ANNALES DE L'I. H. P.

M. BORN

Théorie non-linéaire du champ électromagnétique

Annales de l'I. H. P., tome 7, nº 4 (1937), p. 155-265
<http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1937__7_4_155_0>

© Gauthier-Villars, 1937, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P. » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Théorie non-linéaire du champ électromagnétique

par

M. BORN.

INTRODUCTION.

Le développement naturel de toute recherche scientifique est caractérisé par une collaboration intime entre l'expérience et la théorie. A certaines époques, la théorie est en avance et peut prévoir des effets nouveaux, inconnus; nous en avons eu un exemple dans l'extraordinaire prévision, par de Broglie, du caractère ondulatoire du mouvement électronique. A d'autres époques, au contraire, comme par exemple à l'heure actuelle, les découvertes de faits nouveaux se succèdent à un rythme tel, que la théorie reste fort en retard sur le développement expérimental. En général cependant, on peut dire que l'observation des faits et leur interprétation vont toujours de pair.

La théorie que je veux exposer ici n'a pas ce caractère qu'on pourrait appeler normal. Il arrive quelquefois qu'un fait expérimental bien établi reste longtemps inexpliqué et complètement isolé des autres observations connues. Un exemple célèbre nous est fourni par le phénomène, que Newton connaissait déjà, de l'égalité entre la masse (mesure de l'inertie) et du poids (mesure de la gravitation), en d'autres termes, par la constatation que tous les corps tombent avec la même accélération dans le vide. Les chercheurs s'habituèrent tellement à ce fait qu'ils oublièrent de le considérer comme un problème non résolu; il fallut attendre 200 ans jusqu'à ce qu'Einstein commençât à s'étonner de nouveau et découvrît, dans cette constatation devenue banale à la longue, le fondement de la théorie de la relativité généralisée.

La situation dont nous aurons à nous occuper n'est pas aussi mauvaise que la précédente, en ce sens que le problème qu'elle concerne n'est ni trop ancien, ni complètement oublié; néanmoins, 50 ans se sont déjà écoulés depuis qu'il a été posé pour la première fois. Ce problème est celui des difficultés soulevées par l'existence de l'énergie propre infinie des charges électriques ponctuelles.

J. J. Thomson qui, le premier, a découvert l'existence des électrons libres et mesuré leur charge spécifique, a également émis l'hypothèse fondamentale que leur masse était d'origine électromagnétique. Je citerai une phrase de l'autobiographie qu'il a récemment publiée [1] (1) et dans laquelle il décrit ses premières recherches (1891) sur les conséquences de la théorie de Maxwell.

« Si l'on adopte l'hypothèse d'une constitution électrique de la matière, il est permis de supposer que la masse a une origine électrique et que par conséquent elle ne provient pas des atomes eux-mêmes, mais de l'espace qui entoure leurs charges. »

J. J. Thomson admet que cet « espace entourant une charge e » est l'espace extérieur à une petite sphère de rayon a et démontre que la masse ainsi calculée doit être proportionnelle à l'énergie électrostatistique, ou à $\frac{e^2}{a}$. Cette expression devient infinie pour $a \to 0$; l'idée d'une masse d'origine électromagnétique conduit donc nécessairement à des spéculations concernant la structure de l'électron. Ce problème n'a pas reçu de solution satisfaisante pendant la période « classique » de la physique, et n'a pas disparu non plus avec la création de la théorie moderne des quanta. Il constitue à l'heure actuelle un « point noir » dans notre description théorique des phénomènes naturels, et ce n'est qu'une maigre consolation de constater qu'entre temps d'autres points noirs sont venus également obscurcir notre horizon.

Ces dernières difficultés ont pour origine la découverte de nouvelles particules élémentaires, inconnues jusqu'à présent, et qui ont fait perdre à l'électron sa situation privilégiée de particule fondamentale unique.

A l'heure actuelle, il existe plusieurs particules élémentaires : l'élec-

(1) Les nombres entre crochets [ ] renvoient à la bibliographie qui se trouve à la fin de cet Ouvrage.

tron, le positon, le proton, le neutron et probablement le neutrino, et nous sommes certains que toute théorie correcte de ces particules devrait en embrasser l'ensemble et ne pas se contenter d'en décrire une seule à la fois; en effet, on connaît déjà un certain nombre de phénomènes dans lesquels ces particules sont produites, ou détruites ou enfin transformées les unes dans les autres.

La théorie non-linéaire du champ est un résidu de l'époque où l'électron était considéré comme l'élément capital de la Physique. Elle fournit une solution formelle élégante du problème de l'énergie propre infinie et de la masse électromagnétique; mais, à vrai dire, cette solution vient trop tard. L'existence du neutron montre clairement que la masse n'est pas indissolublement liée à la charge; en même temps, les recherches expérimentales, concernant les phénomènes nucléaires, ont mis en évidence l'existence de forces entre particules, chargées ou non, dont la nature est tout à fait différente de celle des forces électromagnétiques. De plus, il n'a pas encore été possible de réaliser un accord complet entre l'électrodynamique non-linéaire et les principes de la théorie des quanta; enfin on n'a pas encore réussi à se débarrasser des termes infinis, caractéristiques de la théorie quantique des champs.

Malgré toutes ces objections je me permettrai de développer quand même devant vous cette théorie, pour les raisons suivantes. On constate d'une façon tout à fait générale dans l'histoire de la recherche scientifique que, souvent, une des raisons de progrès dans une direction déterminée est l'élimination radicale de toutes les hypothèses parasites, cachées dans la théorie. L'électrodynamique linéaire de Maxwell contient de pareilles hypothèses parasites; elles sont non seulement inutiles, mais donnent encore lieu à des difficultés considérables, particulièrement en ce qui concerne l'énergie propre.

Or, il est possible de développer une théorie générale qui évite ces difficultés. Même si cette théorie ne résout pas immédiatement le grand problème des particules élémentaires, elle a néanmoins le mérite d'aider à mieux saisir les points essentiels; on constate déjà l'existence d'un certain nombre d'éléments de jonction, reliant l'électrodynamique non-linéaire à des considérations d'un tout autre genre, comme par exemple la théorie des positons de Dirac. Enfin, dernier argument mais qui n'est pas pour cela le moins important, la théorie généralisée des champs forme un édifice mathématique harmonieux et dont la beauté propre

peut constituer un élément d'intérêt pour ceux qui goûtent l'élégance des méthodes analytiques.

Pour cette dernière raison, le mode d'exposition adopté ici aura un caractère mathématique très prononcé; je commencerai par des considérations sur les principes de variation appliqués aux mouvements des milieux continus et, ensuite passant du général au particulier, j'aborderai le cas du champ électromagnétique (1).

CHAPITRE I.

THÉORIE CLASSIQUE.

1. Principe de variation pour un milieu continu [1]. — Considérons un espace à n dimensions, de coordonnées $x^1, x^2, \ldots, x^n$.

Définissons dans cet espace une hypersurface fermée à $n-1$ dimensions, S, au moyen des équations :

$$x^i = x^i(u^1, \ldots, u^{n-1}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.1}$$

où $u^k (k = 1, 2, \ldots, n-1)$ sont $n-1$ paramètres. Appelons D le domaine qu'elle renferme et définissons dans ce domaine ν fonctions $z^\alpha(x^1, \ldots, x^n)$ que nous écrivons pour abréger

$$z^\alpha(x^i) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, \nu);$$

soient

$$z^\alpha_k(x^i) = \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^k} \tag{1.2}$$

leurs dérivées (2).

Supposons qu'on se donne une fonction de ces diverses variables, fonction que nous appellerons le « lagrangien » du système

$$\mathfrak{L}(x^i, z^\alpha, z^\alpha_k). \tag{1.3}$$

(1) Pour cette exposition j'ai fait amplement usage de la thèse présentée à l'Université de Cambridge par mon ancien élève et collaborateur M. P. Weiss, qui a étudié complètement les bases mathématiques des théories des champs en relation avec le calcul des variations et le calcul fonctionnel; une partie de cette thèse a été publiée dans [2].

(2) Les indices en caractères latins proviennent toujours des x, ceux en caractères grecs des z. On doit prendre comme d'habitude la somme sur tout indice apparaissant deux fois. Nous avons pris soin de choisir la notation de telle manière que dans ce cas l'un des indices apparaît en haut et l'autre en bas.

Formons l'intégrale

$$(1.4) \qquad I = \int_D \mathfrak{L}[x^i, z^\alpha(x^i), z^\alpha_k(x^i)]\,dx,$$

où dx signifie $dx^1, \ldots, dx^n$. I est une fonctionnelle dépendant du choix de la surface S, donnée par (1.1) ainsi que des valeurs des ν fonctions z^α dans D et sur S.

Pour obtenir une interprétation mécanique utilisable, il faudra rendre le nombre de dimensions n égal à 4, trois dimensions d'espace et une de temps.

Les fonctions $z^\alpha(x^i)$ décrivent une propriété quelconque du milieu qui remplit l'espace (déformations élastiques, potentiels électromagnétiques, etc.). Posons comme postulat que *les équations du mouvement* s'obtiennent en annulant la variation δI de I, pour des variations indépendantes de ses arguments, c'est-à-dire de S et des z^α sur S et dans D.

Il est essentiel de considérer aussi la variation de la frontière, ainsi que celle des variables dépendantes sur la frontière, si l'on veut être à même de comprendre le comportement des singularités. Nous traiterons le dernier problème au paragraphe 9.

Pour effectuer la variation, introduisons une famille $S(\varepsilon)$ d'hypersurfaces S à un paramètre ε, situées au voisinage de l'hypersurface donnée, et pour lesquelles

$$(1.5) \qquad \bar{x}^i = x^i + \varepsilon\xi^i.$$

Faisons subir, de même, aux fonctions z^α dans D une variation linéaire en remplaçant $z^\alpha(x^i)$ par

$$(1.6) \qquad \bar{z}^\alpha(x^i) = z^\alpha(x^i) + \varepsilon\,\eta^\alpha(x^i) \qquad \text{dans D.}$$

Les valeurs de ces fonctions sur la frontière déformée $S(\varepsilon) = \bar{S}$ seront

$$(1.7) \qquad \bar{z}^\alpha(\bar{x}^i) = z^\alpha(\bar{x}^i) + \varepsilon\,\eta^\alpha(\bar{x}^i) = z^\alpha(x^i) + \varepsilon(z^\alpha_i\xi^i + \eta^\alpha) \qquad \text{sur S.}$$

La variation totale de z^α sur la frontière peut s'écrire $\varepsilon\zeta^\alpha$, et est donnée par

$$(1.8) \qquad \bar{z}^\alpha(\bar{x}^i) = z^\alpha(x^i) + \varepsilon\zeta^\alpha.$$

En comparant avec (1.7) on voit que

$$(1.9) \qquad \eta^\alpha = \zeta^\alpha - z^\alpha_i\xi^i \qquad \text{sur S.}$$

La première variation de l'intégrale I est

$$(1.10)\qquad \delta I = \left(\frac{d\,I(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right)_0 = \int_D \left(\frac{d\mathfrak{L}}{d\varepsilon}\right)_0 dx + \left(\frac{d}{d\varepsilon}\int_{D+\varepsilon\Delta} (\mathfrak{L})_0\, dx\right)_0$$

où l'indice o indique que $\varepsilon \to 0$ et où $D + \varepsilon\Delta$ représente le domaine limité par la frontière déformée $\bar{S}$.

Avant de simplifier cette intégrale nous introduirons un langage géométrique et nous parlerons de *vecteurs* et de *tenseurs*. Il faut noter cependant qu'il ne s'agira pas, dans notre cas, de calcul tensoriel ordinaire, puisque, jusqu'à nouvel ordre, nous ne postulons aucune relation entre les lois de transformations des variables indépendantes d'une part et celles des variables dépendantes, de l'autre. Nous transformons séparément l'espace des x en introduisant de nouvelles variables

$$\bar{x}^i = \varphi^i(x^1, x^2, \ldots, x^n)$$

et l'espace des z

$$\bar{z}^\alpha = \psi^\alpha(x^1, x^2, \ldots, x^n),$$

mais nous ne faisons encore aucune hypothèse quant à la métrique de ces espaces. Avec ces conventions, dx^i est un vecteur contrevariant dans l'espace des x et dz^α un vecteur contrevariant dans l'espace z; mais, par exemple, z^α est un scalaire dans l'espace des x, tandis que z^α_k est un vecteur covariant dans ce même espace, mais contrevariant dans l'espace des z. Le lagrangien $\mathfrak{L}$ est un scalaire, aussi bien dans l'espace x que dans l'espace z. Les propriétés de transformation se déduisent immédiatement pour n'importe quelle grandeur, d'après le nombre et la position des indices grecs ou latins.

Plus loin nous allons établir entre les transformations des espaces x et z la relation habituelle caractéristique du calcul tensoriel ordinaire; à ce moment, nous aurons à distinguer entre *tenseurs proprement dits* et *densités tensorielles*, discrimination qui est superflue pour l'instant.

Les n dérivées $\frac{dx^1}{du^k}, \frac{dx^2}{du^k}, \ldots, \frac{dx^n}{du^k}$ sont les composantes d'un vecteur contrevariant tangent à S. Il y a $n-1$ vecteurs de ce type, qu'on obtient en prenant successivement $k = 1, 2, \ldots, n-1$; on peut admettre qu'ils sont linéairement indépendants, sans quoi le choix des paramètres u^k sur S ne satisfait pas aux conditions requises.

Considérons un vecteur contrevariant arbitraire a^k dans l'espace des x et définissons dans le même espace un vecteur covariant N_k par la

relation

$$(1.11)\qquad N_k a^k = \begin{vmatrix} a^1 & a^2 & \dots & a^n \\ \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \frac{\partial x^2}{\partial u^1} & \dots & \frac{\partial x^n}{\partial u^1} \\ \frac{\partial x^1}{\partial u^2} & \frac{\partial x^2}{\partial u^2} & \dots & \frac{\partial x^n}{\partial u^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x^1}{\partial u^{n-1}} & \frac{\partial x^2}{\partial u^{n-1}} & \dots & \frac{\partial x^n}{\partial u^{n-1}} \end{vmatrix}.$$

N_k est donc le mineur qu'on obtient à partir de la matrice à $n-1$ lignes et n colonnes

$$\left(\left(\frac{\partial x^k}{\partial u^r}\right)\right)$$

en supprimant la colonne k, prise avec le signe convenable.

Le vecteur N_k est normal à S; en effet en remplaçant dans (1.11) a^k par $\frac{\partial x^k}{du^r}$, on obtient

$$(1.12)\qquad N_k \frac{\partial x^k}{\partial u^r} = 0 \qquad (r = 1, 2, \dots, n-1).$$

Cela étant, considérons d'abord le second terme de la variation δI dans (1.10)

$$(1.13)\qquad \frac{d}{d\varepsilon}\int_{D+\varepsilon\Delta} (\mathfrak{L})_0\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left\{\int_{D+\varepsilon\Delta} (\mathfrak{L})_0\, dx - \int_D (\mathfrak{L})_0\, dx\right\}$$
$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}\int_{\varepsilon\Delta} (\mathfrak{L})_0\, dx.$$

Cette intégrale doit être étendue au domaine $\varepsilon\Delta$ compris entre les surfaces $\overline{S}$ et S, qu'on peut imaginer décomposé en cylindres ayant leurs axes normaux à S. Le volume de l'un de ces cylindres est

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial x^2}{\partial \varepsilon} & \dots & \frac{\partial x^n}{\partial \varepsilon} \\ \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \frac{\partial x^2}{\partial u^2} & \dots & \frac{\partial x^n}{\partial u^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x^1}{\partial u^{n-1}} & \frac{\partial x^2}{\partial u^{n-1}} & \dots & \frac{\partial x^n}{\partial u^{n-1}} \end{vmatrix} \varepsilon\, \Delta u^1\, \Delta u^2 \dots \Delta u^{n-1},$$

lequel en vertu de (1.5) et (1.11) est égal à

$$\varepsilon N_k \xi^k . \Delta u^1\, \Delta u^2 \dots \Delta u^{n-1}.$$

On obtient donc, de (1.13)

$$(1.14)\qquad \left(\frac{d}{d\varepsilon}\int_{D+\varepsilon\Delta}(\mathfrak{L})_0\,dx\right)_0=\int_S \mathfrak{L}\,N_k\xi^k\,du,$$

où du signifie $du^1\ldots du^{n-1}$.

