ANNALES DE L'I. H. P.

GARRETT BIRKHOFF

Groupes réticulés

Annales de l'I. H. P., tome 11, n° 5 (1949), p. 241-250
<http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1949__11_5_241_0>

Groupes réticulés (1)

par

Garrett BIRKHOFF.

1. **Introduction.** — Le but de cet article est une synthèse des idées de treillis et de groupe : l'idée de *groupe réticulé*.

Considérons par exemple l'ensemble de toutes les fonctions réelles, $f(x)$, sur un espace quelconque X. Ces fonctions forment un *groupe* commutatif pour l'opération de l'addition et en même temps un *treillis* relatif à la définition : $f \leqq g$ signifie que $f(x) \leqq g(x)$ pour tout $x \in X$. De plus, nous savons que

(1) Si $f \leqq g$, alors $h + f \leqq h + g$, pour tout h.

On peut démontrer sans difficulté que (1) équivaut à chacune des conditions suivantes

(2) $$a + \cup b_\beta = \cup (a + b_\beta),$$

(2′) $$a + \cap b_\beta = \cap (a + b_\beta).$$

Nous allons appeler tout système ayant les propriétés précédentes, un *groupe réticulé commutatif*.

Cette définition abstraite contient implicitement les propriétés fondamentales des fonctions réelles, relatives à l'addition et à la grandeur. Il est évident que ces propriétés (et leurs conséquences logiques) sont valables quel que soit l'espace X choisi; elles restent valables si nous nous bornons à l'ensemble C(X) des fonctions continues de domaine X; ou à l'ensemble M(X) des fonctions mesurables (Borel) sur X, etc.

Dans l'étude des espaces de Hilbert et de Banach, on a ignoré sa propriété d'être positive; il me paraît que ces propriétés fondamentales méritent un examen attentif. Je vais exposer les résultats d'une telle investigation, poursuivie par divers mathématiciens dans la décade passée.

---

(1) Seconde conférence faite à l'Institut Henri Poincaré.

2. **Calcul des idéaux.** — On doit d'abord constater que les applications des groupes réticulés ne se limitent pas aux fonctions réelles; on trouve également, par exemple, des applications au calcul des idéaux.

Considérons l'ensemble $\Phi(A)$ des idéaux entiers et fractionnaires dans un corps de nombres algébriques A : soit P_1, P_2, P_3, ... les idéaux premiers de A. D'après un théorème célèbre de Dedekin chaque idéal $H \in \Phi(A)$ peut s'exprimer univoquement sous la forme

$$H = P_1^{m(i)} \dots P_r^{m(r)}, \tag{3}$$

ou les $m(i)$ sont des entiers positifs, négatifs ou nuls. Donc on peut identifier les idéaux $H \in \Phi(A)$ avec les fonctions $m(i)$, dont les valeurs sont des entiers rationnels et dont toutes les valeurs sauf un nombre fini sont nulles. La multiplication des idéaux peut se faire par addition des exposants, car

$$P_1^{m(i)} \dots P_r^{m(r)} P_1^{n(i)} \dots P_r^{n(r)} = P_1^{m(i)+n(i)} \dots P_r^{m(r)+n(r)}. \tag{4}$$

L'inclusion $H \leqq K$ de deux idéaux $H = \Pi P_i^{m(i)}$ et $K = \Pi P_i^{n(i)}$ équivaut à $m(i) \leqq n(i)$ pour tout i, de sorte que nous avons dans ce cas particulier une isomorphie entre le calcul des idéaux et le calcul des fonctions.

Plus généralement, on peut considérer un anneau arbitraire A, que nous ne supposons pas commutatif, et un sous-anneau E de A. Un sous-ensemble de A s'appelle idéal de A, si et seulement si

$$x, y \in H \quad \text{impliquent} \quad x \pm y \in H, \tag{5}$$

$$x \in H \quad \text{et} \quad a \in E \quad \text{impliquent} \quad ax \in H \quad \text{et} \quad xa \in H. \tag{6}$$

Dans le cas où A est un corps de nombres algébriques et E l'ensemble des entiers algébriques de A, nous obtenons le cas classique de Dedekind.

