(\varepsilon_2)\} \\ &= \int_\varepsilon^{\varepsilon+h} f_1(\varepsilon_1)\, d\varepsilon_1 + \int_\varepsilon^{\varepsilon+h} \int_\varepsilon^{\varepsilon+h} f_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2)\, d\varepsilon_1\, d\varepsilon_2. \end{aligned}$$

Les densités f_1 et f_2 peuvent toujours être considérées comme des densités de moment factoriel, car l'équation précédente est équivalente à

$$E\{\Delta N(\varepsilon)[\Delta N(\varepsilon) - 1]\} = \int_\varepsilon^{\varepsilon+h} \int_\varepsilon^{\varepsilon+h} f_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2)\, d\varepsilon_1\, d\varepsilon_2.$$

Nous pourrons de même définir des densités d'ordre supérieur, le cas dégénéré se produisant chaque fois qu'au moins deux des éléments différentiels coïncident. Pour voir la relation entre f_r et le moment factoriel d'ordre r de N dans un intervalle non nul de ε, il suffit de remarquer que les parties positives de f_r et du moment factoriel d'ordre r de N doivent disparaître en même temps quand le nombre des particules dans un intervalle donné ε est inférieur ou égal à $r-1$. La relation générale entre $E\{[\Delta N(\varepsilon)]^r\}$ et f_r est

$$E\{[\Delta N(\varepsilon)]^r\} = \sum_{s=1}^{r} c_s^{(r)} \int \cdots \int f_s \, d\varepsilon_1 \, d\varepsilon_2 \ldots d\varepsilon_s,$$

où les coefficients $c_s^{(r)}$ sont définis par les relations

$$n^r = \sum_{s=1}^{r} c_s^{(r)} n(n-1)\ldots(n-s+1).$$

Les coefficients $c_s^{(r)}$ en fonction des « différences finies de zéro » sont $\frac{\Delta^s 0^r}{s!}$ et ont été calculées pour r, $s = 2 - 25$ par W. L. Stevens.

Dans le cas de particules n'ayant aucune interdépendance entre les différents intervalles (un nombre *n déterminé* de particules indépendantes ne satisfont pas à cette propriété, car si une particule donnée n'est pas dans un certain intervalle, il est plus probable qu'elle se trouve dans un autre), nous avons

$$f_r(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r) = f_1(\varepsilon_1) f_1(\varepsilon_2) \ldots f_1(\varepsilon_r),$$

d'où le moment factoriel d'ordre r de ΔN donné par $[E\{\Delta N\}]^r$, une propriété qui définit la loi de Poisson.

Une base mathématique plus rigoureuse s'adaptant aux processus et aux propriétés ci-dessus a été donnée par Bhabha (1950). Supposons l'existence de r particules dont les énergies sont $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_2, \varepsilon_r$ dans un espace $\mathcal{E}_r$ à r dimensions. Soit $\mathcal{S}_r$ un ensemble mesurable en $\mathcal{E}_r$. Soit $\mathcal{E}$ la somme de tous les $\mathcal{E}_r$ et $\mathcal{S}$ la somme de tous les $\mathcal{S}_r$. Les axiomes ou les hypothèses qui ont été faits sont les suivants :

A chaque ensemble $\mathcal{S}$ en $\mathcal{E}$ est associée une mesure de probabilité $P(\mathcal{S})$, c'est-à-dire que $0 \leq P(\mathcal{S}) \leq 1$, et que $P(\mathcal{S})$ est une fonction complètement additive telle que :

1° $P(\mathcal{E}_r)$ existe pour tout r, et que

$$P(\mathcal{E}) = \sum_{r=0}^{\infty} P(\mathcal{E}_r) = 1;$$

2° la série $\Sigma r^n P(\mathcal{E}_r)$ converge pour tout $n \geqq 0$;

3° $P(\mathcal{S}_r)$ est une fonction absolument continue des ensembles $\mathcal{S}_r$ dans $\mathcal{E}_r$, c'est-à-dire que si $\mathcal{S}_r$ est un ensemble de mesure (L) égale à $M(\mathcal{S}_r)$, alors $P(\mathcal{S}_r) \to 0$ lorsque $M(\mathcal{S}_r) \to 0$.

Pour étudier, d'autre part, la relation de la fonction de densité que nous avons introduite, avec l'emploi de la fonctionnelle caractéristique, nous allons définir une fonctionnelle caractéristique complète par rapport à $N(\varepsilon)$ à l'instant t :

$$C(\varphi(\varepsilon), t) = E\{\exp i \int \varphi(u)\, dN(u)\}.$$

La fonctionnelle caractéristique a été introduite dans l'étude des processus stochastiques pour la première fois par Le Cam et Bochner (1947) (1).

Il faut remarquer, pourtant, qu'ici C est une fonctionnelle par rapport à ε, et non pas à t. Elle comprend, automatiquement toutes les densités de produits. Comme $E\{dN\}$ est de l'ordre de $d\varepsilon$, etc., il est commode d'employer la notation indiquée par Hopf pour les dérivées fonctionnelles, et d'écrire, parallèlement aux formules de moments pour fonctions caractéristiques,

$$\left[\frac{\partial C(\varphi(\varepsilon))}{\partial \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon}\right]_{\varphi(\varepsilon)=0} = f_1(\varepsilon),$$

$$\left[\frac{\partial^2 C(\varphi(\varepsilon))}{\partial \varphi(\varepsilon_1)\, \partial \varphi(\varepsilon_2)\, d\varepsilon_1\, d\varepsilon_2}\right]_{\varphi(\varepsilon)=0} = f_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \qquad (\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2), \qquad \ldots.$$

Cependant, si l'on connaît C, on peut l'utiliser pour les calculs directs des expressions $E\{(\Delta N)^2\}$, sans avoir recours aux densités f_r. C'est ainsi que, si l'on pose $\varphi(u) = \varnothing$ quand u prend des valeurs entre ε et $\varepsilon + h$, et zéro ailleurs, et si l'on développe C en série de φ, on obtient

$$C(\varphi) = 1 + i\varphi E\{\Delta N\} - \frac{1}{2}\varphi^2 E\{(\Delta N)^2\} \ldots.$$

(1) Toutefois, dans un travail non publié, E. Hopf l'a utilisée dès 1940 (*voir* Hopf, 1952).

2. **Processus ponctuels multiplicatifs.** — Avant de prendre un exemple d'un tel processus, il nous semble utile de rappeler la définition fondamentale et les équations d'un processus multiplicatif dans le sens pris ici. Celui-ci est défini comme un processus dans lequel chaque particule ou chaque individu produit, indépendamment des autres, un nombre d'individus dans la génération suivante. Si l'on représente ces individus, qui pourront être de plusieurs types, par une fonction génératrice de probabilité $G^{(r)}(\mathbf{z})$ quand l'individu initial est du type r, ou par le vecteur $\mathbf{G}(\mathbf{z})$ pour les individus de tous les k types, alors la relation de récurrence fondamentale pour la répartition des individus de la $n^{\text{ième}}$ génération (pour un individu de la génération zéro) a deux formes alternatives (*voir*, par exemple, Bartlett, 1951)

$$\underline{\Pi}_n(\mathbf{z}) = \underline{\Pi}_{n-1}(\mathbf{G}(\mathbf{z})) = \mathbf{G}(\underline{\Pi}_{n-1}(\mathbf{z}))$$

en fonction de la génératrice de probabilité $\Pi_s^{(r)}(\mathbf{z})$ pour un individu initial, ou de $\underline{\Pi}_n(\mathbf{z})$ pour tous les types initiaux. Quand, pour un temps continu, nous remplaçons les générations par le temps t, et supposons que

$$\mathbf{G}(\mathbf{z}) - \mathbf{z} = \mathbf{g}(\mathbf{z})\,\delta t + o(\delta t),$$

les relations de récurrence deviennent respectivement

$$\frac{\partial \underline{\Pi}_t(\mathbf{z})}{\partial t} = \left(\sum_{r=1}^{k} g^{(r)}(\mathbf{z}) \frac{\partial}{\partial z_r}\right) \underline{\Pi}_t(\mathbf{z})$$

et

$$\frac{\partial \underline{\Pi}_t(\mathbf{z})}{\partial t} = \mathbf{g}(\Pi_t(\mathbf{z}))$$

Ces deux équations correspondent aux équations « Forward » et « Backward » de Kolmogoroff pour le processus de Markoff. Je les appellerai équation « avancée » et « retardée ».