Le premier terme dans (1.10) est

$$(1.15)\qquad \int_D\left[\frac{d}{d\varepsilon}\mathfrak{L}(x^i,\,z^\alpha+\varepsilon\eta^\alpha,\,z^\alpha_k+\varepsilon\eta^\alpha_k)\right]_{\varepsilon=0}dx=\int_D(\mathfrak{L}_{z^\alpha}\eta^\alpha+\mathfrak{L}_{z^\alpha_k}\eta^\alpha_k)\,dx,$$

où les indices dont est affecté $\mathfrak{L}$ indiquent des dérivations partielles.

Introduisons les abréviations suivantes

$$(1.16)\qquad \mathfrak{L}_{z^\alpha}=q_\alpha,\qquad \mathfrak{L}_{z^\alpha_k}=p^k_\alpha;$$

p^k_α est un vecteur contrevariant dans l'espace x. η^α étant un scalaire dans l'espace x, $p^k_\alpha\eta^\alpha$ est aussi un vecteur contrevariant dans ce même espace. Or, pour tout vecteur a^k de ce type, on a le théorème de Gauss

$$(1.17)\qquad \int_D\frac{\partial a^k}{\partial x^k}\,dx=\int_S a^k N_k\,du.$$

Écrivons

$$\mathfrak{L}_{z^\alpha_k}\eta^\alpha_k=p^k_\alpha\frac{\partial\eta^\alpha}{\partial x^k}=\frac{\partial}{\partial x^k}(p^k_\alpha\eta^\alpha)-\eta^\alpha\frac{\partial p^k_\alpha}{\partial x^k}$$

et appliquons (1.17); dans ce cas (1.15) prend la forme

$$(1.18)\qquad \int_D\left(q_\alpha-\frac{\partial p^k_\alpha}{\partial x^k}\right)\eta^\alpha\,dx+\int_S p^k_\alpha N_k\eta^\alpha\,du.$$

Substituons à la place de η^α dans l'intégrale de surface, l'expression (1.9). En ajoutant (1.14) et (1.18) on obtient la variation totale

$$(1.19)\qquad \delta I=\int_D[\mathfrak{L}]_\alpha\eta^\alpha\,dx+\int_S(X_k\xi^k+Z_\alpha\zeta^\alpha)\,du,$$

où l'on a employé, pour abréger les notations suivantes

$$(1.20)\qquad [\mathfrak{L}]_\alpha=\mathfrak{L}_{z^\alpha}-\frac{\partial}{\partial x^k}\mathfrak{L}_{z^\alpha_k}=q_\alpha-\frac{\partial p^k_\alpha}{\partial x^k}.$$

Cette opération est appelée *la dérivée variationnelle de Euler*. Les q_α correspondent aux « forces extérieures » et les p^k_α aux « tensions

internes ». Ensuite

$$(1.21)\qquad \begin{cases} X_k = U_k^i N_i, \\ Z_\alpha = p_\alpha^i N_i, \end{cases}$$

où

$$(1.22)\qquad U_k^i = \mathfrak{L}\,\delta_k^i - p_\alpha^i z_k^\alpha \qquad \left(\delta_k^i = \begin{cases} 1 \text{ pour } i = k \\ 0 \text{ pour } i \neq k \end{cases}\right)$$

est un tenseur mixte du second rang dans l'espace x. En langage du calcul fonctionnel, tel qu'il a été développé par Volterra et autres auteurs, $[\mathfrak{L}]_\alpha$ est appelée la dérivée de I par rapport à z^α, prise au point x^i du domaine D, tandis que X_k et Z_α sont les dérivées de I par rapport à x^k et z^α au point u^k de la frontière S.

2. Équations d'Euler et lois de conservation. — D'après le lemme fondamental du calcul des variations, les fonctions η^α étant arbitraires, la variation δI ne peut s'annuler que si

$$(2.1)\qquad [\mathfrak{L}]_\alpha = q_\alpha - \frac{\partial p_\alpha^k}{\partial x^k} = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, \nu),$$

Ces équations sont les *équations différentielles de Euler* qui constituent dans les applications à la dynamique, les équations d'équilibre ou de mouvement (équations de champ). Lorsqu'elles sont satisfaites, la première variation de I se réduit à la « formule des limites »

$$(2.2)\qquad \delta I = \int_S (X_k \xi^k + Z_\alpha \zeta^\alpha)\, du.$$

Lorsqu'on annule également cette intégrale on restreint le nombre et la nature des conditions aux limites possibles des fonctions z^α sur S. Le cas le plus simple est celui où les z^α prennent des valeurs données sur une surface donnée S; dans ce cas $\xi^k = 0$, $\zeta^\alpha = 0$ et par conséquent $\delta I = 0$. Lorsqu'on n'impose cependant aucune condition « artificielle » de ce genre, l'équation $\delta I = 0$ elle-même fournira la condition aux limites « naturelles ». Par exemple, si les z^α peuvent prendre n'importe quelle valeur (ζ^α arbitraire) sur une surface donnée ($\xi^k = 0$), les dérivées z_k^α ne pourront pas être complètement arbitraires sur S, mais devront satisfaire la condition aux limites « dynamiques » suivantes

$$(2.3)\qquad Z_\alpha = p_\alpha^i N_i = 0$$

sur S.

Dans les applications à l'électrodynamique, la valeur de la variation δI sur la frontière sera utilisée pour déterminer le comportement du champ dans le voisinage des singularités (charges).

Il est souvent utile de considérer les $n\nu$ quantités z_k^α non plus comme les dérivées des fonctions z^α, mais comme des grandeurs indépendantes. D'un autre côté, si un certain nombre $n\nu$ de pareilles fonctions $z_k^\alpha(x^i)$ peuvent être effectivement considérées comme des dérivées $\frac{\partial z^\alpha}{\partial x^k}$, elles devront satisfaire les $\nu\,\frac{n(n-1)}{2}$ « conditions d'intégrabilité » suivantes :

$$\frac{\partial z_k^\alpha}{\partial x^i} - \frac{\partial z_i^\alpha}{\partial x^k} = 0. \tag{2.4}$$

Nous allons déduire maintenant une identité qui conduit aux lois de conservation de la dynamique.

Une méthode célèbre due à Klein [1] utilise à cet effet la notion de transformation infinitésimale. Dans notre cas, nous avons affaire en particulier à un déplacement de tout l'espace qui n'altère pas les fonctions z^α; nous devons donc prendre $\xi^k = \text{const.}$, et déterminer les variations η^α des z^α de façon que ce déplacement ne fasse pas varier les z^α. Écrivons donc cela

$$z^\alpha(x^i + \varepsilon\xi^i) + \varepsilon\eta^\alpha = z^\alpha(x^i),$$

d'où il suit que

$$z_i^\alpha \xi^i + \eta^\alpha = 0 \qquad \text{ou} \qquad \zeta^\alpha = 0.$$

Ce déplacement provoque donc une variation de I égale à

$$\delta I = \left[\frac{d}{d\varepsilon}\int_D \mathfrak{L}(x^k + \varepsilon\xi^k;\ z^\alpha,\ z_k^\alpha)\,dx\right]_0 = \xi^k \int_D \mathfrak{L}_{x^k}\,dx. \tag{2.5}$$

Or, notre formule générale (1.19) donne pour ce cas $\xi^k = \text{const.}$, $\zeta^\alpha = 0$, $\eta^\alpha = -z_k^\alpha \xi^k$:

$$\delta I = \xi^k \left[-\int_D [\mathfrak{L}]_\alpha z_k^\alpha\,dx + \int_S X_k\,du\right]. \tag{2.6}$$

Égalant (2.5) et (2.6) et utilisant (1.21), on obtient

$$\int_S U_k^i N_i\,du = \int_D (\mathfrak{L}_{x^k} + [\mathfrak{L}]_\alpha z_k^\alpha)\,dx. \tag{2.7}$$

Cette *identité intégrale* peut être transformée en une autre qui ne

contienne que des dérivées, en utilisant le théorème de Gauss sur la transformation d'une intégrale de surface en une intégrale de volume.

On obtient

$$\frac{\partial U_k^i}{\partial x^i} = \mathfrak{L}_{x^k} + [\mathfrak{L}]_\alpha z_k^\alpha. \tag{2.8}$$

On peut obtenir une identité plus générale en dérivant directement la relation (1.22). Admettons que ni les équations d'Euler (2.1), ni les conditions d'intégrabilité (2.4) ne soient satisfaites, et considérons $\mathfrak{L}$ et $p_\alpha^i = \mathfrak{L}_{z_i^\alpha}$ comme fonctions de x^i, $z^\alpha(x^i)$ et $z_k^\alpha(x^i)$. Cela étant, la dérivée de $\mathfrak{L}$ par rapport à x^k (z^α et z_k^α étant considérées comme des fonctions de x^k) est

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x^k} = \mathfrak{L}_{x^k} + \mathfrak{L}_{z^\beta}\frac{\partial z^\beta}{\partial x_k} + \mathfrak{L}_{z_i^\beta}\frac{\partial z_i^\beta}{\partial x^k}.$$

De (1.22) il résulte que

$$\frac{\partial U_k^i}{\partial x^i} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x^k} - \frac{\partial p_\beta^i}{\partial x^i} z_k^\beta - p_\beta^i \frac{\partial z_k^\beta}{\partial x^i},$$

d'où

$$\frac{\partial U_k^i}{\partial x^i} = \mathfrak{L}_{x^k} + \left(q_\beta \frac{\partial z^\beta}{\partial x^k} - \frac{\partial p_\beta^i}{\partial x^i} z_k^\beta\right) + p_\beta^i \left(\frac{\partial z_i^\beta}{\partial x^k} - \frac{\partial z_k^\beta}{\partial x^i}\right). \tag{2.9}$$

Cette identité est plus générale que (2.8); si toutefois les conditions d'intégrabilité (2.4) sont satisfaisantes, le dernier terme disparaît et on peut poser $z_k^\beta = \frac{\partial z^\beta}{\partial x^k}$; dans ce cas (2.9) se réduit à (2.8).

Si, de plus, l'équation d'Euler (2.1) est satisfaite, on aura

$$\frac{\partial U_k^i}{\partial x^i} = \mathfrak{L}_{x^k} \qquad \text{ou} \qquad \int_S U_k^i N_i \, du = \int_G \mathfrak{L}_{x^k} \, dx. \tag{2.10}$$

Considérons maintenant des systèmes « conservatifs », dans lesquels tout phénomène est indépendant de la position absolue du système dans l'espace, c'est-à-dire pour lesquels $\mathfrak{L}$ ne dépend pas explicitement des x^k (espace et temps)

$$\mathfrak{L}_{x^k} = 0.$$

Dans ce cas nous avons les *lois de conservation*

$$\frac{\partial U_k^i}{\partial x^i} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \int_S U_k^i N_i \, du = 0. \tag{2.11}$$

A la fin de ce paragraphe, mentionnons un type particulier de

systèmes qui vont s'avérer importants en électrodynamique, à savoir, ceux pour lesquels les équations d'Euler (2.1) et les conditions d'intégrabilité (2.4) sont interchangeables; on peut les appeler systèmes *self-duals* ou *autoconjugués*.

Une première condition évidente pour réaliser la self-dualité est $q_\alpha = \mathfrak{L}_{z^\alpha} = 0$, « la force » doit être nulle. Une seconde condition est évidemment l'égalité du nombre d'équations (2.1) d'une part et (2.4) de l'autre, soit

$$\nu \frac{n(n-1)}{2} = \nu \tag{2.12}$$

dont la seule solution positive est $n = 2$, ν arbitraire.

Les systèmes self-duals ne sont donc possibles que dans un espace x à deux dimensions et doivent avoir une « force » nulle. Mais ce résultat n'est valable que pour le système le *plus général*, c'est-à-dire pour celui qui contient le plus grand nombre possible d'équations d'Euler et de conditions d'intégrabilité « indépendantes »; il peut ne pas en être ainsi pour certaines catégories de systèmes particuliers et nous allons voir plus loin que l'électrodynamique entre précisément dans une de ces catégories.

On peut aisément se convaincre que, dans le cas général, les deux conditions nécessaires, indiquées plus haut, sont également suffisantes. Il suffit, en effet, d'introduire les nouvelles grandeurs $\mathfrak{H}$, z_α^{*i}, $p_i^{*\alpha}$, définies par

$$\begin{cases} z_\alpha^{*1} = z_2^\alpha, & z_\alpha^{*2} = -z_1^\alpha, \\ p_1^{*\alpha} = -p_\alpha^2, & p_2^{*\alpha} = p_\alpha^1, \\ \mathfrak{H} = \mathfrak{L} - p_\beta^l z_l^\beta = \mathfrak{L} + z_\beta^{*l} p_l^{*\beta}, \end{cases} \tag{2.13}$$

et de considérer une nouvelle intégrale à varier

$$I^* = \int_G \mathfrak{H}(x^i, p_i^{*\alpha})\, dx, \tag{2.14}$$

avec les conditions d'intégrabilité

$$\frac{\partial p_2^{*\alpha}}{\partial x^1} - \frac{\partial p_1^{*\alpha}}{\partial x^2} = 0. \tag{2.15}$$

De cette dernière relation, on conclut à l'existence de ν fonctions $p^{*\alpha}$, telles que

$$p_i^{*\alpha} = \frac{\partial p^{*\alpha}}{\partial x^i}, \tag{2.16}$$

et l'on obtient

$$\mathfrak{H}_{p^{*\alpha}} = 0, \qquad z_\alpha^{*i} = \mathfrak{H}_{p_i^{*\alpha}}. \tag{2.17}$$

Les équations d'Euler sont

$$\frac{\partial z_\alpha^{*1}}{\partial x^1} + \frac{\partial z_\alpha^{*2}}{\partial x^2} = 0. \tag{2.18}$$

On voit immédiatement que cette théorie « duale » est identique avec celle que nous avons étudiée.

Comme exemples de théories « self-duales » avec $\nu = 1$, on peut citer les suivantes $\left(\text{on pose } z_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}\right)$:

1° Les conditions de Cauchy-Riemann qui interviennent dans la théorie des fonctions analytiques peuvent être considérées comme conditions d'intégrabilité et équations d'Euler d'un système ayant pour lagrangien

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2}[(z_1)^2 + (z_2)^2].$$

2° La théorie des surfaces minima se déduit du lagrangien

$$\mathfrak{L} = \sqrt{1 + (z_1)^2 + (z_2)^2}.$$

3° Une forme simple d'électrodynamique non-linéaire étudiée par Pryce, pour laquelle on peut déterminer complètement les solutions correspondant à des charges ponctuelles, découle de

$$\mathfrak{L} = \sqrt{1 - (z_1)^2 - (z_2)^2}.$$

3. **L'électrodynamique de Mie** [1]. — La théorie que nous avons développée jusqu'ici décrit les propriétés de tous les types de systèmes dynamiques continus, élasticité, hydrodynamique, champs électromagnétiques ou de gravitation. Le traitement est le même; seule diffèrent la signification physique des variables z^α et le choix de la fonction $\mathfrak{L}$.

Nous nous occupons ici plus particulièrement du champ électromagnétique; cependant, pour rendre notre théorie absolument invariante, nous sommes obligés d'y incorporer la gravitation, laquelle est reliée, d'après Einstein, à la structure géométrique de l'espace, c'est-à-dire à sa métrique.

Nous aurons donc deux groupes de fonctions z^α : l'un décrivant le

champ électromagnétique, l'autre le champ gravitationnel ou métrique. L'expression mathématique des résultats expérimentaux les plus généraux concernant ces phénomènes, consiste en des propriétés de transformations bien définies; les fonctions z^α ne sont plus représentées uniquement dans leur propre espace z, mais doivent être mises également en rapport avec l'espace x : toute transformation de l'espace x « induit » une transformation correspondante dans l'espace z.