Si $H \leqq K$ signifie que K contient H comme sous-ensemble, les idéaux forment un *treillis complet*, dans lequel

$$H \cap L \text{ est la partie commune à H et K,} \tag{7}$$

$$H \cup K = H + K \text{ est l'ensemble des sommes } h + k [h \in H, k \in K]. \tag{8}$$

Le produit HK de deux idéaux se définit comme il suit,

$$HK \text{ est l'ensemble des sommes } \Sigma h_i k_i [h_i \in H, k_i \in K]. \tag{9}$$

Bien entendu, les idéaux ne forment pas un groupe dans le cas général; comme les fonctions surharmoniques et les fonctions continues d'un côté, ils forment un semi-groupe seulement.

Pourtant, on a la loi (2), avec la notation modifiée

$$(10) \qquad H(\cup K_\alpha) = \cup(HK_\alpha) \quad \text{et} \quad (\cup H_\alpha)K = \cup(H_\alpha K).$$

La relation (10) implique l'analogue de (1); mais l'analogue de (2') n'est plus valable.

En particulier, on s'intéresse au cas où E contient un élément I tel que $Ix = xI = x$ pour tout $x \in A$ (anneau avec élément unité). Alors,

$$(11) \qquad HE = EH = H \quad \text{pour tout} \quad H \in \Phi(A).$$

Les lois (10)-(11) entraînent les conséquences suivantes

$$(12) \qquad (H \cap K)(H \cup K) \leqq HK \cup KH,$$

$$(13) \qquad H \cup K = E \quad \text{implique} \quad H \cap K = HK \cup KH,$$

$$(14) \qquad H \cup K = H \cup L = A \quad \text{implique} \quad H \cup KL = H \cup (K \cap L) = A.$$

De plus, on peut définir le symbole $M = H : K$ comme le supremum des X_α avec $KX_\alpha \leqq H$, et le douer de ses propriétés générales. En outre, on peut tirer la plus grande partie de la théorie des idéaux uniformes *einartig* des règles de calcul (10)-(11), ainsi que la théorie des *séries centrales* des groupes, inventées par P. Hall.

Le cas spécial ou $HK = H \cap K$ réduit aux logiques de Brouwer.

Il est curieux que ni la commutativité ni même l'associativité de la multiplication ne paraissent jouer un rôle important dans les résultats précédents. Ceci peut signifier seulement que nous ne savons pas comment on doit utiliser ces lois en combinaison avec les lois des treillis, même dans le cas des treillis modulaires. En tout cas, il faut avouer qu'il existe des théorèmes importants portant sur les idéaux que, malgré de sérieuses tentatives, on n'a pas été en mesure de démontrer par l'emploi de calculs précédents.

3. **Calcul des relations.** — On peut fonder le calcul des relations sur ces mêmes règles.

Considérons en effet les relations binaires r, s, ... sur une classe Γ d'éléments α, β, γ, ... Nous écrivons $\alpha\, r\, \beta$ si α vérifie la relation r avec β; sinon, nous écrivons $\alpha\, r'\, \beta$, de sorte que r' est le complément de r. Nous pouvons définir $r \leqq s$, $r \cup s$, $r \cap s$ de la façon suivante

$$(12) \qquad r \leqq s \quad \text{signifie que} \quad \alpha\, r\, \beta \quad \text{implique} \quad \alpha\, s\, \beta \quad \text{pour tout} \quad \alpha, \beta \in \Gamma,$$

$$(13) \qquad \alpha(r \cup s)\beta \quad \text{signifie que} \quad \alpha\, r\, \beta \quad \text{ou} \quad \alpha\, s\, \beta,$$

$$(13') \qquad \alpha(r \cap s)\beta \quad \text{signifie que} \quad \alpha\, r\, \beta \quad \text{et} \quad \alpha\, s\, \beta.$$

On définit le produit rs et le transposé $\breve{r}$ de r par

(14) $\alpha(rs)\beta$ signifie que : il existe $j \in \Gamma$ tel que $\alpha\, r\, j$ et $j\, s\, \beta$,

(15) $\alpha\, \breve{r}\, \beta$ signifie que $\beta\, r\, \alpha$.

D'ailleurs, on définit les relations spéciales O, e, I par

(16) Jamais $\alpha\, \mathrm{O}\, \beta$

(16′) Toujours $\alpha\, \mathrm{I}\, \beta$,

(17) $\alpha\, e\, \beta$ signifie que $\alpha = \beta$ (relation d'égalité).