Supposons maintenant que $\mathbf{g}(\mathbf{z})$ soit remplacée par $g(z(u) \mid v)$. Les deux équations donnent alors, formellement,

$$\frac{\partial \Pi_t(z(u) \mid v)}{\partial t} = \int g(z(u) \mid w) \left[\frac{\partial \Pi_t(z(u) \mid v)}{\partial z(w)\, dw}\right] dw$$

et

$$\frac{\partial \Pi_t(z(u) \mid v)}{\partial t} = g(\Pi_t(z(u) \mid v)),$$

où $\Pi_t(z(u) \mid v)$ est la fonctionnelle génératrice de probabilité à l'instant t pour un individu initial de type v, associée à la fonctionnelle caractéristique définie auparavant pour les processus ponctuels par l'identification $i\varphi(n) = \log z(u)$. Je n'essayerai pas de justifier entièrement ces extensions formelles; au moins pour l'équation retardée, il n'y a évidemment pas de difficulté.

Exemples. — 1° *Le simple processus de renouvellement.* — Supposons qu'il n'y ait pas de multiplication, la probabilité qu'un « article » individuel ait besoin de renouvellement à un instant donné dépendant de son âge. Si x est, alors l'âge de l'article individuel à l'instant zéro, nous supposons que les transitions possibles dans l'intervalle $(t, t + dt)$ changent $z(x)$ en $z(0)$ avec la probabilité $\mu(x)\,dt$ et en $z(x + dt)$ avec la probabilité $1 - \mu(x)\,dt$. Donc

$$g(z(x)) = \mu(x)[z(0) - z(x)] + \frac{\partial z(x)}{\partial x},$$

et la deuxième équation devient ainsi

$$\frac{\partial \Pi_t(z(u) \mid x)}{\partial t} = \mu(x)[\Pi_t(z(u) \mid 0) - \Pi_t(z(u) \mid x)] + \frac{\partial \Pi_t(z(u) \mid x)}{\partial x}.$$

On suppose que le « taux de mortalité » $\mu(x)$ pour un article à l'âge x soit fini pour tout x, et l'on aperçoit sa relation avec la répartition d'âge « à la mort » (c'est-à-dire, quand il devient hors d'usage), $f(u)\,du$, en écrivant l'équation ci-dessus sous la forme d'équation intégrale :

$$\Pi_t(z(u) \mid x) = \int_0^t \Pi_{t-y}(z(u) \mid 0)\mu(y + x)\, e^{-\int_0^y \mu(v+x)\,dv}\, dy$$
$$+ z(x + t)\, e^{-\int_0^t \mu(u+x)\,du},$$

d'où l'on tire aisément

$$f(x) = \mu(x)\, e^{-\int_0^x \mu(u)\,du}.$$

Il est entendu que l'intégrale dans l'exponentielle est divergente, ce qui donne

$$\int_0^\infty f(u)\,du = 1,$$

L'équation précédente en Π_t peut être résolue en fonction de sa trans-

formée de Laplace (Bartlett, 1951), mais cela ne nous donne aucun résultat qu'on ne puisse obtenir par des méthodes plus directes.

2° *Croissance de population.* — Le processus multiplicatif où les taux $\lambda(x)$ et $\mu(x)$ de natalité et de mortalité dépendent tous les deux de l'âge x, donne un exemple plus complexe (*voir* D. G. Kendall, 1952). Nous avons dans ce cas-ci, avec la représentation formelle qu'on a présentée ici,

$$g(z(u)\,|\,x) = \lambda(x)[z(x)\,z(0) - z(x)] + \mu(x)[1 - z(x)] + \frac{\partial z(x)}{\partial x},$$

et donc

$$\frac{\partial \Pi_t(x)}{\partial t} = \lambda(x)[\Pi_t(x)\Pi_t(0) - \Pi_t(x)] + \mu(x)[1 - \Pi_t(x)] + \frac{\partial \Pi_t(x)}{\partial x},$$

où, pour des raisons de commodité, nous avons écrit $\Pi_t(z(u)\,|\,x)$ sous la foéme $\Pi_t(x)$. Dans sa forme équivalente l'équation intégrale est

$$\begin{aligned}\Pi_t(x) = \int_0^t & [\mu(x+u) + \lambda(x+u)\Pi_{t-u}(x+u)\Pi_{t+u}(0)] \\ & \times q(x+u\,|\,x)\,du + q(x+t\,|\,x)z(x+t),\end{aligned}$$

où $q(x+t\,|\,x)$, qui représente la probabilité de l'absence de toute naissance et de toute mortalité dans la période t pour un individu à l'âge x à l'instant $t = 0$, est déterminé par la relation

$$q(x+t\,|\,x) = \exp\left\{-\int_x^{x+t} [\lambda(u) + \mu(u)]\,du\right\}.$$

Ce problème de croissance de population a été étudié en détail par Kendall (1949, 1950, 1952), et une solution complète pour la fonctionnelle caractéristique a été obtenue dans le cas particulier lorsque $\lambda(x)$ et $\mu(z)$ sont des constantes. On ne connaît pas dans le cas général la solution sous une forme fermée, mais néanmoins une forme itérée peut parfois être utile quand la période de temps t n'est pas trop longue par rapport à la période moyenne d'une génération. On peut tout de suite écrire cette solution itérée en fonction de l'équation intégrale des *morts* seulement, puisque cette équation s'écrit

$$\Pi_t(x) = \int_0^t \mu(x+u)\,p(x+u\,|\,x)\,\psi(u;x)\,du + p(x+t\,|\,x)\,z(x+t)\,\psi_t(t;x),$$

où

$$p(x+t\,|\,x) = \exp\left\{-\int_x^{x+t} \mu(u)\,du\right\}$$

est la probabilité pour qu'un individu initial à l'âge x ne meure pas dans la période $(0, t)$, et où $\psi_t(u\,;\,x)$ représente la fonctionnelle à l'instant t pour la progéniture née entre zéro et u pour un individu de l'âge initial x, *qui ne meurt pas*. Or, un tel individu peut être considéré comme une « source d'immigration » de la progéniture, de sorte que (*voir* Bartlett, 1949)

$$\psi_t(u;\,x) = \exp\left\{-\int_0^u \lambda(x+v)[\Pi_{t-v}(0)-1]\,dv\right\}.$$

L'équation intégrale que l'on obtient en substituant cette expression pour ψ_t dans la nouvelle équation intégrale pour $\Pi_t(x)$, a l'avantage que ψ_t est composée de contributions des nouvelles naissances.