Le champ électromagnétique est représenté par un vecteur covariant φ_i; le champ métrique par un tenseur covariant du second rang symétrique $g_{ik} = g_{ki}$. Le nombre des « variables dépendantes » est donc :

$$\nu = \frac{n(n+1)}{2} + n, \tag{3.1}$$

ce qui donne $\nu = 14$ pour $n = 4$. Une transformation générale dans l'espace des x

$$x^i \to \bar{x}^i(x^1 x^2 \ldots x^n) \tag{3.2}$$

induit dans l'espace (φ, g), la transformation

$$\begin{cases} \bar{\varphi}_i \ (\bar{x}) = \dfrac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^i} \varphi_l(x), \\ \bar{g}_{ik}(\bar{x}) = \dfrac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^i} \dfrac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^k} g_{lm}(x). \end{cases} \tag{3.3}$$

Nous pouvons utiliser maintenant *le calcul tensoriel proprement dit* [2]. Nous considérerons dorénavant φ_i et $\varphi^i = g^{il}\varphi_l$ (où g^{il} est la matrice réciproque de g_{il}, $g_{ik}g^{kl} = \delta_i^l$) comme des composantes covariante et contrevariante *d'un même vecteur* φ, et nous ferons une supposition analogue pour tout tenseur, de rang quelconque; cela signifie que nous admettrons la possibilité d'élever ou d'abaisser les indices.

En dehors des vecteurs ou tenseurs nous utiliserons également des *densités vectorielles ou tensorielles* que nous désignerons par des lettres gothiques; par exemple s_i étant un vecteur et a_{ik} un tenseur du second rang, les densités correspondantes seront

$$\mathfrak{s}_i = \sqrt{-g}\, s_i, \qquad \mathfrak{a}_{ik} = \sqrt{-g}\, a_{ik},$$

où $g = |g_{ik}|$ est le déterminant du tenseur fondamental. Étant donné que $\sqrt{-g}\,.dx$ est invariant, les densités ont la propriété que leur inté-

grale sur un domaine de l'espace x est invariante. Étant donné également que

$$\sqrt{-g}\, s_i g^{ik} = \sqrt{-g}\, s^k = \mathfrak{s}^k,$$

la règle de déplacement des indices est la même, aussi bien pour les tenseurs que pour les densités tensorielles.

Examinons maintenant le problème proprement physique de l'influence respective des forces gravitationnelles et électromagnétiques sur les phénomènes qui nous intéressent ici, à savoir ceux qui concernent le comportement des particules matérielles élémentaires.

Nous sommes tout disposés, évidemment, à faire une place au phénomène d'inertie dans notre théorie, dont le point de départ a été précisément le problème de la masse électromagnétique. Cependant, d'un autre côté, il existe de très forts arguments qui nous permettent de négliger les forces gravifiques par rapport aux forces électromagnétiques, même « à l'intérieur » des particules. Considérons deux particules matérielles identiques de masse m et de charge e, et soit r la distance entre elles; le rapport entre les forces d'attraction électrique (Coulomb) et gravifique est égale à $\frac{e^2}{\mathrm{K}m^2}$, où $\mathrm{K} = 6,66 \times 10^{-8}$ C.G.S. est la constante de gravitation. En introduisant dans cette expression les valeurs numériques qui correspondent à l'électron $e/m = 5,3 \times 10^{17}$ C.G.S., on obtient comme valeur du rapport 4×10^{42}, ce qui démontre l'insignifiance du rôle que joue la gravitation dans la structure des électrons.

En dépit de ce résultat, il existe un grand nombre de travaux ayant pour objet d'expliquer par la gravitation la cohésion de l'électron (c'est-à-dire le fait qu'il résiste à l'action des forces électriques qui tendent à l'éparpiller dans l'espace). Cette idée, introduite par Einstein [3], a donné lieu à de nombreuses tentatives de synthèse des lois de l'électromagnétisme et de la gravitation. On a développé d'élégantes théories mathématiques, généralisant l'idée initiale d'Einstein de la description des lois naturelles au moyen de la géométrie de Riemann. Nous possédons, par exemple aujourd'hui, une géométrie d'univers affine et une géométrie projective qui constituent des théories réunissant dans un même formalisme mathématique aussi bien les lois de la gravitation que celles de l'électromagnétisme. Cependant, pour ma part, j'estime que ces théories sont encore plus éloignées de la physique actuelle que celle que je veux exposer ici, et qui constitue à mon avis une des étapes

nécessaires, qu'on doit franchir avant d'aboutir à une théorie satisfaisante des particules élémentaires.

Pour nous rendre parfaitement compte de l'approximation que nous voulons introduire, nous prendrons comme point de départ un principe de variation qui n'écarte pas *a priori* la gravitation. Le principe le plus général aurait comme point de départ un lagrangien $\mathfrak{L}$, densité tensorielle qui serait fonction de g_{ik}, $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}$, $\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^l \partial x^m}$ ainsi que des φ_i, $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x^l} = \varphi_{l,i}$. En absence d'informations plus précises, nous sommes cependant réduits à admettre que $\mathfrak{L}$ se compose additivement d'un terme correspondant à la théorie d'Einstein et d'un autre terme représentant les actions électromagnétiques :

$$\text{(3.4)} \qquad I = \int \frac{1}{2} R \sqrt{-g}\, dx + K \int \mathfrak{L}\, dx,$$

où K est la constante de gravitation (notation d'Einstein) et où $\mathfrak{L}$ dépend de φ_i et $\varphi_{l,i} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^l}$; par suite du postulat d'invariance, $\mathfrak{L}$ dépendra aussi des g_{ik} mais nous admettrons qu'il est indépendant des $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}$ (nous aurons à revenir sur ce point). En variant les g_{ik}, on obtient les *équations de la gravitation*;

$$\text{(3.5)} \qquad R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = -K T_{ik},$$

où R_{ik} est le tenseur de courbure de Riemann et T_{ik} un tenseur du second rang dont la densité est donnée par

$$\text{(3.6)} \qquad \sqrt{-g}\, T_{ik} = \mathfrak{T}_{ik} = \mathfrak{T}^{rs} g_{ri} g_{sk}, \qquad \mathfrak{T}^{rs} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_{rs}} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_{sr}} \quad (^1).$$

Notre approximation fondamentale consiste à négliger dans (3.5) le terme en K qui exprime le couplage entre le champ électromagnétique et le champ de gravitation. En remplaçant dans (3.5) le second membre par o, une solution du système est un espace quasi euclidien, qu'on peut supposer ramené, par un choix convenable des axes de coordonnées, à la forme normale

$$\text{(3.7)} \qquad g_{ik} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

(1) Dans ce qui suit nous emploierons le symbole ∂ avec deux significations : 1° pour les dérivées par rapport à φ_i, $\varphi_{i,k}$, g_{ik}, etc.; 2° pour les dérivées « *totales* » par rapport à x^k. Il faut bien faire la distinction entre ces deux significations différentes.

Il est hors de doute que cette hypothèse peut être raisonnablement appliquée dans tout l'espace, sauf peut-être au centre même des électrons où il peut y avoir des déviations si les champs deviennent infinis. Cependant, le but de notre théorie est précisément d'éviter l'apparition de valeurs infiniment grandes, au moins en ce qui concerne l'énergie; dans ces conditions, il semble qu'il n'y a aucun risque à admettre que l'espace reste euclidien même au centre des particules considérées. Nous reviendrons plus tard sur cette question, lorsque nous indiquerons la solution d'un cas particulier de champs gravifiques et électromagnétiques combinés. Nous discutons à ce moment le problème de l'influence des forces de gravitation sur la masse de la particule.

Nous pourrions admettre que les g_{ik} ont les valeurs (3.7) valables dans un système de coordonnées de Lorentz. Nous préférons cependant nous en abstenir, pour éviter les difficultés de signe qui découlent de la signature de la matrice (g_{ik}) et pour avoir la possibilité d'introduire à volonté n'importe quel système de coordonnées dans l'espace-temps.

Si l'on prend le tenseur fondamental indiqué, on obtient l'électrodynamique générale développée par Mie en 1913, avec cependant deux nouvelles hypothèses :

1. Le lagrangien dépend de φ_k, $\varphi_{l,k} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^l}$ et g_{kl}, mais est indépendant des dérivées $\frac{\partial g_{rl}}{\partial x^m}$.

2. L'intégrale

$$\mathrm{I} = \int \mathfrak{L}(\varphi_k, \varphi_{l,k}, g_{kl})\, dx \tag{3.8}$$

est invariante par rapport à toutes les transformations des coordonnées. L'interprétation de ce second postulat est la suivante : La valeur de I doit être *la même* dans n'importe quel système de coordonnées si $\mathfrak{L}$ est *la même fonction* des variables précédentes, prises dans le système considéré.

Mie lui-même postulait naturellement, au lieu de 2, l'invariance par rapport aux transformations de Lorentz. A la place de 1 il introduisait l'hypothèse que $\mathfrak{L}$ dépend effectivement des dérivées $\varphi_{l,k}$ mais seulement par l'intermédiaire des combinaisons antisymétriques,

$$f_{kl} = \varphi_{k,l} - \varphi_{l,k} = \frac{\partial \varphi_l}{\partial x^k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^l} = -f_{lk}, \tag{3.9}$$

qui représentent *les composantes de champ*. Or, on peut démontrer que cela découle nécessairement de 1 et 2, en remarquant que tous les invariants des $\varphi_{k,l}$ qui sont distincts des invariants des f_{rl}, contiennent nécessairement les dérivées $\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}$. On peut former par exemple l'invariant qui correspond à celui de Lorentz $\operatorname{div}\varphi = \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_k} = \varphi_{k,k}$; nous devons dans ce cas employer la dérivée covariante. La quantité

$$\operatorname{div}\varphi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g}\,\varphi_l g^{kl})}{\partial x^k}$$

est bien invariante, mais contient $\frac{\partial g^{kl}}{\partial x^m}$. Nous n'insisterons pas là-dessus ici, parce que nous donnerons une démonstration simple de ce théorème dans le paragraphe suivant (§ 4).

Pour l'instant, nous admettons que $\mathfrak{L}$ est une fonction de φ_k, f_{kl}, g_{kl}. La variation de $\mathfrak{L}$ est donnée par

$$d\mathfrak{L} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \varphi_{kl}} d\varphi_k + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial f_{kl}} df_{kl} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_{kl}} dg_{kl}. \tag{3.10}$$

La dérivation partielle de $\mathfrak{L}$ par rapport à l'une des variables f_{kl} ou g_{kl} doit être effectuée sans tenir compte des propriétés de symétrie de ces dernières; on doit donc, par exemple, prendre séparément la dérivée par rapport à g_{kl} et à g_{lk}.

Introduisons maintenant la notation suivante :

$$\mathfrak{s}^k = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \varphi_k}, \qquad \mathfrak{p}^{kl} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial f_{kl}} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial f_{lk}}, \qquad \mathfrak{T}^{kl} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_{kl}} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_{lk}}. \tag{3.10 a}$$

Les dérivées de $\mathfrak{L}$ par rapport à f_{kl} et g_{kl} n'ont aucune propriété de symétrie; par contre $\mathfrak{p}^{kl}$ et $\mathfrak{T}^{kl}$ sont respectivement antisymétrique et symétrique

$$\mathfrak{p}^{kl} = -\mathfrak{p}^{lk}, \qquad \mathfrak{T}^{kl} = \mathfrak{T}^{lk}. \tag{3.11}$$

On peut écrire maintenant (3.10) sous la forme

$$d\mathfrak{L} = \mathfrak{s}^k d\varphi_k + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial f_{kl}} df_{kl} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial f_{lk}} df_{lk}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_{kl}} dg_{kl} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_{lk}} dg_{lk}\right),$$

et puisque $f_{kl} = -f_{lk}$, $g_{kl} = g_{lk}$,

$$d\mathfrak{L} = \mathfrak{s}^k d\varphi_k + \frac{1}{2}\mathfrak{p}^{kl} df_{kl} + \frac{1}{2}\mathfrak{T}^{kl} dg_{kl}. \tag{3.10 b}$$

Le *postulat d'invariance* a une autre conséquence importante exprimée par la relation

$$\mathfrak{L}\,\delta^l_k = \mathfrak{s}^l \varphi_k + \mathfrak{p}^{lm} f_{km} + \mathfrak{T}^{lm} g_{km} \tag{3.12}$$

que nous démontrerons dans le paragraphe suivant (§ 4).

D'après notre définition de la dérivation, nous avons :

$$\mathfrak{p}^{k,l} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \varphi_{k,l}} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial f_{ij}} \frac{\partial f_{ij}}{\partial \varphi_{k,l}} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial f_{kl}} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial f_{lk}} = \mathfrak{p}^{kl}.$$

Cela étant, les équations d'Euler auxquelles conduit la variation de l'intégrale (3.8), en d'autres termes *les équations du champ*, auront la forme

$$\frac{\partial \mathfrak{p}^{lk}}{\partial x^l} = \mathfrak{s}^k \tag{3.13}$$

(pour la traduction en notation vectorielle ordinaire, voir § 5). Elles montrent que les $\mathfrak{p}^{lk}$ constituent *l'autre catégorie des composantes de champ* et que $\mathfrak{s}^k$ représente la *densité spatiale de charge et de courant*. On déduit de (3.13) *l'équation de continuité*

$$\frac{\partial \mathfrak{s}^k}{\partial x^k} = 0. \tag{3.14}$$

Les *conditions d'intégrabilité* (2.4) de la théorie générale perdent toute signification si l'on prend les f_{kl} au lieu de $\varphi_{k,l}$ comme variables dont dépend $\mathfrak{L}$; elles sont remplacées par les conditions suivantes :

$$\frac{\partial f_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial f_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial f_{li}}{\partial x^k} = 0, \tag{3.15}$$

équivalentes à (3.9) et qui sont nécessaires et suffisantes pour pouvoir conclure à l'existence des potentiels φ_i lorsqu'on part d'un ensemble donné de f_{kl}.

Dans un espace à n dimensions, leur nombre est égal à

$$\binom{n}{3} = \frac{1}{6} n(n-1)(n-2),$$

ce qui donne 4 pour $n = 4$. Elles ne sont pas toutes indépendantes; il n'y en a que 3 indépendantes pour $n = 4$. Si l'on introduit la notation vectorielle ordinaire, on voit que (3.15) représente *le second groupe des équations du champ*.

Examinons maintenant le problème des *lois de conservation*. Pour cela, transcrivons, pour notre cas particulier, l'expression (1.22) de U_k^l; on a

$$\mathfrak{U}_k^l = \mathfrak{L}\,\delta_k^l - \mathfrak{p}^{l,j}\varphi_{k,j} \qquad \left(\mathfrak{p}^{l,j} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \varphi_{l,j}}\right). \tag{3.16}$$

Nous considérons les g_{kl} comme des fonctions données des x^k; en apparence il semble donc ne pas y avoir de loi de conservation proprement dite, mais simplement la relation (2.10) qui s'écrit ici

$$\frac{\partial \mathfrak{U}_k^l}{\partial x^l} = \frac{1}{2}\mathfrak{T}^{rs}\frac{\partial g_{rs}}{\partial x^k}. \tag{3.17}$$

Une autre difficulté est le fait que, d'après (3.16), $\mathfrak{U}_k^l$ dépend explicitement des $\varphi_{k,l}$. Si cependant on substitue l'expression (3.12) de $\mathfrak{L}\,\delta_k^l$, on obtient, à cause de $\mathfrak{p}^{k,l} = \mathfrak{p}^{kl}$,

$$\mathfrak{U}_k^l = \mathfrak{T}_k^l + \mathfrak{s}^l\varphi_k + \mathfrak{p}^{jl}\varphi_{j,k}, \tag{3.18}$$

où l'on a fait usage de la règle habituelle pour abaisser l'indice k de $\mathfrak{T}^{kl}$. A l'aide de cette équation, on peut éliminer le $\mathfrak{U}_k^l$ de (3.17) et l'on obtient une relation pour $\mathfrak{T}^{kl}$ qui peut être interprétée comme une véritable loi covariante de conservation.