Le calcul des relations s'occupe de toutes les opérations que nous venons de définir; le problème de l'algèbre abstraite est de le caractériser par des postulats simples.

Nous prendrons la relation (12) et l'opération (14) comme bases du calcul. Nous pourrions utiliser seulement (14), vu que $r \leqq s$ équivaut à la condition que $a\, s\, b = 0$ implique $a\, r\, b = 0$, et que o est caractérisé par $x\, \mathrm{O} = \mathrm{O}\, x = 0$ pour tout x. Quant à la relation (12), nous pouvons constater que les relations forment une *algèbre de Boole*; avec cette simple remarque, nous avons défini d'un seul coup toutes les opérations sur les relations, hormis celle de former e et $\breve{r}$. Nous pouvons caractériser e par l'indentité $xe = ex = x$ pour tout x.

En ce qui concerne (12) et (14), les relations satisfont aux mêmes règles de calcul (10) et (11) que les idéaux, on peut donc définir $s : r$ comme l'union des relations x telles que $rx \leqq s$.

Maintenant, nous pouvons définir $\breve{r}$, par

(18) $$\breve{r} = e' : r.$$

Et nous pouvons déduire le calcul des relations des conditions

(19) $rs \leqq e'$ implique $sr \leqq e'$,

(20) $(e' : r) : r = r$ pour tout r (c'est-à-dire, $\breve{\breve{r}} = r$),

(21) $e' : (rs)' = (e' : s')(e' : r')$,

(22) Si $r > 0$, alors $\mathrm{I}\, r\, \mathrm{I} = \mathrm{I}$.

Réciproquement, les lois précédentes entraînent toutes les lois connues du calcul des relations; ainsi nous simplifions les bases de ce calcul, et en même temps nous assimilons une partie du calcul des relations au calcul des idéaux.

Il est à souhaiter qu'on puisse démontrer un *théorème de représen-*

tation pour le calcul des relations, analogue au théorème d'après lequel chaque algèbre de Boole est isomorphe à un corps d'ensembles. Une difficulté est le fait que l'union directe de deux algèbres de relations ne satisfait pas à (22).

4. **Groupes réticulés.** — Considérons maintenant les groupes réticulés eux-mêmes; nous reviendrons à la notation additive pour l'opération de groupe, de sorte que o est l'identité. Le cas des fonctions réelles sur un domaine D, avec les opérations de l'addition des fonctions, avec la convention de former l'infimum $f \cap g$ et le supremum $f \cup g$ de deux fonctions f et g est typique; mais nous ne faisons pas l'hypothèse de la commutativité de l'addition.

Nous faisons l'hypothèse de l'homogénéité de l'ordre

(1*) Si $f \leqq g$, alors $a + f + b \leqq a + g + b$ pour tout a, b.

Cette hypothèse implique les lois distributives (2)-(2'), et aussi beaucoup d'autres conditions intéressantes, dont nous signalons quelques-unes, ci-après

$$(23) \qquad -(-a \cup -b) = a \cap b,$$

$$(24) \qquad a - (a \cap b) + b = a \cup b,$$

d'où dans le cas commutatif

$$(25) \qquad a + b = a \cap b + a \cup b;$$

(26) Si $a \cap b + o$, alors $a + b = b + a$,

(27) Si $na \geqq o$ (n = entier positif), alors $a \geqq o$,

d'où chaque élément est d'ordre infini. Réciproquement, dans le cas commutatif, chaque groupe sans éléments d'ordre fini est groupe isomorphe à un *groupe ordonné*, ou groupe réticulé dans lequel $x \geqq o$ où $x \leqq o$ pour tout x. D'ailleurs, dans le cas commutatif, $na \geqq nb$ implique $a \geqq b$, mais ceci n'est pas nécessaire dans le cas général.

En outre, dans tout groupe réticulé, on a une décomposition en partie positive $a^+ = a \cup o$ et négative $a^- = a \cap o$; a^+ et a^- sont permutables, et $|a| = a^+ - a^-$ possède beaucoup des propriétés de la valeur absolue ordinaire. Les équivalences régulières (au sens de M. Dubreil) sur un groupe réticulé G correspondent biunivoquement à ses *l-idéaux*, ou sous-ensembles S tels que

(28) $a, b \in S$ et $|x| \leqq |a| + |b|$ impliquent $x \in S$;

et elles forment un treillis distributif.