Si l'on désigne par $\Pi^{(n)}$ la contribution à Π de toutes les générations jusqu'à la $n^{\text{ième}}$ (l'ancêtre initial représente la $0^{\text{ième}}$ génération), on devra écrire $\Pi^{(n-1)}$ dans le second membre. Par conséquent, la solution [2] itérée de la première équation intégrale est

$$\Pi_t^{(n)}(x) = z(x+t)\,p(x+t\,|\,x)\exp\left\{-\int_0^t \lambda(x+u)[\Pi_{t-u}^{(n-1)}(0)-1]\,du\right\}$$
$$+\int_0^t \mu(x+u)\,p(x+u\,|\,x)\exp\left\{-\int_0^u \lambda(x+v)[\Pi_{t-v}^{(n-1)}(0)-1]\,dv\right\}du.$$

3° *Cascades de nucléons.* — Revenons maintenant au contexte physique des particules avec l'énergie ε dans un domaine continu. Considérons, par exemple, un problème de gerbes en cascades où une particule d'un type donné et d'énergie ε produit, après collision, deux particules du même type, d'énergies ε_1 et ε_2; la probabilité de cet événement dans un intervalle dt est

$$w(\varepsilon_1,\,\varepsilon_2\,|\,\varepsilon)\,d\varepsilon_1\,d\varepsilon_2\,dt \qquad (\varepsilon_1 \leqq \varepsilon_2,\ \varepsilon_1+\varepsilon_2 \leqq \varepsilon).$$

C'est le type de transition qui se présente dans le problème de la « cascade de nucléons ». Dans le problème des cascades d'électrons-photons, outres les domaines continus des énergies, il y a deux types de particules, l'électron (positif ou négatif) et le photon. Les principes pour étudier un tel problème sont, pourtant, les mêmes que ceux employés dans le problème relativement simple des cascades de nucléons

---

[2] De telles solutions itérées sont toujours possibles pour d'autres processus multiplicatifs comme, par exemple, la cascade de nucléons, ou l'approximation multiplicative au processus d'épidémie du paragraphe 3.

(*voir*, par exemple, Janossy, 1950 ; Bartlett et Kendall, 1951, et d'autres articles cités ; pour un récent compte rendu des travaux, *voir* Rankin, 1953). Pour ce dernier problème nous avons

$$g(z(u) \mid \varepsilon) = \iint w(\varepsilon_1, \varepsilon_2 \mid \varepsilon)[z(\varepsilon_1)\, z(\varepsilon_2) - z(\varepsilon)]\, d\varepsilon_1\, d\varepsilon_2 ;$$

les équations avancée et retardée peuvent s'écrire immédiatement. On ne connaît pas leur solution, au moins sous une forme explicite, mais elles comprennent les équations des moments, qui ont été résolues avec l'hypothèse supplémentaire

$$w(\varepsilon_1, \varepsilon_2 \mid \varepsilon)\, d\varepsilon_1\, d\varepsilon_2 = w'(\eta_1, \eta_2)\, d\eta_1\, d\eta_2,$$

où

$$\varepsilon_1 = \varepsilon\eta_1, \qquad \varepsilon_2 = \varepsilon\eta_2.$$

Il est commode d'écrire

$$\begin{aligned} \omega(\varepsilon_1, \varepsilon_2) &= \tfrac{1}{2}[w(\varepsilon_1, \varepsilon_2) + w(\varepsilon_2, \varepsilon_1)], \\ \int \omega(\varepsilon_1, \varepsilon_2)\, d\varepsilon_1 &= \tfrac{1}{2}\,\Omega(\varepsilon_2), \\ \iint \omega(\varepsilon_1, \varepsilon_2)\, d\varepsilon_1\, d\varepsilon_2 &= w(\varepsilon). \end{aligned}$$

Alors les équations avancées pour les deux premières densités de produits deviennent

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1(x \mid \varepsilon)}{\partial t} &= \int f_1(u \mid \varepsilon)\, \Omega(x \mid u)\, du - w(x) f_1(x \mid \varepsilon), \\ \frac{\partial f_2(x, y \mid \varepsilon)}{\partial t} &= \int f_2(u, y \mid \varepsilon)\, \Omega(x \mid u)\, du + \int f_2(x, u \mid \varepsilon)\, \Omega(y \mid u)\, du \\ &\quad + 2\int f_1(u \mid \varepsilon)\, \omega(x, y \mid u)\, du - [w(x) + w(y)] f_2(x, y \mid \varepsilon), \end{aligned}$$

et les équations retardées,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1(x \mid \varepsilon)}{\partial t} &= \int f_1(x \mid u)\, \Omega(u \mid \varepsilon)\, du - w(\varepsilon) f_1(x \mid \varepsilon), \\ \frac{\partial f_2(x, y \mid \varepsilon)}{\partial t} &= \int f_2(x, y \mid u)\, \Omega(x \mid \varepsilon)\, du - w(\varepsilon) f_2(x, y \mid \varepsilon) \\ &\quad + 2\iint f_1(x \mid u) f_1(y \mid v)\, \omega(x, y \mid v)\, du\, dv. \end{aligned}$$

En tenant compte des hypothèses sur $w(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ déjà indiquées, et en

prenant la transformée de Mellin de f_1 et f_2 dans les équations avancées par rapport à x et à y pour ε donné, on obtient

$$\frac{\partial \nu_1}{\partial t} = \nu_1(2\alpha(1, s_1) - 1),$$
$$\frac{\partial \nu_2}{\partial t} = 2\nu_2(\alpha(1, s_1) + \alpha(1, s_2) - 1) + 2\nu_1(s_1 + s_2 - 1)\alpha(s_1, s_2),$$

où

$$\nu_1(s_1) = \int f_1(x \mid \varepsilon)\, x^{s_1-1}\, dx,$$
$$\nu_2(s_1, s_2) = \iint f_2(x, y \mid \varepsilon)\, x^{s_1-1} y^{s_2-1}\, dx\, dy,$$
$$\alpha(s_1, s_2) = \iint \omega'(\eta_1, \eta_2)\, \eta_1^{s_1-1} \eta_2^{s_2-1}\, d\eta_1\, d\eta_2,$$

et où, pour la commodité, l'échelle de t sera choisie telle que $\alpha(1, 1) = 1$. La solution de ces équations est

$$\nu_1 = \varepsilon^{s_1-1} e^{-[1-2\alpha(1, s_1)]t},$$
$$\nu_2 = \frac{2\alpha(s_1, s_2)\, \varepsilon^{s_1+s_2-2} e^{-[1-2\alpha(1, s_1+s_2-1)]t - [2-2\alpha(1, s_1)-2\alpha(1, s_2)]t}}{1 - 2\alpha(1, s_1) - 2\alpha(1, s_2) + 2\alpha(1, s_1+s_2-1)}.$$

Les transformées ν_r des densités d'ordres supérieurs peuvent être obtenues en succession par une extension de ces méthodes (*voir*, par exemple, Messel, 1952 ; Ramakrishnan, 1952).

3. **Processus ponctuels de type plus général.** — Les processus multiplicatifs que nous venons de traiter sont des cas particuliers des processus de Markoff. Ceux-ci constituent la classe des processus pour lesquels, pour ainsi dire, le passé est sans importance pour le futur quand on connaît l'état présent du processus. J'ai suggéré (*voir*, par exemple, Bartlett, 1949 ; Moyal, 1949) pour ces processus une équation symbolique assez générale de la forme

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \Phi\left(i\varphi, \frac{\partial}{\partial i\varphi}, t\right) C$$

où $C(\varphi) \equiv E\{\exp(i\varphi X(t))\}$ pour une seule variable $\left(\text{et l'opérateur } \frac{\partial}{\partial i\varphi}\right.$ n'opère que sur $\left.C\right)$. La fonction $\Phi(i\varphi, x, t)$ est définie ainsi :

$$\lim_{\Delta t \to 0} E\left\{\frac{e^{i\varphi[X(t+\Delta t) - X(t)]} - 1}{\Delta t}\right\}$$

étant donné $X(t) = x$. Dans le cas où $X(t)$ est un nombre discret $N(t)$, il existe une équation correspondante pour la fonction génératrice de probabilité $\Pi(z) \equiv G(-i \log z)$, laquelle semble avoir été utilisée pour la première fois par Palm (1943) pour résoudre des problèmes de ce genre.

L'extension de l'équation ci-dessus au cas de plusieurs variables ne présente aucune difficulté. Cet outil correspond à l'équation directe « avancée »; il est possible de constituer des équations alternatives de type « retardée », mais celles-ci n'ont pas nécessairement le formalisme simple que nous avons remarqué dans le cas des processus multiplicatifs. Nous ne donnerons pas leur formulation explicite.