Eu égard à (3.13), on a

$$\left\{\begin{aligned} &\mathfrak{s}^l\varphi_k + \mathfrak{p}^{jl}\varphi_{j,k} = \frac{\partial \mathfrak{p}^{jl}}{\partial x^j}\varphi_k + \mathfrak{p}^{jl}\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x^j}(\mathfrak{p}^{jl}\varphi_k),\\ &\frac{\partial}{\partial x^l}(\mathfrak{s}^l\varphi_k + \mathfrak{p}^{jl}\varphi_{j,k}) = \frac{\partial^2}{\partial x^l\,\partial x^j}(\mathfrak{p}^{jl}\varphi_k) = 0, \end{aligned}\right. \tag{3.19}$$

puisque p^{jl} est antisymétrique. Cela montre que $\mathfrak{T}_k^l$ et $\mathfrak{U}_k^l$, reliées par (3.18), ne diffèrent que par une grandeur de divergence nulle; donc

$$\frac{\partial \mathfrak{U}_k^l}{\partial x^l} = \frac{\partial \mathfrak{T}_k^l}{\partial x^l}, \tag{3.20}$$

et (3.17) devient

$$\frac{\partial \mathfrak{T}_k^l}{\partial x^l} - \frac{1}{2}\mathfrak{T}^{rs}\frac{\partial g_{rs}}{\partial x^k} = 0. \tag{3.21}$$

L'expression du premier membre est la *divergence covariante* de la densité tensorielle $\mathfrak{T}_k^l$, [4]; cette dernière satisfait à une loi covariante de conservation, comme il fallait s'y attendre.

Les raisonnements précédents mettent directement en évidence la relation entre l'électrodynamique de Mie et le cas général traité au § 1, en supposant connue la relation (3.12). Indiquons une autre manière d'aboutir à la loi (3.21).

On a, d'après la définition (3.10*b*) :

$$\frac{\partial}{\partial x^l}(\mathfrak{L}\,\delta^l_k) = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x^k} = \mathfrak{s}^l \frac{\partial \varphi_l}{\partial x^k} + \frac{1}{2}\mathfrak{p}^{lj}\frac{\partial f_{lj}}{\partial x^k} + \frac{1}{2}\mathfrak{T}^{lj}\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k}.$$

Ensuite, en vertu de (3.14)

$$\frac{\partial(\mathfrak{s}^l \varphi_k)}{\partial x^l} = \mathfrak{s}^l \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^l} + \varphi_k \frac{\partial \mathfrak{s}^l}{\partial x^l} = \mathfrak{s}^l \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^l},$$

et, en utilisant (3.13)

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\mathfrak{p}^{lj} f_{kj})}{\partial x^l} &= \mathfrak{p}^{lj}\frac{\partial f_{kj}}{\partial x^l} + \frac{\partial \mathfrak{p}^{lj}}{\partial x^l} f_{kj} \\ &= \mathfrak{p}^{lj}\frac{\partial f_{kj}}{\partial x^l} + \mathfrak{s}^j f_{kj} = \frac{1}{2}\mathfrak{p}^{lj}\left(\frac{\partial f_{kj}}{\partial x^l} + \frac{\partial f_{lk}}{\partial x^l}\right) + \mathfrak{s}^l f_{kl}.\end{aligned}$$

En ajoutant convenablement ces équations et en tenant compte de (3.15), on obtient

$$\frac{\partial}{\partial x^l}[\mathfrak{L}\,\delta^l_k - \mathfrak{s}_l \varphi_k - \mathfrak{p}^{lj} f_{kj}] = \frac{1}{2}\mathfrak{T}^{rs}\frac{\partial g_{rs}}{\partial x^k}. \tag{3.22}$$

Anticipons sur la démonstration de la formule (3.12) qui sera établie au paragraphe 4 par des considérations d'invariance; l'expression entre parenthèses se trouve être $\mathfrak{T}^{lm} g_{km} = \mathfrak{T}^l_k$ et (3.22) devient (3.21).

Lorsque les équations du champ sont satisfaites, la variation de I se réduit à sa valeur sur la frontière que nous écrivons ici

$$\delta \mathrm{I} = \int_{\mathrm{S}} (\mathfrak{X}_k\,\delta x^k + \mathfrak{P}^k\,\delta\varphi_k)\,du \tag{3.23}$$

avec

$$\mathfrak{X}_k = \mathfrak{U}^i_k \mathrm{N}_i, \qquad \mathfrak{P}^k = \mathfrak{p}^{ik}\mathrm{N}_i. \tag{3.24}$$

Puisque $\mathfrak{U}^i_k$ et $\mathfrak{T}^i_k$ ne diffèrent que par des termes de divergence nulle, on peut remplacer la première équation par

$$\mathfrak{X}_k = \mathfrak{T}^i_k \mathrm{N}_i. \tag{3.24 a}$$

L'importance de cette intégrale de surface apparaîtra plus tard, lorsque nous aurons à nous occuper du mouvement des charges ponctuelles [5].

4. Invariance généralisée. — Considérons une transformation infinitésimale des coordonnées, donnée par

$$\bar{x}^k = x^k + \varepsilon\, \xi^k(\bar{x}^i), \tag{4.1}$$

où les ξ^k sont des fonctions continues arbitraires des x^i. La transformation inverse est

$$x^k = \bar{x}^k - \varepsilon\, \xi^k(x^i). \tag{4.2}$$

Introduisons cette expression dans (3.3) qui représente la transformation de φ_i et g_{ik} induite par la précédente; on obtient aisément :

$$\left\{\begin{aligned} \bar{\varphi}_k &= \varphi_k - \varepsilon \frac{\partial \xi^l}{\partial x^k} \varphi_l, \\ \bar{g}_{kl} &= g_{kl} - \varepsilon \left(g_{ik} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^l} + g_{lj} \frac{\partial \xi^j}{\partial x^k} \right), \end{aligned}\right. \tag{4.3}$$

et en dérivant $\bar{\varphi}_k$

$$\bar{\varphi}_{l,k} = \frac{\partial \bar{\varphi}_k}{\partial \bar{x}^l} = \frac{\partial}{\partial x^m} \left(\varphi_k - \varepsilon \frac{\partial \xi^j}{\partial x^k} \varphi_j \right) \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^l},$$

ou

$$\bar{\varphi}_{l,k} = \varphi_{l,k} - \varepsilon \left(\varphi_{j,k} \frac{\partial \xi^j}{\partial x^l} + \varphi_{l,j} \frac{\partial \xi^j}{\partial x^k} + \frac{\partial^2 \xi^j}{\partial x^k \partial x^l} \varphi_j \right). \tag{4.4}$$

Dans (4.3) et (4.4) les seconds membres doivent être considérés comme fonctions de x^k et les premiers membres comme fonctions de $\bar{x}^k$, lesquels sont liés aux x^k par la transformation (4.1).

Appelons le terme en ε « la variation » $\delta\varphi_k$ de φ_k, δg_{kl} de g_{kl}, $\delta\varphi_{k,l}$ de $\varphi_{k,l}$, etc.; on a

$$\delta\varphi_k = \bar{\varphi}_k(\bar{x}_i) - \varphi_k(x^i) \ldots.$$

Écrivons maintenant

$$\bar{\mathfrak{L}} = \mathfrak{L}(\bar{\varphi}_k, \bar{g}_{kl}, \bar{\varphi}_{l,k}) = \mathfrak{L}(\varphi_k, g_{kl}, \varphi_{l,k}) + \delta\mathfrak{L}, \tag{4.5}$$

et utilisons les notations

$$\mathfrak{s}^k = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \varphi_k}, \qquad \mathfrak{p}^{k,j} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \varphi_{k,j}}, \qquad \mathfrak{T}^{kj} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g^{kj}} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g^{jk}}, \tag{4.6}$$

on a

$$\delta\mathfrak{L} = \mathfrak{s}^k\, \delta\varphi_k + \mathfrak{p}^{k,j}\, \delta\varphi_{k,j} + \frac{1}{2} \mathfrak{T}^{kj}\, \delta g_{ki}. \tag{4.7}$$

En y substituant la valeur des variations données par (4.3) et (4.4)

et en modifiant convenablement les indices, on obtient

$$(4.8)\qquad \delta\mathfrak{L} = -\varepsilon(\mathfrak{s}^l \varphi_k + \mathfrak{p}^{l,j}\varphi_{k,j} + \mathfrak{p}^{j,l}\varphi_{j,k} + \mathfrak{T}^{lj} g_{kj})\frac{\partial \xi^k}{\partial x^l} + \mathfrak{p}^{k,l}\varphi_j \frac{\partial^2 \xi^j}{\partial x^k \partial x^l}.$$

Le Jacobien de la transformation (4.1) est

$$(4.9)\qquad \frac{\partial(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3, \bar{x}^4)}{\partial(x^1, x^2, x^3, x^4)} = 1 + \varepsilon\frac{\partial \xi^k}{\partial x^k} + \ldots.$$

Le postulat d'invariance 2. du paragraphe 3 s'exprime avec les notations admises, par

$$(4.10)\qquad \int_{\bar{D}} \bar{\mathfrak{L}}\, d\bar{x} = \int_D \mathfrak{L}\, dx,$$

où $\bar{D}$ est le domaine des $\bar{x}^k$ correspondant au domaine D des x^k, par la transformation (4.1). En vertu de (4.5) et (4.9) on obtient

$$(4.11)\qquad \int_D \left[(\mathfrak{L} + \delta\mathfrak{L})\left(1 + \varepsilon\frac{\partial \xi^k}{\partial x^k}\right) - \mathfrak{L}\right] dx = 0.$$

Cette relation étant valable quel que soit le domaine D, il faut que la quantité sous le signe $\int$ s'annule.

En remplaçant $\delta\mathfrak{L}$ par sa valeur (4.8), on obtient une équation de la forme suivante

$$(4.12)\qquad \mathfrak{A}^l_k \frac{\partial \xi^k}{\partial x^l} + \mathfrak{p}^{k,l}\varphi_j \frac{\partial^2 \xi^j}{\partial x^k \partial x^l} = 0,$$

où

$$(4.13)\qquad \mathfrak{A}^l_k = \mathfrak{L}\,\delta^l_k - (\mathfrak{s}^l \varphi_k + \mathfrak{p}^{l,j}\varphi_{k,j} + \mathfrak{p}^{j,l}\varphi_{j,k} + \mathfrak{T}^{lj} g_{kj}).$$

Dans (4.12) les valeurs des deux premières dérivées de ξ^k sont arbitraires en tout point donné; $\frac{\partial^2 \xi^j}{\partial x^k \partial x^l}$ étant symétrique en k, l, on a

$$(4.14)\qquad \mathfrak{p}^{k,l} + \mathfrak{p}^{l,k} = 0, \qquad \mathfrak{A}^l_k = 0.$$

La première de ces équations montre que $\mathfrak{L}$ *ne dépend que des combinaisons* $f_{kl} = \varphi_{k,l} - \varphi_{l,k}$. La seconde, compte tenu de (4.13), démontre [1] la relation (3.12)

$$(4.15)\qquad \mathfrak{L}\,\delta^l_k = \mathfrak{s}^l \varphi_k + \mathfrak{p}^{lj} f_{kj} + \mathfrak{T}^{lj} g_{kj}.$$

Considérons maintenant le problème de l'expression de la fonction $\mathfrak{L}$

ou plutôt de l'invariant correspondant L, défini par $\mathfrak{L} = L\sqrt{-g}$, au moyen des *invariants élémentaires* de φ_k, f_{kl}, g_{kl}.

Les invariants des tenseurs f_{kl} et g_{kl} peuvent être déterminés en combinant linéairement les deux matrices $g = (g_{ik})$, $f = (f_{ik})$ en une famille linéaire $a(\lambda) = [a_{ik}(\lambda)]$ définie par

$$g + \lambda f = (1 + \lambda f g^{-1}) g = a(\lambda) g. \tag{4.16}$$

Puisque $g^{-1} = [g^{ik}]$, l'élément général de fg^{-1} est $f_{ij} g^{jk} = f_i^k$.

L'élément de la matrice unité δ_i^k est également celui d'un tenseur mixte, et l'on a

$$a_i^k(\lambda) = \delta_i^k + \lambda f_i^k.$$

Il s'ensuit que les invariants simultanés de f et g sont les coefficients du polynome caractéristique ou du déterminant de $a(\lambda)$

$$|a(\lambda)| = |1 + fg^{-1}| = 1 + F_1\lambda + F_2\lambda^2 + \ldots + F_n\lambda^n. \tag{4.17}$$

f étant antisymétrique et g symétrique, la matrice transposée de $g + \lambda f$ est $g - \lambda f = a(-\lambda) g$. Le déterminant de la matrice transposée étant identique à celui de la matrice initiale, on a $|a(\lambda)| = |a(-\lambda)|$; donc le développement (4.17) de $a(\lambda)$ ne contiendra que des puissances paires. Pour $n = 4$, on aura

$$|a(\lambda)| = 1 + F\lambda^2 - G^2\lambda^4, \tag{4.18}$$

avec les deux invariants

$$\left\{\begin{aligned} F &= \frac{1}{2} f_k^i f_i^k = \frac{1}{2} f_{ik} f^{ik} = \frac{1}{2} f_{im} f_{kn} g^{ik} g^{mn}, \\ G^2 &= -|fg^{-1}| = \frac{|f|}{-|g|} = \frac{1}{-|g|}(f_{23}f_{14} + f_{31}f_{24} + f_{12}f_{34})^2. \end{aligned}\right. \tag{4.19}$$

La racine carrée du second invariant n'est pas elle-même un invariant par rapport à *toutes* les transformations, mais uniquement par rapport à celles qui ont un jacobien positif. G peut s'écrire sous une forme simple à l'aide du *tenseur dual* introduit par Minkowski.

En modifiant légèrement la définition de ce dernier, introduisons la *densité tensorielle duale contrevariante* correspondant au tenseur *antisymétrique covariant* f_{ik}, les formules de définition seront

$$\left\{\begin{aligned} &f^{*23} = f_{14}, \quad f^{*31} = f_{24}, \quad f^{*12} = f_{34}, \\ &f^{*14} = f_{23}, \quad f^{*24} = f_{31}, \quad f^{*34} = f_{12}. \end{aligned}\right. \tag{4.20}$$

La loi habituelle de déplacement des indices dans un système de Lorentz (à savoir : changement de signe 1, 2, 3, pas de changement pour l'indice 4) donne ici

$$(4.21)\qquad \begin{cases} \mathfrak{f}^{\star}_{23} = -f^{14}, & \mathfrak{f}^{\star}_{31} = -f^{24}, & \mathfrak{f}^{\star}_{12} = -f^{34}, \\ \mathfrak{f}^{\star}_{14} = -f^{23}, & \mathfrak{f}^{\star}_{24} = -f^{31}, & \mathfrak{f}^{\star}_{34} = -f^{12}. \end{cases}$$

$\mathfrak{f}^{\star}_{kl}$ est une densité tensorielle; on peut le voir [2] au moyen de la *densité tensorielle complètement antisymétrique* δ^{iklm}, définie de la manière suivante. Développons le déterminant du tenseur a_{kl}

$$(4.22)\qquad |a| = \frac{1}{4!} a_{k\chi} a_{l\lambda} a_{m\mu} a_{n\nu} \delta^{klmn} \delta^{\chi\lambda\mu\nu},$$

Les coefficients sont

$$(4.23)\qquad \delta^{iklm} = \begin{cases} +1 & \text{si } iklm \text{ est une permutation paire de } 1, 2, 3, 4; \\ -1 & \text{si } iklm \text{ est une permutation impaire de } 1, 2, 3, 4; \\ 0 & \text{dans tous les autres cas.} \end{cases}$$

Cela étant, appliquons (4.22) au tenseur g_{kl}; en divisant par $-|g|$, on obtient au premier membre l'invariant -1; donc $\dfrac{\delta^{klmn}}{\sqrt{-|g|}}$ est un tenseur contrevariant du quatrième rang et $\mathfrak{d}^{klmn}$ la densité correspondante. Définissons comme d'habitude la densité tensorielle covariante

$$(4.24)\qquad \mathfrak{d}_{klmn} = \mathfrak{d}^{\chi\lambda\mu\nu} g_{k\chi} g_{l\lambda} g_{m\mu} g_{n\nu},$$

et multiplions par $\mathfrak{d}^{klmn}$; en vertu de (4.22) on obtient

$$\mathfrak{d}_{klmn} \mathfrak{d}^{klmn} = 4! \, |g|.$$

En remplaçant dans (4.22) a_{kl} par le tenseur unité on voit que

$$\mathfrak{d}^{klmn} \mathfrak{d}^{klmn} = 4!,$$

donc, de ce qui précède

$$(4.25)\qquad \mathfrak{d}_{klmn} = |g| \, \mathfrak{d}^{klmn}.$$

Nous pouvons écrire maintenant

$$(4.26)\qquad \mathfrak{f}^{\star kl} = \frac{1}{2} \mathfrak{d}^{klmn} f_{mn}, \qquad \mathfrak{f}^{\star}_{kl} = \frac{1}{2} \mathfrak{d}_{klmn} f^{mn},$$

ce qui montre bien que $\mathfrak{f}^{\star kl}$ et $\mathfrak{f}^{\star}_{kl}$ sont des densités tensorielles.