Un groupe réticulé G s'appelle complet si chaque sous-ensemble borné S de G possède un supremum US. On sait depuis longtemps que le seul groupe ordonné complet est le groupe des nombres réels par rapport à l'addition, qui est commutatif; on doit une démonstration récente de cette proposition à M. H. Cartan. M. Iwasawa a démontré très récemment que le même principe est valable pour les groupes réticulés : *chaque groupe réticulé complet est commutatif.*

Comme chaque groupe réticulé commutatif est isomorphe à un sous-groupe d'un produit direct de groupes ordonnés; nous avons en quelque sorte une classification des groupes réticulés complets.

Peut-être convient-il aussi de remarquer que dans un groupe réticulé complet, toutes les opérations sont continues par rapport à la topologie intrinsèque

$$(29) \qquad x_\alpha \to x \quad \text{implique} \quad a + a_\alpha \to a + x, \quad a \cup x_\alpha \to a \cup x, \quad \ldots.$$

Mais comme ces propriétés sont liées plutôt à l'analyse, je crois qu'il vaut mieux passer à la considération des *treillis de vecteurs*, lesquels appartiennent franchement à l'analyse.

5. **Treillis de vecteurs.** — J'ai déjà signalé (§ 1) quelques familles de fonctions réelles, comme exemples typiques de groupes réticulés. En effet, les espaces de Banach [ou espaces (B) dans le sens de S. Banach (*Théorie des opérations linéaires*, Varsovie, 1932)] les mieux connus sont tous des groupes réticulés par rapport à des définitions d'ordre, presque inévitables.

Comme espaces linéaires, il sont munis d'une opération de *multiplication scalaire* par les nombres réels λ, μ, ν, ... Dans les cas intéressants, cette opération satisfait à la loi supplémentaire

$$(30) \qquad f \geqq 0 \quad \text{et} \quad \lambda \geqq 0 \quad \text{impliquent} \quad \lambda f \geqq 0.$$

Comme $f \geqq 0$ équivaut à $0 = f + (-f) \geqq 0 + (-f) = -f$, il s'ensuit que $f \geqq 0$ et $\lambda < 0$ impliquent $\lambda f \leqq 0$. Je vais définir un *treillis de vecteurs* comme un espace linéaire, qui à la fois est un groupe réticulé par rapport à l'addition vectorielle et satisfait à (30).

On peut construire deux treillis de vecteurs avec les couples

$$f = (f_1, f_2), \qquad g = (g_1, g_2), \ \ldots$$

de nombres réels. A savoir, on peut faire soit le *produit cardinal* $RR = R^2$, défini par

(31).1 $\qquad f \geqq g$ signifie $f_1 \geqq g_1$ et $f_2 \geqq g_2$,

ou le *produit ordinal* $R.R = {}^2R$ ou *lexicographique*, défini par

(31).2 $\qquad f \geqq g$ signifie que $f_1 > g_1$ ou $f_1 = g_1$ et $f_2 \geqq g_2$.

On peut même démontrer que ces deux cas sont *typiques* pour les treillis de vecteurs avec bases finies. En effet, chaque treillis de vecteurs avec une base finie peut s'exprimer comme puissance ordinale ${}^xR$ du système R des nombres réels, et s'obtient à partir de R par des multiplications cardinales et ordinales itérées.

On voit facilement que dans le treillis de vecteurs R^2,

(32) $\qquad \lambda x \leqq a$ pour tout $\lambda \varepsilon R$ implique $x = 0$,

tandis que dans ${}^2R$, en posant $x = (0, 1)$ et $a = (1, 0)$, on obtient une exception à la règle (32). Un treillis de vecteurs qui satisfait à (32) s'appelle *archimédien*; et il est aisé de démontrer que chaque treillis de vecteurs complet est archimédien, et que les seuls treillis de vecteurs archimédiens avec bases finies sont les ${}^nR$.