Une application importante de ces méthodes s'obtient en l'utilisant dans la théorie des épidémies, comme je l'ai indiqué ailleurs (Bartlett, 1947, 1949). Ainsi, pour un type simple de modèle de l'épidémie, nous posons comme postulats les « transitions » suivantes :

1° Un individu infecté et contagieux se guérit à une vitesse (stochastique) μ;

2° Un individu contagieux fait apparaître un autre à une vitesse moyenne λS_t, où S_t est le nombre d'individus susceptibles dans la populations à l'instant t;

3° Un nouvel individu susceptible entre dans la population à une vitesse moyenne ν.

En fonction de $\Pi_t(w, z)$, fonction génératrice de probabilité où w est la variable correspondante au nombre I_t d'individus infectés et contagieux et où z est la variable correspondante à S_t, on peut représenter les transitions possibles par le schéma :

Transition.	Vitesse.	Opérateur.
$w \to 1$	μ	$\dfrac{\partial}{\partial w}$
$1 \to z$	ν	1
$wz \to w^2$	λ	$\dfrac{\partial^2}{\partial z\, \partial w}$

L'équation symbolique peut être écrite sous la forme

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} = \mu(1 - w)\frac{\partial \Pi}{\partial w} + \nu(z - 1)\,\Pi + \lambda(w^2 - wz)\,\frac{\partial^2 \Pi}{\partial z\, \partial w}.$$

C'est une équation que l'on peut considérer comme une spécification précise du modèle envisagé.

La solution générale de cette équation est encore inconnue, bien que des aspects particuliers aient été étudiés (*voir*, par exemple, Bartlett, 1954, § 4.4, pour une revue). Tel qu'il est, c'est un modèle trop simpliste pour les phénomènes des épidémies. Une des limitations que je veux examiner en outre est la suppression des coordonnées spatiales $\mathbf{r}$ des individus. Quand on fait ces hypothèses le processus devient un processus ponctuel et les transitions peuvent être remplacées par d'autres plus générales ; mettons :

Transition.	Vitesse.	Opérateur.
$w(\mathbf{r}) \to 1$	μ	$\dfrac{\partial}{\partial w(\mathbf{r})\, d\mathbf{r}}$
$1 \to z(\mathbf{r})$	$\nu\, d\mathbf{r}$	1
$w(\mathbf{s})\, z(\mathbf{r}) \to w(\mathbf{s})\, w(\mathbf{r})$	λ	$\dfrac{\partial^2}{\partial w(\mathbf{s})\, \partial z(\mathbf{r})\, d\mathbf{s}\, d\mathbf{r}}$

Ce nouveau modèle a été supposé homogène dans l'espace et dans le temps, μ et ν constantes, mais λ doit être pris au moins ([3]) comme une fonction $\lambda(\mathbf{r}-\mathbf{s})$ du déplacement des deux individus (*voir* Rapoport, 1951). L'équation symbolique devient ainsi celle de la fonctionnelle génératrice de probabilité $\Pi_t(w(u), z(u))$:

$$\frac{\partial \Pi_t}{\partial t} = \int \mu(1 - w(\mathbf{r}))\left[\frac{\partial \Pi_t}{\partial w(\mathbf{r})\, d\mathbf{r}}\right] d\mathbf{r} + \int \nu(z(\mathbf{r}) - 1)\, \Pi_t\, d\mathbf{r}$$
$$+ \iint \lambda(\mathbf{r}-\mathbf{s})\, w(\mathbf{s})(w(\mathbf{r}) - z(\mathbf{r}))\left[\frac{\partial^2 \Pi_t}{\partial w(\mathbf{s})\, \partial z(\mathbf{r})\, d\mathbf{s}\, d\mathbf{r}}\right] d\mathbf{s}\, d\mathbf{r}.$$

Dans la situation où l'infection est presque absente dans une partie du champ et où le nombre d'individus susceptibles peut être considéré provisoirement comme inaltérable par le nombre des individus infectés, le processus dégénère en un processus multiplicatif pour le nombre des infectés et l'équation « retardée » apparaît sous une forme plus simple que l'équation « avancée ». Celle-ci est, pour un individu initial à w

$$\frac{\partial \Pi_t(w)}{\partial t} = \mu(1 - \Pi_t(\mathbf{w})) + n \int \lambda(\mathbf{u} - \mathbf{w})\, \Pi_t(\mathbf{w})(\Pi_t(\mathbf{u}) - 1)\, d\mathbf{u}.$$

Au début je l'avais utilisée pour trouver une solution de la densité

([3]) De plus il est possible d'avoir λ (et μ) dépendants de l'âge de l'individu infecté, mesurés à partir du moment d'infection, tout comme dans le problème de croissance d'une population.

moyenne des individus infectés dans le cas présent (Bartlett, 1954), mais si nous cherchons aussi bien les densités de produits d'ordres supérieurs, l'équation « avancée » paraît plus utile (*cf.* la solution donnée plus haut du problème des cascades de nucléons). De cela, on tire en particulier (si l'on substitue pour simplifier, la densité *constante n* à la distribution initiale actuelle des individus susceptibles, bien que ce ne soit pas une fonction de densité au sens strict du mot),

$$\frac{\partial f_1(\mathbf{r})}{\partial t} = -\mu f_1(\mathbf{r}) + n\int \lambda(\mathbf{r}-\mathbf{s})f_1(\mathbf{s})\,d\mathbf{s},$$

$$\frac{\partial f_2(\mathbf{r},\mathbf{u})}{\partial t} = -2\mu f_2(\mathbf{r},\mathbf{u}) + n\int \lambda(\mathbf{r}-\mathbf{s})f_2(\mathbf{s},\mathbf{u})\,d\mathbf{s}$$
$$+ n\int \lambda(\mathbf{u}-\mathbf{s})f_2(\mathbf{r},\mathbf{s})\,d\mathbf{s} + n\lambda(\mathbf{r}-\mathbf{u})f_1(\mathbf{u}) + n\lambda(\mathbf{u}-\mathbf{r})f_1(\mathbf{r}).$$

Soit la transformée de Fourier à deux variables de $f_1(\mathbf{r})$,

$$M_1(\underline{\theta}) = \int e^{i(\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2)} f_1(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}, \qquad \text{où} \quad \mathbf{r} \equiv (x_1, x_2),$$

et soit $M_2(\underline{\theta}, \underline{\varphi})$ la double transformée de $f_2(\mathbf{r}, \mathbf{u})$. Écrivons également, $\Lambda(\underline{\theta})$ pour la transformée de $\lambda(\mathbf{r})$. Alors

$$\frac{\partial M_1}{\partial t} = (n\Lambda - \mu)M_1,$$
$$M_1 = e^{(n\Lambda-\mu)t},$$

pour un individu initial infecté à l'origine $\mathbf{r} = 0$, et

$$\frac{\partial M_2}{\partial t} = -2\mu M_2 + n\Lambda(\underline{\theta})M_2 + n\Lambda(\underline{\varphi})M_2$$
$$+ n\Lambda(\underline{\theta})M_1(\underline{\theta}+\underline{\varphi}) + n\Lambda(\underline{\varphi})M_1(\underline{\theta}+\underline{\varphi}).$$

Dans ces équations nous supposons que $\lambda(\mathbf{r}-\mathbf{s})$ est une fonction de distance entre $\mathbf{r}$ et $\mathbf{s}$ seulement, ou tout au moins que $\lambda(\mathbf{r}-\mathbf{s}) = \lambda(\mathbf{s}-\mathbf{r})$. Cette dernière équation donne facilement

$$M_2 = \frac{n[\Lambda(\underline{\theta}) + \Lambda(\underline{\varphi})]\left\{ e^{[n\Lambda(\underline{\theta}+\underline{\varphi})-\mu]t} - e^{[n\Lambda(\underline{\theta})+n\Lambda(\underline{\varphi})-2\mu]t}\right\}}{n\Lambda(\underline{\theta}+\underline{\varphi}) + \mu - n\Lambda(\underline{\theta}) - n\Lambda(\underline{\varphi})}$$

si nous remarquons que M_2 s'annule en même temps que t.