La racine carrée de la seconde équation (4.19) donne

$$(4.27)\qquad G = \frac{1}{\sqrt{-g}}\,\frac{1}{8}\mathfrak{d}^{klmn} f_{kl} f_{mn} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\,\frac{1}{4} f_{kl}\mathfrak{f}^{\star kl} = \frac{1}{4} f_{kl} f^{\star kl},$$

où f^{kl} est le tenseur correspondant à la densité $\mathfrak{f}^{kl}$.

Considérons maintenant les invariants simultanés de φ_k et f_{kl} par rapport au tenseur métrique g_{kl}. Nous procéderons de la manière suivante : nous formerons d'abord les vecteurs.

$$(4.28)\qquad \psi_k = f_{kl}\varphi^l, \qquad \chi_k = f^\star_{kl}\varphi^l,$$

et ensuite les invariants des trois vecteurs φ_k, ψ_k et χ_k, à savoir

les carrés des longueurs

$$(4.29)\qquad \begin{cases} A = \varphi_k\varphi^k = \varphi_k\varphi_l g^{kl}, \\ B = \psi_k\psi^k = f_{kl} f^{km}\varphi^l\varphi_m, \\ C = \chi_k\chi^k = f^\star_{kl} f^{\star km}\varphi^l\varphi_m, \end{cases}$$

les produits scalaires

$$(4.30)\qquad \begin{cases} \alpha = \psi_k\varphi^k = f_{kl}\varphi^k\varphi^l, \\ \beta = \chi_k\varphi^k = f^\star_{kl}\varphi^k\varphi^l, \\ \gamma = \psi_k\chi^k = f_{kl} f^{\star km}\varphi^l\varphi^m. \end{cases}$$

f_{kl} étant antisymétrique, on a

$$(4.31)\qquad \alpha = 0, \qquad \beta = 0;$$

de plus on a des identitées

$$(4.32)\qquad B - C = FA, \qquad \gamma = GA,$$

qui sont une conséquence des relations

$$(4.33)\qquad \begin{cases} f_{il} f^{kl} - f^\star_{il} f^{\star kl} = F\delta^k_i, \\ f_{il} f^{\star kl} = f^\star_{il} f^{kl} = G\delta^k_i. \end{cases}$$

On peut aisément vérifier l'exactitude de ces formules dans un système de Lorentz, par exemple :

$$\begin{aligned} f_{1l} f^{2l} - f^\star_{1l} f^{\star 2l} &= f_{13} f^{23} + f_{14} f^{24} - f^\star_{13} f^{\star 23} - f^\star_{14} f^{\star 24} \\ &= f_{13} f^{23} + f_{14} f^{24} - f^{24} f_{14} + f^{23} f_{31} = 0, \\ f_{1l} f^{\star 2l} &= f_{13} f^{\star 23} + f_{14} f^{\star 24} = f_{13} f_{14} + f_{14} f_{31} = 0. \end{aligned}$$

Le lagrangien le plus général sera donc

$$\mathfrak{L} = L(A, B, F, G)\sqrt{-g},$$

où L est une fonction arbitraire des quatre invariants élémentaires.

Arrivés à ce point nous pouvons vérifier l'exactitude de la relation (3.12) par un simple raisonnement algébrique [3].

Soit $\mathcal{J}$ l'un quelconque des quatre invariants élémentaires; les trois quantités

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial g_{km}} g_{ml}, \quad \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial f_{km}} f_{ml}, \quad \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \varphi_k} \varphi_l$$

sont des fonctions homogènes des g_{kl} du même degré n_g que $\mathcal{J}$ lui-même; il en est de même par rapport à f_{kl} et φ_k, les degrés d'homogénéité respectifs étant n_f et n_φ. De plus, on a

$$(4.35) \qquad \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial g_{km}} g_{lm} = n_g \mathrm{K}_l^k, \qquad \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial f_{km}} f_{lm} = n_f \mathrm{K}_l^k, \qquad \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \varphi_k} \varphi_l = n_\varphi \mathrm{K}_l^k,$$

avec *le même* K_l^k dans les trois cas.

En examinant la structure de ces invariants, on voit qu'ils sont tous formés par des produits des φ_k et f_{kl} multipliés par le produit correspondant avec indices supérieurs. Le nombre des indices supérieurs est donc égal à $\frac{1}{2} n_\varphi + n_f$, mais en même temps il est évidemment égal au nombre de facteurs g^{kl} nécessaires pour abaisser ces indices. g^{kl} ayant le degré -1 par rapport à g_{kl}, nous aurons

$$(4.36) \qquad -n_g = \frac{1}{2} n_\varphi + n_f.$$

Cela étant, dérivons $\mathfrak{L}$; on obtient

$$\mathfrak{T}^{kl} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_{kl}} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_{lk}} = \left(\frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial g^{kl}} + \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial g^{lk}}\right) \mathrm{L} + \sqrt{-g} \sum \left(\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial g_{kl}} + \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial g_{lk}}\right),$$

$$\mathfrak{p}^{kl} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial f_{kl}} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial f_{lk}} = \sqrt{-g} \sum \left(\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial f_{kl}} - \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial f_{lk}}\right),$$

$$\mathfrak{s}^k = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \varphi_k} = \sqrt{-g} \sum \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \varphi_k},$$

la somme étant étendue aux quatre invariants élémentaires. En vertu de (4.35), (4.36), on en déduit

$$\begin{aligned} \mathfrak{s}^k \varphi_l + \mathfrak{p}^{km} f_{lm} + \mathfrak{T}^{km} g_{lm} &= \sqrt{-g}\, g^{km} g_{ml} \mathrm{L} + \sqrt{-g}\, \Sigma \mathrm{K}_l^k (n_\varphi + 2 n_f + 2 n_g) \\ &= \mathrm{L}\, \delta_l^k \sqrt{-g} = \mathfrak{L}\, \delta_l^k. \end{aligned}$$

en accord avec (3.12).

5. **Notation vectorielle dans l'espace ordinaire.** — Naturellement, Mie lui-même n'a pas développé sa théorie en faisant usage du principe d'invariance généralisé, introduit par Einstein quelque temps plus tard. Il s'est servi de la notation vectorielle dans l'espace ordinaire et a postulé

l'invariance, uniquement par rapport aux transformations de Lorentz. Cette restriction n'est pas essentielle à mon avis; et je crois même qu'aujourd'hui il n'y aurait rien à changer aux lignes que j'ai publiées en 1913 dans un article [1] où j'introduisais le quadrivecteur et le vecteur à six composantes de Minkowski et où je donnais une démonstration simplifiée des lois de conservation de Mie (équivalente d'ailleurs à celle utilisée ici, page 174). Ces lignes étaient les suivantes :

« L'incompatibilité entre les équations différentielles, universellement admises, du champ électromagnétique et l'existence de points (électrons) où la charge s'accumule et persiste sans le secours de forces extérieures, est étroitement liée au caractère linéaire de ces équations; avant tout, il était donc nécessaire d'abandonner ce caractère de linéarité des équations fondamentales. Mie a réalisé ce programme de la manière la plus générale et la plus élégante qu'on puisse concevoir dans le cadre de la physique d'aujourd'hui, laquelle a son origine dans la mécanique analytique de Lagrange. »

Les raisons pour lesquelles la théorie de Mie n'a pu avoir de succès même dans le cadre de la physique classique, résident dans l'ampleur de son objet; nous corrigerons ce point dans le paragraphe suivant.

Évidemment, l'apparition de la théorie des quanta a modifié considérablement l'aspect du problème.

Dans ce qui suit nous prendrons la vitesse de la lumière égale à l'unité et nous adopterons les unités d'Heaviside pour les grandeurs électromagnétiques.

Avec la notation vectorielle ordinaire nous aurons, d'une part, les *vecteurs d'univers*

$$(5.1)\quad \begin{cases} (x^1, x^2, x^3, x^4) = (x, y, z, t) = \left(\vec{r}, t\right) & \text{(coordonnées, temps)}, \\ (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4) = \left(\vec{a}, \varphi\right) & \text{(potentiel vecteur et scalaire)}, \\ (\mathfrak{s}^1, \mathfrak{s}^2, \mathfrak{s}^3, \mathfrak{s}^4) = -\left(\rho\vec{\mathfrak{v}}, \rho\right) & \text{(densité de courant et de charge)}, \end{cases}$$

et, d'autre part, les *vecteurs à six composantes du champ*

$$(5.2)\quad \begin{cases} (f_{23}, f_{31}, f_{12}) = (\mathfrak{f}^{*14}, \mathfrak{f}^{*24}, \mathfrak{f}^{*34}) = \vec{\mathrm{B}}, \\ (f_{14}, f_{24}, f_{34}) = (\mathfrak{f}^{*23}, \mathfrak{f}^{*31}, \mathfrak{f}^{*12}) = \vec{\mathrm{E}}, \end{cases}$$

$$(5.3)\quad \begin{cases} (\mathfrak{p}^{23}, \mathfrak{p}^{31}, \mathfrak{p}^{12}) = (-p^*_{14}, -p^*_{24}, -p^*_{34}) = \vec{\mathfrak{H}}, \\ (\mathfrak{p}^{14}, \mathfrak{p}^{24}, \mathfrak{p}^{34}) = (-p^*_{23}, -p^*_{31}, -p^*_{12}) = -\vec{\mathfrak{D}}. \end{cases}$$

Avec cette notation les équations du champ (3.13) et (3.15) sont :

$$(5.4)\qquad \begin{cases} \operatorname{rot}\vec{\mathrm{E}} + \dot{\vec{\mathrm{B}}} = 0, & \operatorname{div}\vec{\mathrm{B}} = 0. \\ \operatorname{rot}\vec{\mathfrak{H}} - \dot{\vec{\mathfrak{D}}} = \rho\,\vec{\mathfrak{v}}, & \operatorname{div}\vec{\mathfrak{D}} = \rho. \end{cases}$$

Elles gardent la forme des équations de Maxwell dans n'importe quel système de coordonnées [2]; cela résulte du fait que nous avons eu soin de définir $(\vec{\mathrm{B}}, \vec{\mathrm{E}})$ comme tenseur et $(\vec{\mathfrak{H}}, \vec{\mathfrak{D}})$ comme *densité tensorielle*.

Dans un système de Lorentz où les g_{ik} sont donnés par (3.7), cette différence disparaît; on a

$$(5.5)\qquad \left.\begin{cases} (s_1, s_2, s_3, s_4) = (\rho\vec{\mathfrak{v}}, -\rho), \\ (p_{23}, p_{31}, p_{12}) = \vec{\mathfrak{H}} = \vec{\mathrm{H}}, \\ (\mathfrak{p}_{14}, \mathfrak{p}_{24}, \mathfrak{p}_{34}) = \vec{\mathfrak{D}} = \vec{\mathrm{D}} \end{cases}\right\} \text{(système de Lorentz)},$$

lesquels forment, avec (5.2), la définition habituelle, laquelle ne coïncide donc pas avec la nôtre que dans le cas de la relativité restreinte.

La manière la plus aisée d'écrire la densité tensorielle d'énergie-quantité de mouvement (3.12), consiste à employer la notation matricielle; on a

$$(5.6)\qquad (\mathfrak{T}_k^i) = \begin{vmatrix} \mathfrak{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathfrak{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathfrak{L} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & \mathfrak{H}_z & -\mathfrak{H}_y & -\mathfrak{D}_x \\ -\mathfrak{H}_z & 0 & \mathfrak{H}_x & -\mathfrak{D}_y \\ \mathfrak{H}_y & -\mathfrak{H}_x & 0 & -\mathfrak{D}_z \\ \mathfrak{D}_x & \mathfrak{D}_y & \mathfrak{D}_z & 0 \end{vmatrix}$$
$$\times \begin{vmatrix} 0 & \mathrm{B}_z & -\mathrm{B}_y & \mathrm{E}_x \\ -\mathrm{B}_z & 0 & \mathrm{B}_x & \mathrm{E}_y \\ \mathrm{B}_y & -\mathrm{B}_x & 0 & \mathrm{E}_z \\ -\mathrm{E}_x & -\mathrm{E}_y & -\mathrm{E}_z & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \\ \varphi \end{vmatrix} (\rho\mathfrak{v}_x, \rho\mathfrak{v}_y, \rho\mathfrak{v}_z, \rho),$$

ou explicitement

$$(5.7)\qquad \begin{cases} \mathfrak{T}_1^1 = \mathfrak{L} - \mathfrak{H}_y\mathrm{B}_y - \mathfrak{H}_z\mathrm{B}_z + \mathfrak{D}_x\mathrm{E}_x + \rho\mathfrak{v}_x a_x, \\ \mathfrak{T}_4^4 = \mathfrak{L} + \vec{\mathfrak{D}}\vec{\mathrm{E}} + \rho\varphi, \\ \mathfrak{T}_2^1 = \mathfrak{H}_x\mathrm{B}_y + \mathfrak{D}_y\mathrm{E}_x + \rho\mathfrak{v}_y a_x, \\ \mathfrak{T}_1^2 = \mathfrak{H}_y\mathrm{B}_x + \mathfrak{D}_x\mathrm{E}_y + \rho\mathfrak{v}_x a_y, \\ \mathfrak{T}_4^1 = \mathfrak{D}_z\mathrm{B}_y - \mathfrak{D}_y\mathrm{B}_z + \rho\mathfrak{v}_x\varphi, \\ \mathfrak{T}_1^4 = \mathfrak{H}_z\mathrm{E}_y - \mathfrak{H}_y\mathrm{E}_z + \rho a_x. \end{cases}$$

Ces relations sont valables dans n'importe quel système de coordonnées. Dans ce cas, la symétrie du tenseur

$$T^{kl} = g^{km} T^l_m = \frac{1}{\sqrt{-g}} g^{km} \mathfrak{T}^l_m \tag{5.8}$$

n'est pas une condition simple; si toutefois on considère un système de Lorentz avec des g_{kl} donnés par (3.7), on aura

$$T^{kl} = -T^k_l \quad \text{pour} \quad l = 1, 2, 3 \text{ et } T^{k4} = T^k_4. \tag{5.9}$$

Introduisons maintenant les notations vectorielles suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} (M) = \begin{vmatrix} X_x & X_y & X_z \\ Y_x & Y_y & Y_z \\ Z_x & Z_y & Z_z \end{vmatrix} = \text{tensions de Maxwell}, \\ U = \text{densité d'énergie}, \\ \vec{S} = \text{vecteur de Poynting}. \end{array}\right. \tag{5.10}$$

On peut écrire les formules suivantes qui ont une signification immédiate

$$(T^{kl}) = \begin{vmatrix} (M) & -\vec{S} \\ -\vec{S} & U \end{vmatrix}, \qquad (T^k_l) = \begin{vmatrix} -(M) & -\vec{S} \\ \vec{S} & U \end{vmatrix}, \tag{5.11}$$

et l'on aura

$$\left\{\begin{array}{l} X_x = H_y B_y + H_z B_z - D_x E_x - \rho v_x a_x - L, \\ U = \vec{D}.\vec{E} + \rho\varphi + L, \\ X_y = Y_x = -H_y B_x - D_x E_y - \rho v_x a_y = -H_x B_y - D_y E_x - \rho v_y a_x, \\ \vec{S} = (\vec{E} \times \vec{H}) + \rho \vec{a} = (\vec{D} \times \vec{B}) - \rho\varphi \vec{v}. \end{array}\right. \tag{5.12}$$

Dans ce cas la condition de symétrie de T_{kl} prend la forme simple

$$\left\{\begin{array}{l} (\vec{H} \times \vec{B}) + (\vec{E} \times \vec{D}) = \rho(\vec{v} \times \vec{a}), \\ (\vec{E} \times \vec{H}) - (\vec{D} \times \vec{B}) = \rho(\vec{a} + \varphi \vec{v}). \end{array}\right. \tag{5.13}$$

Les lois de conservation (3.21) prennent la forme

$$\left\{\begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{X} + \dot{\vec{S}}_x = 0, \\ \operatorname{div} \vec{S} + \dot{U} = 0, \end{array}\right. \tag{5.14}$$

où les lignes de la matrice du tenseur de Maxwell sont considérées comme des vecteurs $\vec{X} = (X_x, X_y, X_z), \ldots$.