6. **Treillis de Banach.** — Dans tous les espaces de Banach, la *norme* $\|f\|$ de Banach et la valeur absolue $|f| = (f \cup 0) + (-f \cap 0)$ que nous avons définie, sont liées par la loi simple

(33) $\qquad |f| \leqq |g|$ implique $\|f\| \leqq \|g\|$,

ce qui évidemment implique (32). Convenons d'appeler un espace de Banach, qui est en même temps un treillis de vecteurs par rapport aux mêmes opérations vectorielles et qui satisfait à (32), un *treillis de Banach*.

Dans le treillis de Banach, on peut remplacer les définitions métriques et topologiques par des définitions purement algébriques. Par exemple, la convergence métrique, selon laquelle $f_n \to f$ veut dire $\|f_n - f\| \to 0$, équivaut à la condition suivante :

(A) de chaque suite $(f_{n(1)}, f_{n(2)}, f_{n(3)}, \ldots)$ extraite de (f_n), on peut

extraire une suite $(f_{n[\mathrm{R}(i)]})$ qui converge vers f dans le sens suivant de E. H. Moore

(34) Il existe $e>0$ tel que $|f_{n(\mathrm{R}(i))}-f|<\lambda_i e$, ou $\lambda_i \to 0$.

Ce résultat donne, après trente années, une synthèse entre les idées de E. H. Moore et celles de Hilbert.

D'ailleurs, les fonctionnelles additives $\alpha(f)$ qui sont bornées dans le sens métrique de Banach, c'est-à-dire qui satisfont à

(35) Il existe $\|\alpha\|$ tel que $\|\alpha(f)\|\leq\|\alpha\|.\|f\|$ pour tout f,

sont précisément celles qui sont bornées dans le sens des treillis, c'est-à-dire qui satisfont à

(36) Si $a\leq s\leq b$ pour tout $s\in \mathrm{S}$,
alors $-\infty<\inf\big(\alpha(\mathrm{S})\big)$, $\sup\big(\alpha(\mathrm{S})\big)<+\infty$.

7. **Espace du type** (L). — Parmi les treillis de Banach, les espaces (l) et (L) sont distingués par la condition

(33*) $f>0$ et $g>0$ impliquent $\|f+g\|=\|f\|+\|g\|$.

Convenons d'appeler un treillis de Banach qui satisfait à (33*), un *espace du type* (L). Il est évident que (33*) implique (33).

Il est facile de démontrer que chaque espace E du type (L) est un treillis *complet* de vecteurs; c'est-à-dire, chaque sous-ensemble borné de E a un supremum et un infimum. D'ailleurs, chaque espace *séparable* du type (L) est isomorphe à un sous-espace de l'espace (L) des fonctions intégrables au sens de Lebesgue; ce résultat important est dû à M. Kakutani.

Les espaces du type (L) sont intimement liés aux probabilités.

Soit $\mathbf{\Sigma}$ une entité physique; et soit $\mathbf{\Phi}$ une algèbre de Boole exprimant des propriétés possibles X, Y, Z, ... de $\mathbf{\Sigma}$. Un état actuel de connaissance probable à propos de $\mathbf{\Sigma}$ à un instant t, peut s'exprimer comme une fonction $p[\mathrm{X}]$, définie pour chaque propriété $\mathrm{X}\varepsilon\mathbf{\Phi}$, et satisfaisant à

(37) $p[\mathrm{O}]=0$, $z[\mathrm{I}]=1$, $0\leq p[\mathrm{X}]\leq 1$ pour chaque $\mathrm{X}\varepsilon\mathbf{\Phi}$,

et

(37′) $p[\mathrm{X}]+p[\mathrm{Y}]=p[\mathrm{X}\cap\mathrm{Y}]+p[\mathrm{X}\cup\mathrm{Y}]$.

Donc $p[\mathrm{X}]$ est un *élément positif de norme unité* dans l'espace du

type (L) formé par toutes les fonctions réelles bornées $f[X]$ qui satisfont à (37′), avec

$$\|f\| = \sup_{X \in \Phi} f[X] - \inf_{X \in \Phi} f[X].$$

En effet, on peut démontrer que, avec cette définition, les fonctions réelles bornées sur une algèbre de Boole quelconque forment un espace du type (L).

Des applications très importantes aux *événements en chaînes* envisagés par Markoff s'en suivent; bien entendu, il s'agit là d'un cas particulier des *fonctions aléatoires*.