On voit maintenant que la densité moyenne f_1 ne doit pas nécessairement être considérée comme représentative des nombres actuels, mais, pour n grand, la probabilité d'extinction sans que l'épidémie se

propage est restreinte à une période initiale pendant laquelle f_1 est nulle presque partout; sous de telles conditions, f_1 peut être assez utile pour en tirer des renseignements. Dans le cas important d'une infection purement locale, on peut prendre asymptotiquement, lorsque t croît,

$$\Lambda t \sim \lambda t - \nu t(\theta_1^2 + \theta_2^2),$$

et alors f_1 représente une solution laplacienne d'une équation de diffusion avec facteur de multiplication $\alpha = n\lambda - \mu$. On sait (*voir* Fisher, 1937) que cette solution implique une onde de propagation de vitesse $2\sqrt{(n\nu\alpha)}$. Au contraire, dans le cas où $n\lambda$ et μ sont presque égales, nous ne pouvons plus considérer f_1 comme une bonne indication de la croissance et de l'ampleur actuelles de l'épidémie. Cependant, une étude ultérieure de f_1 et de f_2, en combinaison avec la probabilité p_t d'extinction totale, est toujours possible. Cette dernière probabilité peut être obtenue très facilement à partir de l'équation « retardée », laquelle, étant du type « régénératif » (*cf.* Bartlett et Kendall, 1951), est toujours valable même si les ensembles des variables « ponctuelles » sont mis dans un seul groupe. Donc, pour obtenir une équation pour p_t, on pose $z(u) = 0$ dans l'équation « retardée ». Cela donne

$$\frac{\partial p_t(\mathbf{w})}{\partial t} = \mu(1 - p_t(\mathbf{w})) + n\int \lambda(\mathbf{u} - \mathbf{w}) p_t(\mathbf{w})(p_t(\mathbf{u}) - 1)\, d\mathbf{u},$$

ou, puisque avec l'hypothèse d'homogénéité on a $p_t(\mathbf{w}) = p_t(\mathbf{u}) = p_t$,

$$\frac{\partial p_t}{\partial t} = \mu(1 - p_t) + n\bar{\lambda} p_t(p_t - 1),$$

où

$$\bar{\lambda} = \int \lambda(\mathbf{u})\, d\mathbf{u}$$

est supposé fini. C'est précisément l'équation de probabilité d'extinction pour un processus simple de natalité et de mortalité $n\bar{\lambda}$; on peut la résoudre aisément, ce qui donne

$$p_t = \frac{\mu \exp\{(n\bar{\lambda} - \mu)t\} - \mu}{n\bar{\lambda} \exp\{(n\bar{\lambda} - \mu)t\} - \mu}.$$

Les densités de produits f'_r, qui conditionnent l'absence d'extinction totale, sont évidemment associées à f_r par l'équation

$$f_r = f'_r(1 - p_t),$$

de sorte que l'on a, pour f'_r et pour M'_r, la transformée correspondante,

$$f'_r = \frac{f_r}{1-p_t}, \qquad M'_r = \frac{M_r}{1-p_t}.$$

4. Les processus ponctuels stationnaires à une ou plusieurs dimensions. — Au début de ces conférences, nous avons fait allusion au point de vue de Wold sur les processus ponctuels stationnaires. Il est instructif de considérer ces processus du point de vue que nous exposons ici, pour en introduire de semblables, définis pour deux ou trois dimensions se référant plutôt à l'espace qu'à une dimension correspondant au temps. Si nous désignons le processus intégré par

$$N(t) = \int^t d\,N(t),$$

nous admettrons, comme précédemment, l'existence des densités $f_r(t)$ pour les moments de $dN(t)$. Si le processus est stationnaire, cela implique en particulier que

$$f_1(t) = \lambda,$$
$$f_2(t, \tau) = \mu(t-\tau) \qquad (t \neq \tau).$$

Il est commode d'introduire la densité de covariance (« covariance density function »)

$$w(t-\tau) = \mu(t-\tau) - \lambda^2 \qquad (t \neq \tau),$$

cette densité s'annulant pour $N(t)$ additif [ou, plus généralement pour $N(t)$ orthogonal].

Par exemple, supposons que dans un processus simple de « renouvellement », l'intervalle de temps entre deux événements successifs ait pour loi

$$f(t)\,dt = 4\lambda^2 t\, e^{-2\lambda t}\,dt \qquad (t \geqq 0).$$

Cette loi implique (par exemple, par la théorie de la récurrence d'événements, Bartlett, 1953) que la probabilité pour que se produise un événement dans l'intervalle de temps $(t, t+dt)$, étant donné un événement à l'instant $t=0$, mais sans tenir compte d'autres événements ultérieurs possibles entre temps, est

$$\lambda\,dt - \lambda\, e^{-4\lambda t}\,dt,$$

d'où nous voyons que, lorsque $t \to \infty$, λ est défini sans contradiction

par $\frac{E\{dN\}}{dt}$. Nous avons aussi

$$E\{dN(t)\,dN(\tau)\} = [\lambda\,dt - 4\,e^{-4\lambda(t-\tau)}\,dt] \qquad (t > \tau);$$

d'où

$$w(t-\tau) = -\lambda^2\,e^{-4\lambda(t-\tau)} \qquad (t > \tau).$$

Cette densité de covariance est négative, ce qui implique qu'un événement contraint un autre de le suivre trop tôt. Pour cette raison on l'a utilisée comme un modèle possible dans la théorie de la recombinaison génétique (Owen, 1949). Pour ce processus on s'attend à ce que la variance du nombre d'événements ayant lieu dans un intervalle non nul quelconque Δt soit inférieure à la valeur correspondante $\lambda\Delta t$ pour un processus de Poisson. D'après nos règles d'intégration précédentes, nous avons

$$E\{[N(t)]^2\} - [E\{\Delta N(t)\}]^2 = \int_t^{t+\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} w(u-v)\,du\,dv + \int_t^{t+\Delta t} \lambda\,du,$$

d'où, après quelques calculs, la variance de $\Delta N(t)$ devient

$$\frac{1}{2}\lambda\,\Delta t + \frac{1}{8}(1 - e^{-4\lambda\Delta t}),$$

valeur inférieure à $\lambda\,\Delta t$ pour toute valeur $\Delta t > 0$.

Il est à remarquer que la densité de covariance n'a pas de spectre défini dans le sens des spectres des covariances des processus stationnaires. Cependant, il m'a été signalé par J. Moyal (Communication personnelle) que la théorie plus classique des spectres des processus stationnaires (pour laquelle *voir*, par exemple, Lévy, 1948) peut être modifiée pour inclure ces processus ponctuels ainsi que d'autres pour lesquels le processus intégré

$$Y(t) = \int^t dY(t)$$

est homogène. Écrivons l'équation de Khintchine pour un processus stationnaire continu $X(t)$, soit

$$E\{X(t)X^*(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t-\tau)\omega}\,dV(\omega),$$

sous la forme intégrée

$$E\{Y(t)\,Y^*(\tau)\} = \lim_{\Omega\to\infty}\int_{-\Omega}^{\Omega}\left(\frac{e^{it\omega}-1}{i\omega}\right)\left(\frac{e^{-i\tau\omega}-1}{i\omega}\right)dV(\omega).$$

Il est intéressant de considérer cette généralisation de la définition du spectre $V(\omega)$ par rapport à la « théorie des distributions » de Schwartz. J'ai fait allusion à cette théorie à une dimension, en tant que préliminaire, pour mettre en lumière sa généralisation aux processus à deux ou trois dimensions dans l'espace. L'étude écologique de la répartition de divers spécimens de plantes en est une application importante. Pendant ces dernières années, des travaux sur la répartition des fréquences du nombre de plantes obtenues dans des échantillons carrés (« sample quadrats ») ont été à la mode. Dans ces cas, une loi de Poisson propose une répartition au hasard, celle de la binomiale négative propose quelque hétérogénéité due peut-être au groupement (« clumping ») des plantes. Toutefois, on est limité dans ces études de la répartition globale des fréquences par l'ignorance où l'on se trouve vis-à-vis de la distribution des plantes voisines et de leur corrélation, et plus récemment, on a abordé des études statistiques plus étendues de tels modèles (Cain et Evans, 1952 ; Greig-Smith, 1952). Dans bien des cas il est raisonnable de supposer qu'il n'y a pas de tendances spatiales systématiques dans ces communautés de plantes, c'est-à-dire, le processus ponctuel utilisé comme modèle peut être considéré comme stationnaire et souvent aussi isotrope par rapport aux deux dimensions de l'espace. Une étude détaillée de ces modèles et leur analyse statistique dans le contexte particulier du problème écologique a été faite par H. R. Thompson à Manchester. Je me contenterai ici de citer un modèle étudié par lui.