Dans un système de Lorentz, les quatre invariants élémentaires sont

$$(5.15)\qquad \begin{cases} A = \varphi^2 - \vec{a}^2, \\ B = \left[\left(\vec{a} \times \vec{B}\right) + \varphi \vec{E}\right]^2, \end{cases}$$

$$(5.16)\qquad \begin{cases} F = \vec{B}^2 - \vec{E}^2, \\ G = \vec{B}.\vec{E}. \end{cases}$$

Tout le système de formules est vide de sens tant qu'on n'a pas choisi la forme de la fonction L (A, B, F, G); une fois cette fonction fixée, on a

$$(5.17)\qquad \begin{cases} \rho = -\dfrac{\partial L}{\partial \varphi}, & \rho \vec{v} = -\dfrac{\partial L}{\partial \vec{a}}, \\ \vec{\mathfrak{H}} = \dfrac{\partial L}{\partial \vec{B}}, & \vec{\mathfrak{D}} = -\dfrac{\partial L}{\partial \vec{E}}. \end{cases}$$

Mie a essayé de trouver une fonction L pour laquelle il existe une solution des équations du champ, correspondant à une particule stable (électron) et ayant une distribution de charge à symétrie sphérique. Sa tentative n'a pas été couronnée de succès; mais, même si elle avait réussi, on peut dire qu'elle n'aurait pas été convaincante, sauf toutefois dans le cas où cette solution aurait été imposée par un principe universel, réduisant l'extraordinaire généralité de la théorie. Or, on ne connaît pas jusqu'à présent un pareil principe.

Une autre caractéristique de la théorie de Mie qui soulève de très fortes objections est l'apparition explicite des potentiels $\left(\vec{a}, \varphi\right)$ dans le lagrangien et par conséquent dans les équations du champ. Il s'ensuit que les valeurs absolues du potentiel devraient avoir une signification physique précise, ce qui est en contradiction avec tout ce que nous connaissons expérimentalement sur les champs électromagnétiques. Même si nous mettions en doute la validité d'une extrapolation de ces connaissances aux domaines atomiques, nous ne pourrions pas échapper à la difficulté suivante : supposons qu'on ait découvert un lagrangien L tel qu'on puisse trouver une solution des équations du champ correspondant à une particule. Si L dépend des potentiels, cette solution n'existera plus lorsqu'on déplacera la particule dans l'espace pour l'amener en un point où les potentiels ont des valeurs différentes des

précédentes (différentes par une constante qui constitue la différence de potentiel entre deux positions à une distance infinie du centre de la particule). Dans ces conditions, l'explication théorique de l'existence des particules, qui constitue le but principal de la théorie de Mie, devient illusoire.

En théorie de Maxwell, les lois physiques manifestent à un degré plus haut encore leur insensibilité à certaines variations de potentiel; elles présentent ce qu'on appelle l'*invariance de jauge* : les lois physiques ne changent pas si l'on remplace φ_k par

$$\bar{\varphi}_k = \varphi_k + \frac{\partial \chi}{\partial x^k}, \tag{5.18}$$

où χ est une fonction arbitraire. Cela découle simplement du fait que la transformation (5.18) n'altère pas l'expression (3.9) des composantes de champ. Quand on remonte des équations de Maxwell au principe de variation correspondant, on constate que les φ_k apparaissent bien d'une façon explicite dans L, mais seulement sous forme d'une combinaison linéaire; L a la forme suivante :

$$L = L_0 + \varphi_i s^{0i} = L_0 - \rho^0 \left(\vec{v}^0 \vec{a} - \varphi \right), \tag{5.19}$$

où L_0 est une fonction de F et G ayant, dans le vide, la forme suivante :

$$L_0 = \frac{1}{2} F = \frac{1}{2} (B^2 - E^2). \tag{5.20}$$

Les $s^{0i} = -\left(\rho^0 \vec{v}^0, \rho^0\right)$ sont des fonctions *données* de x, y, z, t représentant la densité de charge et du courant de convection et satisfaisant à l'équation de continuité

$$\frac{\partial s^{0i}}{\partial x^i} = 0. \tag{5.21}$$

La transformation (5.18) ajoute simplement à L le terme

$$s^{0i} \frac{\partial \chi}{\partial x^i} = \frac{\partial s^{0i} \chi}{\partial x^i} - \chi \frac{\partial s^{0i}}{\partial x^i} = \frac{\partial s^{0i} \chi}{\partial x^i} \tag{5.22}$$

qui constitue une divergence et ne fournit pas de contribution aux équations différentielles.

En réalité, ce cas n'entre pas dans la théorie générale exposée dans ce

qui précède, étant donné que L contient explicitement x, y, z, t, lesquels apparaissent dans les fonctions données s^{0i}. Il s'ensuit qu'aucune loi de conservation du type (5.14) ne sera plus valable : aux seconds membres apparaîtront, au lieu de O, la force de Lorentz et la densité de puissance

$$\rho^0\left[\vec{H} + \left(\vec{\rho}^0 \times \vec{E}\right)\right], \quad \rho^0 \vec{\rho} \vec{E}. \tag{5.23}$$

Strictement parlant, la théorie de Maxwell n'est donc pas un cas particulier de celle de Mie.

Lorsqu'on applique cette théorie de Maxwell au problème des particules élémentaires, on est conduit à la conception, décrite dans l'introduction, d'une masse d'origine électromagnétique. Le travail de pionnier de J. J. Thomson a été continué par un grand nombre de chercheurs et a atteint son point culminant dans la théorie des électrons de H. A. Lorentz [3]. Dans cette théorie, l'électron est considéré comme une distribution de charge à symétrie sphérique maintenue en place par des forces de cohésion d'origine inconnue mais certainement non électromagnétique. Les dimensions de ces particules doivent être finies, sans quoi l'énergie propre devient infinie. Cette énergie propre est pour une grande partie de nature électromagnétique, mais dépend aussi dans une certaine mesure des forces de cohésion. Comme on ne sait rien sur ces forces, la valeur absolue de l'énergie est elle-même inconnue.

Il a néanmoins été possible de rendre compte du fait expérimental découvert par Kaufmann [4] de la variation de la masse avec la vitesse. Ce problème a été traité par plusieurs auteurs, et en particulier, de la façon la plus complète, par M. Abraham [5], dans l'hypothèse que la charge électrique était fixée à un support matériel parfaitement rigide. L'hypothèse d'une rigidité absolue, toute naturelle dans la période classique de la physique, est cependant devenue inacceptable dès l'introduction du postulat de la relativité par Einstein. *Rigidité et relativité sont des notions contradictoires.*

Peu après, Lorentz appliqua à l'électron la contraction de Fitz Gérald et découvrit ainsi sa formule bien connue, donnant la masse en fonction de la vitesse, formule qui se trouvait être en meilleur accord avec les résultats expérimentaux que celle d'Abraham. L'hypothèse de Lorentz peut s'exprimer en disant que l'électron est rigide dans le système de coordonnées dans lequel il est instantanément au repos. J'ai

montré, il y a 30 ans dans un de mes premiers articles, que cette rigidité relative existe pour toute une classe de mouvements qui correspondent aux mouvements à accélération constante de la mécanique classique; et j'en ai déduit [6] une généralisation de la formule de Lorentz pour ce mouvement non uniforme, quelques années avant qu'Einstein n'entreprit l'étude systématique de pareils mouvements dans sa théorie de la relativité généralisée. Langevin [7] a traité récemment le même problème du point de vue de la relativité générale et a confirmé la formule que j'avais donnée.

Ces théories concernant l'électron rigide ou quasi rigide ne sont pas satisfaisantes parce qu'elles se heurtent toutes à la difficulté suivante. Soient E l'énergie et P la quantité de mouvements électromagnétiques totales de l'électron. La masse électromagnétique de celui-ci peut alors être définie soit par $\frac{E}{c^2}$, soit par $\frac{P}{c}$; or, il se trouve que ces valeurs ne coïncident pas. La différence semble résulter du fait que les forces qui font que l'électron se comporte à la façon d'un corps rigide, fournissent une certaine contribution à la quantité de mouvement de translation, tout en n'effectuant aucun travail interne.

Le seul moyen d'éviter les difficultés provoquées par l'antagonisme entre relativité et rigidité, semble être l'adoption de la *théorie unitaire des champs*, de Mie, qui constitue une tentative d'assimiler les forces de cohésion aux forces électromagnétiques d'un champ à connexion non-linéaire. Nous venons de voir, cependant, que même cette théorie n'a pas réussi à résoudre le problème, Mie ayant utilisé les valeurs absolues des potentiels, pour décrire les écarts à partir de la linéarité qui fournissent la densité de charge.

6. Électrodynamique unitaire avec charges ponctuelles. — Néanmoins le problème possède une solution [1]. Elle s'obtient en admettant que les potentiels n'apparaissent pas dans les lois du champ, c'est-à-dire que $\mathfrak{L}$ ne dépend que des f_{kl} et g_{kl}, et que

$$\mathfrak{s}^k = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \varphi_k} = 0. \tag{6.1}$$

Dans ces conditions, cependant, il est indispensable d'admettre qu'il existe des *singularités ponctuelles qui représentent les particules.*

On peut choisir alors la fonction

$$\mathfrak{L}(g_{kl}, f_{kl}) = \mathrm{L}(\mathrm{F}, \mathrm{G})\sqrt{-g} \tag{6.2}$$

de façon que l'énergie électromagnétique propre d'une charge ponctuelle soit finie; toutes les contradictions qui affectaient les anciennes théories de l'électron rigide disparaissent.

J'ai appelé la théorie qui en résulte la *théorie unitaire du champ électromagnétique*, en dépit du fait que les singularités correspondent à des variables dynamiques distinctes des composantes du champ; en réalité, l'idéal de Mie, d'une théorie unitaire complète, n'a pas été atteint pour la bonne raison qu'il est impossible à atteindre. C'est une question d'appréciation, de savoir si le titre précédent convient à la théorie modifiée que je présente aujourd'hui; néanmoins, pour ma part, je préférerais le garder, étant donné qu'en tout cas cette théorie offre la possibilité d'une explication purement électromagnétique de la masse. Nous discuterons en détail plus loin cette question de l'origine de la masse.

Avant de donner un exemple d'une fonction L remplissant les conditions précédentes, il nous faut considérer le problème d'un autre point de vue qui conduit à la forme générale (6.2) de L, à savoir le point de vue de la self-dualité, telle qu'elle a été définie au paragraphe 1 pour un principe de variation quelconque.

L'inspection des équations (5.4) du champ électromagnétique et la symétrie qu'on constate entre les vecteurs électrique et magnétique, suggère, comme condition nécessaire, l'existence d'une symétrie absolument complète dans toute théorie unitaire du champ et de la matière. Cette condition générale est équivalente à celle de self-dualité; exprimons-la analytiquement.

La première condition à remplir est précisément exprimée par (6.1). En ce qui concerne la seconde, nous avons vu que dans le cas de n dimensions le nombre des conditions d'intégrabilité (3.15) est $\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$, lequel n'est égal au nombre des équations d'Euler que si $n = 4$. Le fait [1] que la self-dualité du champ électromagnétique n'est possible que dans notre univers à 4 dimensions semble une coïncidence extrêmement remarquable !

---

[1] Observé par mon collaborateur P. Weiss.

Cependant, il ne faut pas perdre de vue que cette self-dualité n'a qu'un caractère purement formel; elle n'est pas fondamentale puisqu'on n'a pas tenu compte des singularités. L'expérience nous a appris l'existence de charges électriques ponctuelles, mais on a pas encore découvert des pôles magnétiques isolés. Nous verrons plus tard de quelle manière il faut traiter cette dissymétrie.

Dans tous les raisonnements concernant les équations du champ électromagnétique, il est très commode d'utiliser la notion de self-dualité; nous consacrerons donc les lignes suivantes à montrer comment on doit construire le système de formules dual à celui qui a été décrit jusqu'à présent.

Introduisons la fonction

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{L} - \frac{1}{2}\mathfrak{p}^{ik} f_{ik} = \mathfrak{L} + \frac{1}{2}\mathfrak{f}^{*ik} p^{*}_{ik} = \mathfrak{L} + \vec{\mathrm{E}}\vec{\mathfrak{D}} - \vec{\mathrm{B}}\vec{\mathfrak{H}}, \tag{6.3}$$

qu'on peut appeler *l'hamiltonien du système*, par analogie avec la fonction qui intervient dans la mécanique du point. En vertu de (3.10 *b*) et de $\mathfrak{s}^k = 0$, nous aurons

$$d\mathfrak{H} = \frac{1}{2}\mathfrak{T}^{ik}\, dg_{ik} - \frac{1}{2} f_{ik}\, d\mathfrak{p}^{ik} = \frac{1}{2}\mathfrak{T}^{ik}\, dg_{ik} + \frac{1}{2}\mathfrak{f}^{*ik}\, dp^{*}_{ik}. \tag{6.4}$$

Les variables indépendantes *naturelles* de $\mathfrak{H}$ sont donc g_{ik}, p^{*}_{ik}; en accord avec la notion générale de dualité, nous admettrons que les p^{*}_{ik} peuvent s'exprimer par les *antipotentiels* ψ^{*}_{k}

$$p^{*}_{ik} = \frac{\partial \psi^{*}_{k}}{\partial x^{i}} - \frac{\partial \psi^{*}_{i}}{\partial x^{k}}. \tag{6.5}$$

$\mathfrak{H}$ aura la forme

$$\mathfrak{H} = \mathrm{H}(\mathrm{P}, \mathrm{Q})\sqrt{-g}, \tag{6.6}$$

où P, Q sont les invariants élémentaires de g_{ik}, p^{*}_{ik} correspondant aux F, G définis par (4.19) et (4.27), à savoir

$$\mathrm{P} = \frac{1}{2} p^{*}_{ik} p^{*ik} = \mathrm{D}^2 - \mathrm{H}^2, \qquad \mathrm{Q} = \frac{1}{4} p^{*}_{ik} p^{ik} = \vec{\mathrm{D}}\vec{\mathrm{H}}. \tag{6.7}$$

Un principe de variation utilisant l'intégrale

$$\mathrm{I}^{*} = \int_{\mathrm{G}} \mathfrak{H}(g_{ik}, p^{*}_{ik})\, dx \tag{6.8}$$

conduit aux équations

$$\frac{\partial \mathfrak{f}^{*kl}}{\partial x^k} = 0, \tag{6.9}$$

$$\frac{\partial p^*_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial p^*_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial p^*_{li}}{\partial x^k} = 0. \tag{6.10}$$