Par exemple, soit Σ un atome radioactif, capable de prendre les états possibles $1, \ldots, n$; et soit $p_t[i]$ la probabilité pour que Σ se trouve dans l'état i après un temps t. Les propriétés de Σ correspondent biunivoquement à l'algèbre $\Phi = \mathbf{2}^n$ des ensembles des i; donc les $p_t[i]$ forment un sous-ensemble d'un espace du type (L); on pose

$$p_t[X] = \sum_{i \in X} p_t[i].$$

D'ailleurs, on sait bien qu'il existe une matrice $U = \| u_{ij} \|$ de *probabilités de transition*, telle que

$$(38) \qquad p_t[I] = \sum_{k=1}^{n} p_0[k].U_{ki}, \qquad \text{ou} \qquad \| u_{ki} \| = U_t = \exp(tU).$$

De même, soit $\mathbf{x}(t)$ la fonction aléatoire décrivant la position du vecteur $\mathbf{x}$ à l'instant t, d'une particule animée d'un mouvement brownien. Pour chaque ensemble mesurable au sens de Borel, X, dans l'espace, $p_t[X]$ peut se définir comme la probabilité que $\mathbf{x}(t) \in X$. Dans ce cas Φ sera l'algèbre de Boole formée par les ensembles mesurables, de sorte que les p_t seront des éléments de l'espace (L) des fonctions intégrables dans l'espace. Il existe encore une fois une *opération de transition* U_t, telle que

$$(38') \qquad p_{t+u} = p_t U_u, \quad \text{de sorte que } U_t U_u = U_{t+u} \quad \text{pour tout } t, \quad u > 0,$$

$$(38'') \qquad (\lambda p + \mu q) U_t = \lambda p U + \mu q U \qquad \text{si } \lambda, \mu \geq 0 \quad \text{et} \quad \lambda + \mu = 1.$$

Dans le cas abstrait envisagé ci-dessus, nous considérons que les conditions (38′)-(38″) sont la définition d'un cas d'événements en chaîne du type de Markoff, ou procédé de Markoff. Dans le cas d'une algèbre

de Boole finie, elles équivalent à (38), mais il est à remarquer que, du point de vue de notre manière de formuler le problème, le cas général n'est pas plus difficile que le cas fini.

8. Théorème de Markoff; Théorème Ergodique. — Nous arrivons à des conclusions nettes et simples dans deux cas importants.

Le premier cas, la diffusion dans un domaine borné, est caractérisé par l'hypothèse suivante :

Il existe un élément $d > 0$ dans l'espace du type (L), et un numéro s, tels que $pU_s \geqq d$ pour tout p.

Dans ce cas, il existe une distribution stable p_0 telle que

$$\lim_{u \to \infty} pU_u = p_0 \quad \text{pour tout } p. \tag{39}$$

L'idée de la démonstration est due à M. Hadamard, mais la démonstration dans le cas général est assez récente.

Le deuxième cas vaut également pour la diffusion et pour le mouvement selon des lois déterminées, dans un domaine borné. On fait l'hypothèse qu'il existe un élément $e > 0$ dans l'espace du type (L), tel que $pU_s \leqq e$ pour tout $s > 0$. Dans ce cas, on peut démontrer le théorème ergodique : il existe pour chaque p une distribution stable p_0 telle que

$$\lim_{u \to \infty} \int_{t=0}^{u} pU_t \, dt = p_0. \tag{40}$$

La démonstration est due à MM. F. Riesz, Kakutani, et moi-même. Une démonstration antérieure, valable dans le cas des équations intégrales est due à M. Fréchet.

Nous voyons ainsi le rôle que jouent les treillis avec multiplication (ou addition) dans différents domaines des mathématiques, tels que la théorie des idéaux, la théorie des relations, l'analyse fonctionnelle, la théorie des événements en chaîne. Dans mon article précédent, j'ai indiqué des applications des treillis à la théorie des groupes, à la géométrie projective et à la logique. En raison de ces applications diverses, je pense que la théorie des treillis mérite d'acquérir une position analogue à celle de la théorie des groupes, l'idée fondamentale étant simple, belle, et très utile pour l'unification des mathématiques.