Supposons qu'un groupe de plantes réparties au hasard soit rendu hétérogène dans la génération suivante, à cause de l'apparition dans le voisinage de chaque plante de la première génération, des plantes de la seconde génération; la distance f_r entre le parent et la progéniture suit la loi laplacienne isotrope $f(r)\,dr$ et le nombre n de progénitures par parent la loi géométrique

$$p(n) = (1 - K)K^n \qquad (n \geqq 0).$$

Ce modèle présente un certain intérêt dans le contexte actuel parce que, comme l'a démontré J. H. Darwin, il s'agit d'un modèle qui engendre la loi binomiale négative pour le nombre de plantes de la progéniture observées dans un petit carré (« quadrat »). Une méthode employée en pratique pour l'examen de la répartition dans l'espace consiste à faire le dénombrement dans un treillis carré (« square grid ») et de procéder à

l'analyse de la variance des résultats. Il n'est pas difficile de voir que, avec ces hypothèses, la valeur moyenne des résultats d'une telle analyse ne doit théoriquement dépendre que de la densité de covariance $w(r)$. D'autre part, pour un modèle de ce type, nous avons comme fonction de densité de produits du second ordre :

$$f_2 = \mathrm{E}\{d\mathrm{N}(\mathbf{r})\,d\mathrm{N}(\mathbf{s})\} = \mathrm{E}\{d\mathrm{N}(\mathbf{r})\}\,\mathrm{E}\{d\mathrm{N}(\mathbf{s}) \mid d\mathrm{N}(\mathbf{r}) = 1\}.$$

Pour les plantes indépendantes

$$\mathrm{E}\{d\mathrm{N}(\mathbf{s}) \mid d\mathrm{N}(\mathbf{r})\} = \mathrm{E}\{d\mathrm{N}(\mathbf{s})\}.$$

Donc aucune contribution à la densité de covariance w n'intervient sauf entre les plantes d'une même famille ou du même groupe (« cluster »). Soit une plante à $\mathbf{r}$ de tout autre plante de la même famille; nous avons une contribution $g(\mathbf{s}-\mathbf{r})\,d\mathbf{s}$, où $g(\mathbf{r})$ est la convolution de $f(\mathbf{r})$ avec elle-même, c'est-à-dire si $f(\mathbf{r})$ est une laplacienne isotrope, $g(\mathbf{r})$ est aussi une loi laplacienne isotrope mais avec une dispersion double. (Pour simplifier nous ne considérons que les plantes de la progéniture; si les plantes parentes sont vivantes, et qu'on doivent tenir compte, une modification convenable devra être faite.)

Le nombre de tels couples d'une famille (avec l'une ou l'autre plante du couple à $\mathbf{r}$) étant $n(n-1)$, l'argument précédent montre que la contribution totale à $w(\mathbf{s}-\mathbf{r})$ est

$$\lambda_0 g(\mathbf{s}-\mathbf{r})\,\mathrm{E}\{n(n-1)\},$$

où λ_0 est la densité moyenne des familles ou groupes (« clusters »). La densité moyenne de toutes les plantes est $\lambda = \lambda_0\,\mathrm{E}\{n\}$. Pour la loi géométrique ci-dessus $\mathrm{E}\{n\} = \frac{\mathrm{K}}{(1-\mathrm{K})}$, $\mathrm{E}\{n(n-1)\} = \frac{2\mathrm{K}^2}{(1-\mathrm{K})^2}$; donc dans ce cas nous obtenons

$$w(\mathbf{r}) = \frac{2\mathrm{K}\lambda g(\mathbf{r})}{1-\mathrm{K}}.$$

Une application possible de ces conceptions à trois dimensions est la répartition dans l'espace des étoiles et des galaxies.

J'ignore si de tels problèmes d'Astronomie ont été considérés précisément de ce point de vue, bien que Neyman et Scott (1952) aient étudié certains problèmes de répartition dans ce domaine d'une manière qui s'y rapporte un peu.

On peut remarquer que dans le modèle écologique une densité positive de covariance a été introduite par un effet de groupage dû, en premier lieu, à une répartition au hasard des parents (« noyaux ») entourés de leurs descendants (« satellites »). En principe, il est possible d'envisager les noyaux comme n'étant pas répartis au hasard mais, par contraste avec le cas à une dimension, ce n'est pas là une hypothèse dont on peut se servir facilement pour créer des modèles simples à deux ou trois dimensions. On pourrait envisager des forces dynamiques, par exemple les forces dues à la gravitation, dans l'application à l'Astronomie entraînant la non-uniformité, mais cela demanderait une conception nouvelle de l'évolution de ces processus dans le temps.

5. **Processus ponctuels homogènes dans l'espace, stationnaires par rapport au temps.** — Dans l'application écologique, les processus ponctuels considérés appartenaient la catégorie statique dans lesquelles le temps n'intervenait pas. Cependant dans ce contexte même, il aurait été possible de considérer l'évolution dans le temps de telles communautés de plantes. Je n'ai pas l'intention de tenter une discussion de ce problème, mais il est peut-être utile d'illustrer l'occurrence pratique des processus ponctuels homogènes évoluant dans le temps en faisant allusion à un problème tout à fait différent, lié à la théorie classique de fluctuations moléculaires de Smoluchowski.

Un modèle très simple pour la considération du nombre de particules se déplaçant librement dans un petit élément de volume d'un gaz de molécules sous certaines conditions d'approximation est obtenu en en faisant les hypothèses suivantes :

1° La probabilité pour qu'une particule se trouvant à l'intérieur du volume à l'instant t en soit sortie à l'instant $t + dt$ est $\mu\, dt$ est indépendante des autres particules et de son propre passé.

2° La probabilité pour qu'une particule entre dans ce volume est $\nu\, dt$.

Alors, en utilisant, par exemple, l'équation symbolique pour le nombre N_t, à savoir

$$\frac{\partial \Pi_t(z)}{\partial t} = \mu(1-z)\frac{\partial \Pi_t(z)}{\partial z} + \nu(z-1)\,\Pi_t,$$

on trouve facilement que pour un nombre initial n à l'instant $t = 0$

$$\Pi_t(z) = [1 + e^{-\mu t}(z-1)]^n \exp\left\{\frac{\nu(z-1)(1-e^{-\mu t})}{\mu}\right\}.$$

Lorsque $t \to \infty$, $\Pi_t(z) \to \exp\left\{\frac{\nu(z-1)}{\mu}\right\}$ on a une loi de Poisson et le nombre N_t représente un processus stationnaire dans le temps. En introduisant une variable auxiliaire w pour n et en prenant la valeur moyenne par rapport à n pour la loi de Poisson, on trouve facilement que la fonction génératrice de probabilité associée $\Pi(z, w)$ est celle d'une loi de Poisson à deux variables, à savoir

$$\exp\{m(z-1)+m(w-1)+m\,e^{-\mu t}(z-1)(w-1)\}, \qquad \text{où} \quad m=\frac{\nu}{\mu}.$$

Ce modèle a été utilisé pour donner les nombres variables de particules colloïdales en suspension (Chandrasekhar, 1943) et dans l'étude des micro-organismes mobiles tels que les spermatozoïdes (Rothschild, 1953). Cependant, ce modèle a ses limitations car même si nous pouvons maintenir l'hypothèse d'indépendance des particules différentes, nous ne pouvons en toute rigueur ignorer la continuité essentielle du chemin de chaque particule (*cf.* Bartlett, 1950); et cela implique l'invalidité de la deuxième l'hypothèse 1° faite ci-dessus.