Ces équations sont identiques aux équations initiales (3.13) et (3.15), lesquelles s'écrivent en notation tensorielle et vectorielle, de la façon suivante pour $\mathfrak{s}^k = 0$

$$\frac{\partial f_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial f_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial f_{li}}{\partial x^k} = 0 \quad \text{ou} \quad \operatorname{rot}\vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0, \quad \operatorname{div}\vec{B} = 0, \tag{6.9 a}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{p}^{lk}}{\partial x^l} = 0 \quad \text{ou} \quad \operatorname{rot}\vec{\mathfrak{H}} - \dot{\vec{\mathfrak{D}}} = 0, \quad \operatorname{div}\vec{\mathfrak{D}} = 0. \tag{6.10 a}$$

Si nous maintenons les g_{ik} constants, (3.10) et (6.4) deviennent

$$\left\{\begin{aligned} d\mathfrak{L} &= -\vec{\mathfrak{D}}\, d\vec{E} + \vec{\mathfrak{H}}\, d\vec{B}, \\ d\mathfrak{H} &= \vec{E}\, d\vec{\mathfrak{D}} - \vec{B}\, d\vec{\mathfrak{H}}. \end{aligned}\right. \tag{6.4 a}$$

Les deux représentations duales diffèrent entre elles non par leurs équations différentielles, mais bien par le choix des variables primaires de champ

$$\left\{\begin{aligned} &\mathfrak{L}(\vec{E}, \vec{B}) \ldots\ldots \quad \vec{\mathfrak{D}} = -\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \vec{E}}, \qquad \vec{\mathfrak{H}} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \vec{B}}, \\ &\mathfrak{H}(\vec{\mathfrak{D}}, \vec{\mathfrak{H}}) \ldots\ldots \quad \vec{E} = \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \vec{\mathfrak{D}}}, \qquad \vec{B} = -\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \vec{\mathfrak{H}}}. \end{aligned}\right. \tag{6.11}$$

Le tenseur d'énergie s'exprime de la même façon avec $\mathfrak{L}$ qu'avec $\mathfrak{H}$

$$\mathfrak{T}^{ik} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_{ik}} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_{ki}} = \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial g_{ik}} + \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial g_{ki}}. \tag{6.12}$$

En vertu de (6.4) les éléments diagonaux du tenseur mixte $\mathfrak{T}^k_i$ donné par (5.7), s'expriment de deux façons parfaitement équivalentes

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{T}^4_4 &= \mathfrak{L} - \mathfrak{H}_y B_y - \mathfrak{H}_z B_z + \mathfrak{D}_x E_x = \mathfrak{H} - \mathfrak{D}_y E_y - \mathfrak{D}_z E_z + \mathfrak{H}_x B_x, \\ \mathfrak{T}^4_4 &= \mathfrak{L} + \vec{\mathfrak{D}}\vec{E} = \mathfrak{H} + \vec{\mathfrak{H}}\vec{B}. \end{aligned}\right. \tag{6.12 a}$$

$U = \mathfrak{T}^4_4$ étant la densité d'énergie [*voir* (5.11)], la fonction $\mathfrak{H}$ a une signification simple dans le cas d'un champ purement électrique. Sa valeur est précisément égale à celle de la densité d'énergie. Cette circonstance rend souvent l'emploi de $\mathfrak{H}$ plus commode que celui de $\mathfrak{L}$.

Dans un système de coordonnées de Lorentz, le tenseur d'énergie

s'exprime par (5.12) si l'on supprime les termes en ρ. Les relations de symétrie, qui sont l'expression de l'invariance relativiste, peuvent s'écrire

$$(6.13)\qquad \left\{\begin{aligned} (\vec{H}\times\vec{B}) &= -(\vec{E}\times\vec{D}),\\ \vec{S} = (\vec{E}\times\vec{H}) &= (\vec{D}\times\vec{B}).\end{aligned}\right.$$

Cette double expression du vecteur de Poynting est remarquable et sera utilisée plus tard pour l'établissement des équations de mouvement d'une charge ponctuelle.

Lorsqu'on ne tient pas à utiliser à tout prix le calcul tensoriel, qui a d'ailleurs l'avantage de rendre immédiatement évidente la covariance des équations, on peut introduire également d'autres *fonctions fondamentales* en dehors $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{H}$. L'une de ces représentations, en particulier, est très utile pour l'application des principes de la théorie des quanta à l'électrodynamique. En effet, le seul moyen d'attaquer un pareil problème est de prendre comme point de départ l'hamiltonien de la dynamique, c'est-à-dire l'énergie; or, la fonction $\mathfrak{H}$ que nous avons appelée *hamiltonien* ici, n'est pas identique en général avec la densité d'énergie (il n'en est ainsi qu'en l'absence de champ magnétique, comme nous l'avons vu).

On constate que, d'après (6.12 *a*), la densité d'énergie est donnée dans un système de Lorentz par

$$(6.14)\qquad U = H + \vec{H}\vec{B} = L + \vec{D}\vec{E};$$

on en déduit, en tenant compte de (6.4), que

$$(6.14\,a)\qquad \left\{\begin{aligned} dU &= \vec{E}\,d\vec{D} + \vec{H}\,d\vec{B},\\ \vec{E} &= \frac{\partial U}{\partial \vec{D}}, \qquad \vec{H} = \frac{\partial U}{\partial \vec{B}},\end{aligned}\right.$$

de sorte que la fonction $U(\vec{D}, \vec{B})$ peut être également employée comme fondement de la théorie.

Enfin, il existe une dernière possibilité, celle d'écrire en notation vectorielle ordinaire

$$(6.15)\qquad V = H - \vec{E}\vec{D} = L - \vec{B}\vec{H},$$

$$(6.15\,a)\qquad \left\{\begin{aligned} dV &= -\vec{D}\,d\vec{E} - B\,d\vec{H},\\ \vec{D} &= -\frac{\partial V}{\partial \vec{E}}, \qquad B = -\frac{\partial V}{\partial \vec{H}};\end{aligned}\right.$$

mais la fonction $V(\vec{E}, \vec{H})$ n'a pas de signification physique immédiate.

Le point intéressant dans toutes ces représentations de la théorie est le fait que les équations du champ sont certainement covariantes, les fonctions fondamentales n'étant cependant pas des invariants. Mon collaborateur M. B. S. Madhava Rao a étudié cette question et a abouti au résultat suivant [2]. Einstein et Mayer ont montré que le groupe de transformation de Lorentz peut être séparé en deux groupes plus restreints; ils ont construit deux types de grandeurs, les semi-vecteurs, qui sont covariantes par rapport à l'un de ces groupes restreints, mais non par rapport au groupe de Lorentz tout entier. Madhava Rao a montré que les relations (6.14a) et (6.15a) sont covariantes par rapport à ces groupes partiels et a pu ainsi donner les raisons pour lesquelles les équations du champ sont covariantes par rapport au groupe complet.

Lorsqu'on veut mettre en évidence les écarts entre la théorie générale des champs et celle de Maxwell, il est commode d'introduire le tenseur

$$(6.16)\qquad m^{kl} = f^{kl} - p^{kl} \qquad \left[(m^{23}, m^{31}, m^{12}) = \vec{M},\ (m^{14}, m^{24}, m^{34}) = \vec{P}\right],$$

et le vecteur

$$(6.17)\qquad \sigma^k = \frac{\partial m^{lk}}{\partial x^l} \qquad \left[(\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4) = (-\vec{j}, -\sigma)\right].$$

Dans un système de Lorentz on a, avec la notation vectorielle ordinaire,

$$(6.17\,a)\qquad \vec{M} = \vec{B} - \vec{H}, \qquad \vec{P} = \vec{D} - \vec{E},$$

ce qui montre que $\vec{M}$ et $\vec{P}$ sont les *densités de moment électrique et magnétique;* ensuite on a

$$(6.18\,a)\qquad \vec{j} = -\operatorname{rot}\vec{M} + \dot{\vec{P}}, \qquad \sigma = -\operatorname{div}\vec{P}.$$

Les équations du champ peuvent être écrites sous la forme de Maxwell

$$(6.19)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f^{kl}}{\partial x^k} = \sigma^l \quad \text{ou} \quad \operatorname{rot}\vec{B} - \dot{\vec{E}} = \vec{j}, \quad \operatorname{div}\vec{E} = \sigma, \\[2ex] \dfrac{\partial f^{*kl}}{\partial x^k} = 0 \quad \text{ou} \quad \operatorname{rot}\vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0, \quad \operatorname{div}\vec{B} = 0. \end{cases}$$

Ici les seconds membres ne sont pas des fonctions *données* mais dépendent eux-mêmes des composantes du champ, suivant les relations (6.18a). On peut appeler $\vec{j}$ et σ la densité du courant et de la

charge *libre*. $\vec{M}$ et $\vec{P}$ sont les *polarisations du vide;* cette notion joue un rôle important dans la tentative de Heisenberg d'évaluer les écarts d'avec la théorie de Maxwell à partir de la mécanique ondulatoire relativiste de l'électron (*voir* § 13, 14).

Il est évidemment possible d'introduire un tenseur d'énergie, fonction des seuls f^{kl}

$$S^l_k = \frac{1}{2} F \delta^l_k - f^{lm} f_{km}, \tag{6.20}$$

où $F = \frac{1}{2} f_{kl} f^{kl}$ est le lagrangien de la théorie de Maxwell; on obtient les lois de conservation, par le procédé habituel sous la forme :

$$\frac{\partial S^l_k}{\partial x^l} = f_{kl} \sigma^l; \tag{6.21}$$

au second membre apparaissent la force de Lorentz et la puissance des charges libres,

$$\vec{E} + \left(\vec{j} \times \vec{B}\right) \quad \text{et} \quad \vec{j}\vec{E}. \tag{6.22}$$

Cela montre qu'on doit s'attendre à trouver des écarts par rapport aux valeurs classiques des forces électromagnétiques, chaque fois qu'on aura affaire à des champs essentiellement variables sur une distance comparable au diamètre de distribution de charges libres d'une particule; ce résultat sera confirmé plus tard.

Dans cette théorie, les charges *vraies*, c'est-à-dire, celles pour lesquelles l'intégrale $\int D_n \, d\sigma$, prise sur une surface fermée est finie, sont toujours concentrées en un point.

Un certain nombre de résultats généraux concernant le champ et l'énergie d'une charge ponctuelle isolée au repos, peuvent être obtenus sans particulariser le lagrangien L.

Dans le cas de l'électrostatique, les équations du champ se réduisent à

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0, \qquad \operatorname{div} \vec{D} = 0. \tag{6.23}$$

La première est identiquement satisfaite pour un champ à symétrie sphérique de la forme $E = E_r \frac{\vec{r}}{r}$. La seconde devient

$$\frac{d}{dr}(r^2 D_r) = 0, \tag{6.23 a}$$

dont la solution générale est

$$D_r = \frac{e}{4\pi}\frac{1}{r^2}, \tag{6.24}$$

où la constante est choisie de façon que l'on ait, pour toute surface fermée entourant l'origine,

$$\int D_r\, d\sigma = e. \tag{6.25}$$

Le champ $\vec{D}$ est exactement le même qu'en théorie de Maxwell.

Il existe, de plus, une relation générale entre la valeur de l'énergie totale E, et celle du potentiel électrostatique à l'endroit où se trouve la charge ponctuelle, $\varphi(0)$. Pour la déduire, nous utiliserons la propriété déjà mentionnée, que dans le cas électrostatique la densité d'énergie coïncide avec l'hamiltonien H de sorte que

$$E_0 = 4\pi \int_0^\infty H r^2\, dr. \tag{6.26}$$

Considérons H comme une fonction de $P = D^2 \left(Q = \vec{H}\vec{D} \text{ s'annule}\right)$; nous aurons

$$\frac{d}{dr}(r^3 H) = 3r^2 H + r^3 \frac{\partial H}{\partial D_r}\frac{dD_r}{dr}; \tag{6.27}$$

or, en vertu de (6.11) et de (6.24),

$$\frac{\partial H}{\partial D_r} = E_r, \qquad \frac{dD_r}{dr} = -\frac{e}{2\pi}\frac{1}{r^3},$$

donc

$$H r^2 = \frac{1}{3}\frac{d}{dr}(r^3 H) + \frac{e}{6\pi} E_r. \tag{6.28}$$

Puisque nous admettons que l'intégrale (6.26) converge, H ne peut pas tendre vers l'infini, à l'origine $r = 0$, plus rapidement que $r^{-(2+\varepsilon)}$, $0 < \varepsilon < 1$; pour $r = \infty$, nous devons faire l'hypothèse que H se comporte comme la densité d'énergie en théorie de Maxwell; c'est-à-dire qu'elle varie comme r^{-4}; il s'ensuit que $r^3 H$ s'annule pour $r = 0$ et pour $r = \infty$. Le potentiel électrostatique est donné par

$$\varphi(r) = \int_r^\infty E_r\, dr, \tag{6.29}$$

et l'on obtient, de (6.26) et (6.28),

$$E_0 = \frac{2}{3} e\, \varphi(0). \tag{6.30}$$

E_0 est l'intégrale d'espace de la composante 44 du tenseur d'énergie T_{kl}. Il est facile de démontrer que les intégrales de toutes les autres composantes de T_{kl} s'annulent pour un champ électrostatique à symétrie sphérique. En effet, cela est évident pour les intégrales des composantes T_{k4} qui forment le vecteur $\vec{S}$, lequel s'annule pour $\vec{B} = 0$; il reste donc à le démontrer pour le tenseur de Maxwell $M(X_x, \ldots, X_y, \ldots)$ donné par (5.12) :

$$X_x = D_y E_y + D_z E_z - H, \quad \ldots, \quad X_y = - D_x E_y, \quad \ldots. \tag{6.31}$$

H dépend seulement de $P = D^2$; et $\vec{E} = \frac{dH}{dP} 2\vec{D}$. L'hypothèse d'une symétrie sphérique signifie que $\vec{D} = f(r)\vec{r}$; donc

$$\int X_y\, dv = -2 \int \frac{dH}{dP} f^2 xy\, dv = 0, \tag{6.32}$$

qui est nulle puisque $\frac{dH}{dP} f^2$ ne dépend que de r. Ensuite

$$\int X_x\, dv = \int \left(\frac{2}{3} \vec{D}\vec{E} - H\right) dv = 4\pi \int \left(\frac{4}{3} \frac{dH}{dP} D^2 - H\right) r^2\, dr.$$

Puisque $\frac{dH}{dD_r} = 2 \frac{dH}{dP} D_r$ et puisque (6.23a) donne $\frac{dD_r}{dr} + \frac{2}{r} D_r = 0$, on peut écrire (6.27) sous la forme

$$3r^2 H - 4r^2 \frac{dH}{dP} D_r^2 = \frac{d}{dr}(r^3 H);$$

d'où

$$\int X_x\, dv = -\frac{4\pi}{3} \int \frac{d}{dr}(r^3 H)\, dr = 0. \tag{6.33}$$

L'intégrale du tenseur d'énergie n'a donc qu'une seule composante non nulle, à savoir la composante E_0, d'indices 44. Ce théorème est connu sous le nom de *théorème de* v. Laue qui a observé le premier que pour *pouvoir considérer l'énergie et la quantité de mouvement comme un vecteur d'univers*, il fallait que la condition énoncée par le théorème

précédent fut satisfaite. Dans un système de Lorentz se mouvant avec la vitesse v, ces composantes sont égales à

$$\vec{G} = \frac{E_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad E = \frac{E_0}{\sqrt{1 - v^2}}. \tag{6.34}$$

7. Un exemple de théorie unitaire des champs électromagnétiques. — Le premier exemple connu de fonction L compatible avec l'existence de charges ponctuelles d'énergie propre finie, a été découvert en faisant appel à l'analogie suivante :

La formule classique de l'énergie cinétique, $\frac{1}{2} mv^2$, ne fixe aucune limite supérieure à la vitesse. Or, la théorie de la relativité nous indique que cela est inexact; en réalité l'énergie cinétique doit s'écrire $m\left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} - 1\right)$, expression qui correspond au lagrangien $m\left(1 - \sqrt{1 - v^2}\right)$, et qui conduit à une limite supérieure de la vitesse, prise ici égale à l'unité.