L'étude d'une représentation plus exacte de cette situation ne demande point l'appareil ou la conception de processus ponctuels, car nous faisons une application triviale du concept des processus ponctuels à cause des deux hypothèses, celle de l'indépendance d'action des particules et celle de leur conservation, c'est-à-dire pas de disparition ni multiplication des particules (ni l'une, ni l'autre de ces hypothèses n'est retenue dans le problème des épidémies). Cependant, nous pensons qu'il y a intérêt à signaler que les problèmes de cette classe sont compris dans notre définition généralisée des processus ponctuels et à noter le caractère de la solution plus exacte dans ce cas.

Supposons que la vitesse v d'une particule soit déterminée par une équation stochastique du mouvement, par exemple, l'équation de Langevin

$$d\mathbf{V} - \alpha\mathbf{V}\,dt = d\mathbf{Z},$$

où $\mathbf{V}(t)$ est un processus additif homogène par rapport au temps. Alors, toutes les propriétés de répartition d'une telle particule sont, en principe, connues. Ainsi, dans le cas cité, soit

$$C\{\underline{\theta}\} \equiv E\left\{\exp i\int_0^t \mathbf{v}'(u)\,d\underline{\theta}(u)\right\},$$

la fonctionnelle caractéristique de $\mathbf{v}(t)$ par rapport au temps, où $\mathbf{v}'\underline{\theta}$ désigne le produit scalaire de $\mathbf{v}$ et de θ. Si

$$\mathrm{K}_{\mathbf{Z}}\{i\underline{\psi}\} \equiv \log \mathrm{E}\left\{\exp i\,\underline{\psi}' \int_0^1 d\mathbf{Z}(t)\right\},$$

où la structure admissible de la dernière fonction est connue (Lévy, 1937) nous aurons

$$\log \mathrm{C}\{\underline{\theta}\} = i\mathbf{v}'(0)\int_0^t e^{-\alpha u}\, d\underline{\theta}(u) + \int_0^t \mathrm{K}_{\mathbf{Z}}\left\{i\int_u^t e^{-\alpha(v-u)}\, d\underline{\theta}(v)\right\} du.$$

[Ce dernier résultat est obtenu en substituant la solution

$$\mathbf{v}(t) = e^{-\alpha t}\mathbf{v}(0) + \int_0^t e^{-\alpha(t-u)}\, d\mathbf{Z}(u)$$

en $\mathrm{C}\{\underline{\theta}\}$ et en inversant l'ordre d'intégration dans l'intégrale double].

En particulier, si la position aléatoire de la particule est représentée par

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(0) + \int_0^t \mathbf{v}(u)\, du,$$

la fonction caractéristique associée de $\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(0)$ et de $\mathbf{v}(t)$, $\mathbf{r}(0)$ et $\mathbf{v}(0)$ étant donnés, est alors $\mathrm{C}(\underline{\varphi}, \underline{\eta})$, où $\mathrm{C}(\underline{\varphi}, \underline{\eta})$ peut être obtenu à partir de $\mathrm{C}\{\underline{\theta}\}$ en posant

$$\underline{\theta}(u) = \underline{\eta}\,\varepsilon(u-t) + u\underline{\varphi} \qquad [\varepsilon(u) = 1,\ u \geqq 0;\ 0,\ u < 0].$$

Dans le cas cité, cela donne

$$\log \mathrm{C}(\underline{\varphi}, \underline{\eta}) = i\mathbf{v}'(0)\left[\underline{\eta}\, e^{-\alpha t} + \frac{(1-e^{-\alpha t})\,\underline{\varphi}}{\alpha}\right] + \int_0^t \mathrm{K}_{\mathbf{Z}}\left\{i\left[\underline{\eta}\, e^{-\alpha(t-u)} + \frac{(1-e^{-\alpha(t-u)})\,\underline{\varphi}}{\alpha}\right]\right\} du.$$

Un cas spécial important se présente lorsque le processus additif $\mathbf{Z}(t)$ est un processus normal (*cf.* Moyal, 1949).

En principe, ces solutions pour $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{v}(t)$ déterminent la densité de probabilité de ces quantités, soit $f(\mathbf{r}, \mathbf{v})\, d\mathbf{r}\, d\mathbf{v}$. Si nous voulons conserver le formalisme général qu'on a utilisé dans les applications précédentes, nous pouvons écrire l'expression de la fonctionnelle génératrice des probabilités à l'instant t pour le système (qui ne consiste jusqu'ici qu'en une seule particule), à savoir

$$\Pi_t\{z(\mathbf{r}, \mathbf{v})\} \equiv \mathrm{E}\{z(\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t))\}.$$

Ceci vaut par rapport aux conditions initiales $\mathbf{r}(0)$, $\mathbf{v}(0)$, mais sous des hypothèses convenables $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{v}(t)$ auront une loi limite lorsque t croît, qui sera indépendante de $\mathbf{r}(0)$, $\mathbf{v}(0)$. Par exemple, dans le cas cité, si $\mathbf{Z}(t)$ est laplacien, $\mathbf{v}(\infty)$ sera laplacien.

Ici, en l'absence de parois, la dispersion de $r(\infty)$ tend vers l'infini, mais il est possible d'imaginer des parois réfléchissantes de telle sorte que la répartition de $\mathbf{r}$ tende à devenir uniforme ([4]).

Dé plus, la valeur moyenne pour une telle distribution stationnaire de

$$w(\mathbf{r}(0), \mathbf{v}(0))\Pi_t\{z(\mathbf{r}, \mathbf{v})\}$$

donnera la fonctionnelle génératrice de probabilité associée ψ, pour les deux instants zéro et t. J'ai fait exprès de garder le paramètre de la vitesse v dans ψ, car ainsi le caractère supposé markovien du processus sera conservé et ψ contiendra toute l'information sur le processus. Cependant, comme je l'ai déjà fait remarquer, le formalisme ci-dessus est inutilement encombrant dans ce problème, d'autant plus qu'en général nous nous occuperons d'une région centrale éloignée des parois. Lorsque les parois reculent, la densité infiniment petite des particules redevient une densité constante m par suite d'un accroissement correspondant du nombre total N des particules considérées (pour ce système la fonctionnelle est évidemment ψ^N).

Il est ordinairement plus facile de tirer directement toute propriété voulue du système des propriétés qui se rapportent à la particule.

Par exemple, étant donné la vitesse et la position initiale, la distribution liée de la vitesse et de la position avec la distribution stationnaire de la vitesse et de la position, permet de calculer la probabilité P_{12} pour qu'une particule se trouvant dans la région R_1 à l'instant zéro se trouve dans la région R_2 à l'instant t. Si les deux régions coïncident, $P_{12} = Q = 1 - P$, où P est parfois appelé la répercussion de probabilité (« probabiltity after-effect »). Dans ce dernier cas, la valeur moyenne mQ étant la même pour la région à deux instants, la fonction génératrice, de probabilités liées des nombres N_0 et N_t de particules dans la région à deux instants est

$$\Pi(z_1, z_2) = \left[1 + \frac{m}{N}(z_1 - 1) + \frac{m}{N}(z_2 - 1) + \frac{mQ}{N}(z_1 - 1)(z_2 - 1)\right]^N$$

([4]) Les détails précis dans ce contexte, utilisant les résultats dans le cas de parois réfléchissantes dû à J. Moyal (inédit), ont été étudiés par Mlle V. T. Patil.

et ainsi dans les conditions limites lorsque le nombre total de particules N est très grand :

$$\Pi(z_1, z_2) = \exp\{m(z_1 - 1) + m(z_2 - 1) + m\,Q(z_1 - 1)(z_2 - 1)\}.$$

La comparaison entre ce résultat et le résultat fourni par la forme stationnaire du modèle markovien simple cité d'abord montre qu'ils sont formellement identiques. Les différences entre une telle spécification exacte comme celle qui vient d'être faite et le modèle approximatif simple sont :

1° le modèle précis n'est pas markovien pour le nombre N_t [il n'est même plus markovien comme processus ponctuel en $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$, à moins qu'à chaque particule l'on n'ait mis une étiquette, mais le processus peut toujours, en principe, être complètement spécifié en utilisant la fonctionnelle complète du temps pour la position $\mathbf{r}(t)$ d'une particule, cette fonctionnelle pouvant être obtenue par une méthode analogue à celle donnée pour $\mathbf{v}(t)$];

2° la forme mathématique de Q, qui est la fonction de corrélation entre N_0 et N_t, dépendra de l'équation précise du mouvement de la particule et ne sera pas de la simple forme exponentielle $e^{-\mu t}$.

Jusqu'à quel point ces différences deviennent importantes dans l'expérience est un problème qui a fait l'objet de travaux ([5]) dans le cas particulier déjà cité, à savoir celui du mouvement des micro-organismes. Cette recherche a une certaine importance, car le modèle approximatif offre une méthode pratique et convenable pour déterminer la vitesse des spermatozoïdes.

Bien entendu, l'hypothèse de l'indépendance des particules retenue jusqu'ici ne sera plus valable si la densité moyenne est trop élevée; cette nouvelle complication se présentera par exemple, dans les modèles statistiques des gaz denses et des liquides ([6]).

([5]) Par H. Ruben, travaillant avec Lord Rothschild, et par Mlle Patil, travaillant à Manchester.

([6]) *Voir*, par exemple, Green (1952).

BIBLIOGRAPHIE.

ARLEY (N.) :

1943. *On the theory of stochastic processes and their application to the theory of cosmic radiation*, Copenhague.

BARTLETT (M. S.) :

1947. *Stochastic processes* (*Mimeographed notes of a course given at the University of North Carolina in the Fall Quarter*, 1946).

1949. *Some evolutionary stochastic processes* [*J. Roy. Statist. Soc.*, (B), t. 11, p. 211].

1950. *Recurrence times* (*Nature*, t. 165, p. 727).

1951. *The dual recurrence relation for multiplicative processes* (*Proc. Camb. Phil. Soc.*, t. 47, p. 821).

1953. *Recurrence and first passage times* (*Proc. Camb. Phil. Soc.*, t. 49, p. 263).

1954. *An Introduction to Stochastic Processes, with special reference to methods and applications*, Cambridge (sous presse).

BARTLETT (M. S.) et KENDALL (D. G.) :

1951. *On the use of the characteristic functional in the analysis of some stochastic processes occuring in physics and biology* (*Proc. Camb. Phil. Soc.*, t. 47, p. 65).

BHABHA (H. J.) :

1950. *On the stochastic theory of continuous parametric systems and its application to electron cascades* (*Proc. Roy. Soc. London*, (A), t. 202, p. 301.

BHABHA (H. J.) et RAMAKRISHNAN (A.) :

1950. *On the mean square deviation of the number of electrons and quanta in the cascade theory* (*Proc. Indian Acad. Sc.*, t. 32, p. 141).

BOCHNER (S.) :

1947. *Stochastic processes* (*Ann. Math.*, t. 48, p. 1014).

CAIN (S. A.) et EVANS (F. C.) :

1952. *The distribution patterns of three plant species in an old-field community in Southeastern Michigan* [*Contributions from the Lab. of Vert. Biol.*, n° 52 (Université de Michigan)].

CHANDRASEKHAR (S.) :

1943. *Stochastic problems in physics and astronomy* (*Rev. Mod. Phys.*, t. 15, p. 1).

CONSAEL (R.) :

1950. *Sur quelques points de la théorie des processus stochastiques* [*Bull. Acad. Roy. Belgique* (Cl. Sc.), 5e série, t. 36, p. 870].

FISHER (R. A.) :

1937. *The wave of advance of advantageous genes* (*Ann. Eugen.*, t. 1, p. 355).

GREEN (H. S.) :

1952. *Molecular theory of Fluids*, Amsterdam.

GREIG-SMITH (P.) :

1952. *The use of random and contiguous quadrats in the study of the structure of plant communities* (*Ann. Botany*, t. 16, p. 293).

HOPF (E.) :

1952. *Statistical hydromechanics and functional calculus* (*Journal of Rational Mechanics and Analysis*, t. 1, p. 87).

JANOSSY (L.) :

1950. *Note on the fluctuation problem of cascades* [*Proc. Phys. Soc. London*, (A), t. 63, p. 241].

KENDALL (D. G.) :

1949. *Stochastic processes and population growth* [*J. Roy. Statist. Soc.*, (B), t. 11, p. 230].

1950. *Random fluctuations in the age-distribution of a population whose development is controlled by the simple birth-and-death process* [*J. Roy. Statist. Soc.*, (B), t. 11, p. 278].

1952. *Les processus stochastiques de croissance en Biologie* (*Ann. Inst. H. Poincaré*, t. 13, fasc. 1, p. 43).

KOLMOGOROV (A.) :

1931. *Uber die analytische Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung* (*Math. Ann.*, t. 104, p. 431).

KOLMOGOROV (A.) et DMITRIEV (N. A.) :

1947. *Branching stochastic processes* [*C. R.* (*Doklady*) *Acad. Sc. U. R. S. S.*, (nouv. série, t. 56, p. 5].

LE CAM (L.) :

1947. *Un instrument d'étude des fonctions aléatoires : la fonctionnelle caractéristique* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 224, p. 710).

LÉVY (P.) :

1937. *Théorie de l'addition des variables aléatoires*, Paris.

1948. *Processus stochastiques et mouvement brownien*, Paris.

MESSEL (H.) :

1952. *The solution of the fluctuation problem in nucleon cascade theory : homogeneous nuclear matter* (*Proc. Phys. Soc. Lond.*, t. A 65, p. 465).

MOYAL (J. E.) :

1949. *Stochastic processes and statistical physics* [*J. Roy. Statist. Soc.*, (B), t. 11, p. 144].

NEYMAN (J.) et SCOTT (E. L.) :

1952. *A theory of the spatial distribution of galaxies* (*Astrophys. J.*, t. 116, p. 144).

RAMAKRISHNAN (A) :

1950. *Stochastic processes relating to particles distributed in a continuous infinity of states* (*Proc. Camb. Phil. Soc.*, t. 46, p. 595).

RAMAKRISHNAN (A.) :

1952. *A note on Janossy's mathematical model of a nucleon cascade* (*Proc. Camb. Phil. Soc.*, t. 48, p. 451).

1953. *Stochastic processes associated with random divisions of a line* (*Proc. Camb. Phil. Soc.*, t. 49, p. 473).

RANKIN (B.) :

1953. *The distributions in energy and in number of electrons and photons in cascade* (*Report* n° U. C. R. L. 2322, Université de Californie).

RAPOPORT (A.) :

1951. *Nets with distance bias* (*Bull. Math. Biophysics*, t. 13, p. 85).

ROTHSCHILD (Lord) :

1953. *A new method of measuring sperm speed* (*Nature*, t. 171, p. 512).

STEVENS (W. L.) :

1937-1938. *Significance of grouping* (*Ann. Eugen.*, t. 8, p. 57).

WOLD (H.) :

1949. *Sur les processus stationnaires ponctuels* (*Le Calcul des probabilités et ses applications*, Publications du C. N. R. S., t. 13).