En électrodynamique le lagrangien classique de Maxwell $L = \frac{1}{2}(B^2 - E^2)$ a une structure très analogue à celle de l'énergie cinétique $\frac{1}{2} mv^2$. Ce lagrangien conduit à une énergie propre infinie pour une charge ponctuelle. Essayons d'éviter cette valeur infinie par le même changement formel qu'en mécanique relativiste, en posant

$$L = b^2\left(\sqrt{1 + \frac{1}{b^2}(B^2 - E^2)} - 1\right). \tag{7.1}$$

b est une constante universelle, le *champ absolu*, qui peut être prise égale à l'unité dans un certain nombre de problèmes. La constante -1 a été introduite pour que l'expression (7.1) se réduise à celle de la théorie de Maxwell $L = \frac{1}{2}(B^2 - E^2)$ pour des champs petits (comparés à b).

Dans le cas électrostatique, on a

$$L = b^2\left(\sqrt{1 - \frac{1}{b^2}E^2} - 1\right), \tag{7.2}$$

$$D_r = -\frac{\partial L}{\partial E_r} = \frac{E_r}{\sqrt{1 - \frac{1}{b^2}E_r^2}}, \tag{7.3}$$

$$E_r = \frac{D_r}{\sqrt{1 + \frac{1}{b^2}D_r^2}}. \tag{7.4}$$

En vertu de (6.24) on peut écrire

$$E_r = \frac{e}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{r_0^4 + r^4}}, \tag{7.5}$$

en posant

$$r_0 = \sqrt{\frac{e}{4\pi b}}. \tag{7.6}$$

r_0 est une longueur que nous appellerons *rayon de l'électron*. (7.5) montre que E_r est partout fini; pour $r = 0$ sa valeur est $b = \frac{e}{4\pi r_0^2}$ et pour $\frac{r}{r_0} > 1$ elle diffère très peu du champ de Coulomb $\frac{e}{4\pi r^2}$. Le potentiel est

$$\varphi(r) = \int_r^\infty E_r\, dr = \frac{e}{4\pi r_0} f\left(\frac{r}{r_0}\right) \tag{7.7}$$

où

$$f(x) = \int_x^\infty \frac{dy}{\sqrt{1+y^4}}. \tag{7.8}$$

En substituant $y = \operatorname{tang}\frac{\beta}{2}$, $x = \operatorname{tang}\frac{\xi}{2}$ on obtient

$$f(x) = \frac{1}{2}\int_\xi^\pi \frac{d\beta}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\beta}} = f(0) - \frac{1}{2} F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \xi\right), \tag{7.9}$$

où $F(k, \xi)$ est l'intégrale elliptique de Jacobi de première espèce, pour $k = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\frac{\pi}{4}$:

$$F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \xi\right) = \int_0^\xi \frac{d\beta}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\beta}}. \tag{7.10}$$

Pour $x = 0$, on a

$$f(0) = F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{2}\right) = 1{,}8541. \tag{7.11}$$

Le potentiel (7.7) a son maximum à l'origine et sa valeur en ce point est

$$\varphi(0) = f(0)\frac{e}{4\pi r_0} = 1{,}854\frac{e}{4\pi r_0}. \tag{7.12}$$

La variation de la fonction $f(x)$ est indiquée sur la figure 1, elle a la

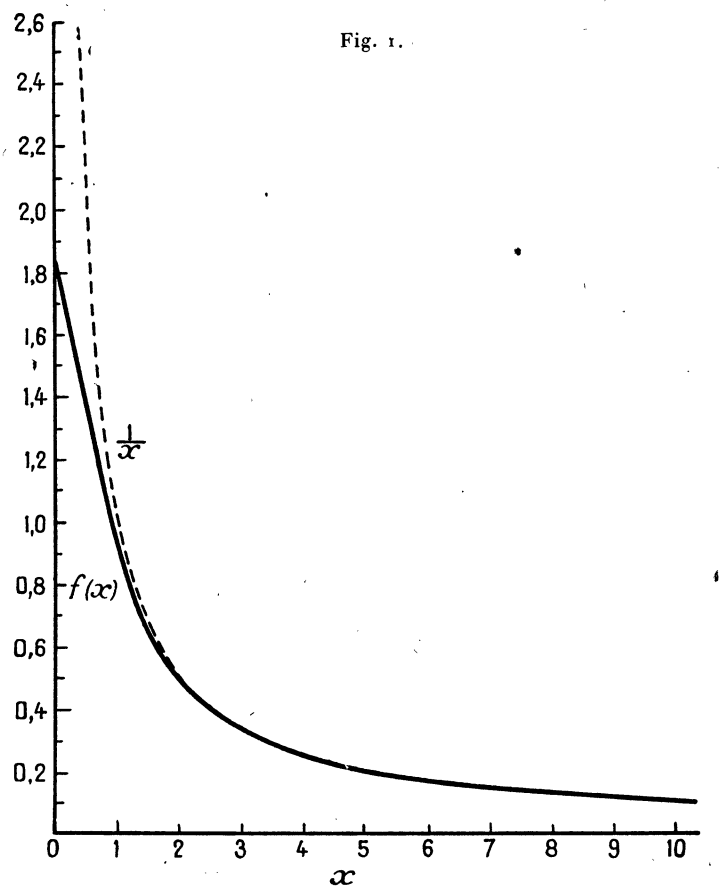


Fig. 1.

même allure que l'arc cot x. On a, par exemple,

$$\xi\left(\frac{1}{x}\right) = 2 \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{x} = 2\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tang} x\right) = \pi - \xi(x);$$

d'un autre côté

$$F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \xi\right) + F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \pi - \xi\right) = F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \pi\right),$$

donc

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = f(0). \tag{7.13}$$

Il suffit, par conséquent, de calculer les valeurs de $f(x)$ entre $x = 0$ et $x = 1$ $\left(\text{ou entre } \xi = 0 \text{ et } \xi = \frac{\pi}{2}\right)$.

Pour se rendre compte des écarts que présente cette théorie par rapport à celle de Maxwell, on peut calculer la densité de charge *libre*, d'après la formule (6.19), qui devient ici

$$\sigma = \operatorname{div}\vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2 E_r). \tag{7.14}$$

En substituant (7.5) on trouve

$$\sigma = \frac{e}{4\pi r_0^3}\frac{2}{x(1+x^4)^{\frac{3}{2}}}, \qquad \left(x = \frac{r}{r_0}\right). \tag{7.15}$$

A grande distance, la densité décroît comme r^{-7}; au centre elle devient infinie comme r^{-1}; la charge $4\pi\sigma r^2 dr$, contenue dans l'espace compris entre deux sphères de rayons r et $r+dr$, est nulle pour $r=0$ et, enfin, la charge totale s'écrit (en posant $x=\sqrt{\operatorname{tang}\varphi}$)

$$\int_0^\infty \sigma 4\pi r^2 dr = e\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, d\varphi = e;$$

elle est égale à e ainsi qu'il fallait s'y attendre,

L'énergie totale se calcule au moyen de (6.30); on obtient

$$E_0 = \frac{e^2}{4\pi r_0}\frac{2}{3}f(0) = \frac{e^2}{4\pi r_0}\,1{,}2361. \tag{7.16}$$

Nous pouvons confirmer maintenant l'hypothèse que $Hr^3 \to 0$ pour $r\to 0$ et $r\to\infty$, dont nous avons fait usage dans la démonstration de (6.30). En effet,

$$H = L + \vec{E}\vec{D} = b^2\left(\sqrt{1+\frac{D^2}{b^2}}-1\right),$$

$$r^3 H = b^2\left[\sqrt{1+\left(\frac{e}{4\pi b}\right)^2\frac{1}{r^4}}-1\right]r^3 = \left(\frac{e}{4\pi}\right)^2\frac{1}{r_0}\left(\sqrt{1+x^4}-x^2\right)x \tag{7.17}$$

$$\left(x=\frac{r}{r_0}\right),$$

et la fonction de x est bien nulle pour $x=0$ et pour $x=\infty$.

Nous avons donc démontré que le lagrangien (7.1) conduit à une énergie finie pour une charge ponctuelle au repos. Il est clair que nous pouvons égaler cette énergie à la masse au repos (multipliée par c^2 si nous revenons aux unités habituelles), sans rencontrer les mêmes obstacles que dans la théorie de l'électron rigide, puisque notre théorie est invariante du point de vue relativiste.

En attendant, nous pouvons utiliser cette propriété pour déterminer le champ absolu ou la longueur équivalente r_0, en identifiant notre charge ponctuelle avec l'électron. En passant aux unités électrostatiques nous devons laisser de côté le facteur 4π dans (7.17); on obtient alors en posant $E_0 = m_0 c^2$,

$$r_0 = 1,2361 \frac{e^2}{m_0 c^2} = 3,47 \times 10^{-13}\,\text{cm} \tag{7.18}$$

et

$$b = \frac{e}{r_0^2} = 3,96 \times 10^{15}\ \text{U. E. S.} \tag{7.19}$$

L'ordre de grandeur du *rayon de l'électron* r_0 est correct. La valeur du champ b est énorme; tous les champs réalisables expérimentalement sont négligeables à côté de celui-ci. On ne doit donc pas s'attendre à pouvoir mesurer un effet quelconque qui découlerait directement de l'existence d'un champ maximum *fini* [1]. Les écarts d'avec la théorie de Maxwell ne sont sensibles que pour des distances de l'ordre de 10^{-13} cm., c'est-à-dire pour des dimensions nucléaires. Ce résultat a une grande importance; il montre que les véritables lois électrodynamiques qui régissent les processus élémentaires des transformations nucléaires peuvent être très compliquées, sans qu'on puisse pour cela constater d'écart par rapport à la théorie de Maxwell lorsqu'on se borne à analyser les phénomènes extranucléaires.

On n'a pas encore pu résoudre de façon rigoureuse les équations du champ pour le cas de plusieurs charges ponctuelles en des points déterminés. Néanmoins Pryce [2] a pu démontrer que *le champ est déterterminé d'une façon univoque par les charges*. Écrivons la relation entre $\vec{D}$ et $\vec{E}$ [(7.3), (7.4)], sous la forme suivante, où l'on a posé $b^{-2} = \alpha$:

$$\vec{D} = \frac{\vec{E}}{\sqrt{1 - \alpha E^2}}, \qquad \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\sqrt{1 + \alpha D^2}}. \tag{7.20}$$

On peut remarquer que, pour $\alpha = -1$, on obtient l'équation des surfaces minima dans l'espace à 4 dimensions; en effet, l'intégrale dont on doit prendre la variation

$$\int \sqrt{1 + E^2}\, dx\, dy\, dz = \int \sqrt{1 + (\operatorname{grad} \varphi)^2}\, dx\, dy\, dz \tag{7.21}$$

représente l'aire de la surface $\varphi = \varphi(x, y, z)$. Le théorème d'unicité, auquel il est fait allusion plus haut, vaut également pour le problème géométrique.

Soit φ_1, φ_2 deux solutions de (6.23), auxquelles correspondent les vecteurs $\vec{E}_1$, $\vec{D}_1$ et $\vec{E}_2$, $\vec{D}_2$; il est commode pour ce qui va suivre de définir un vecteur et un scalaire par les formules

$$\vec{G} = (\varphi_2 - \varphi_1)\left(\vec{D}_1 - \vec{D}_2\right), \tag{7.22}$$

$$u = \left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2\right)\left(\vec{D}_1 - \vec{D}_2\right). \tag{7.23}$$

La démontration du théorème d'unicité se réduit alors à celle du lemme suivant :

Lemme. — *On a* $u \geqq 0$ *en tout point, l'égalité n'étant valable que pour*

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_2.$$

u peut être écrit sous une des deux formes suivantes :

$$u = \left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2\right)\left(\frac{\vec{E}_1}{\sqrt{1 - \alpha E_1^2}} - \frac{\vec{E}_2}{\sqrt{1 - \alpha E_2^2}}\right),$$

$$u = \left(\vec{D}_1 - \vec{D}_2\right)\left(\frac{\vec{D}_1}{\sqrt{1 + \alpha D_1^2}} - \frac{\vec{D}_2}{\sqrt{1 + \alpha D_2^2}}\right).$$

Si l'on peut démontrer le lemme en employant la première de ces deux expressions avec un α donné, on pourra le démontrer également pour $-\alpha$; il suffira, en effet, d'échanger partout entre eux $\vec{D}$ et $\vec{E}$ et utiliser la seconde expression. Il n'est donc pas nécessaire de traiter séparément le cas de la surface minima $\alpha = -1$.

Prenons $\alpha = 1$; on aura

$$\begin{aligned} 2u &= \left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2\right)\left[\left(\vec{E}_1 + \vec{E}_2\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1 - E_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - E_2^2}}\right) + \left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1 - E_1^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 - E_2^2}}\right)\right] \\ &= (E_1^2 - E_2^2)\left(\frac{1}{\sqrt{1 - E_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - E_2^2}}\right) + \left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2\right)^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - E_1^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 - E_2^2}}\right). \end{aligned}$$

Si $1 > E_1^2 \geqq E_2^2$, on aura $\frac{1}{\sqrt{1 - E_1^2}} \geqq \frac{1}{\sqrt{1 - E_2^2}}$ et réciproquement. Le premier terme n'est donc jamais négatif et ne peut s'annuler que si

$E_1^2 = E_2^2$; le second est essentiellement non négatif et ne devient zéro que pour $E_1 = E_2$. Le lemme est donc démontré [1].

On obtient, de (7.22),

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\vec{G} &= \operatorname{div}\left[(\varphi_2 - \varphi_1)\left(\vec{D}_1 - \vec{D}_2\right)\right] \\ &= \left(\vec{D}_1 - \vec{D}_2\right)\operatorname{grad}(\varphi_2 - \varphi_1) + (\varphi_1 - \varphi_2)\operatorname{div}\left(\vec{D}_1 - \vec{D}_2\right).\end{aligned}$$

D_1 et D_2 étant des solutions de $\operatorname{div}\vec{D} = 0$ et E_1, E_2 étant donnés par

$$\vec{E}_1 = -\operatorname{grad}\varphi_1, \qquad E_2 = -\operatorname{grad}\varphi_2,$$

on a

$$\operatorname{div}\vec{G} = \left(\vec{D}_1 - \vec{D}_2\right)\left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2\right) = u. \tag{7.24}$$

Soit maintenant R une région de l'espace à trois dimensions limitée par une surface Σ sur laquelle la valeur de φ est donnée; on a donc $\varphi_1 = \varphi_2$ et par conséquent $\vec{G} = 0$. En vertu du théorème de Gauss, appliqué à (7.24), nous aurons :

$$\int_R u\,dx\,dy\,dz = \int_\Sigma G_n\,d\sigma = 0, \tag{7.25}$$

donc $u = 0$ dans R, puisque u est non négatif. Dans ce cas, le lemme exige que $\vec{E}_1 = \vec{E}_2$ dans R; puisque $\varphi_1 = \varphi_2$ sur Σ, on aura également $\varphi_1 = \varphi_2$ dans R.

On peut démontrer de la même façon que $\vec{E}_1 = \vec{E}_2$ lorsqu'on donne sur Σ la valeur de la composante normale de D, puisque dans ce cas on a également $G_n = 0$; toutefois les φ_1 et φ_2 ne sont plus égaux, mais diffèrent par une constante.

Le problème le plus important pour les applications physiques ne concerne pas cependant une de ces questions de conditions aux limites, mais a trait aux charges ponctuelles.

On peut démontrer les résultats suivants :

Les positions et les valeurs d'un ensemble de charges étant don-

---

[1] On peut aisément voir qu'une condition suffisante pour ce lemme dans une théorie unitaire quelconque est

$$\frac{\partial L}{\partial F} > 0, \qquad 2\frac{\partial^2 L}{\partial F^2}F + \frac{\partial L}{\partial F} > 0.$$

Cette condition exprime que $\vec{D}$ et $\vec{E}$ ont la même direction et que leurs valeurs croissent ou décroissent ensemble.

nées, si le vecteur D *est de l'ordre de* r^{-2} *au voisinage d'une charge et à l'infini, les équations* (6.23) *ont une solution et une seule dans tout l'espace.*

Pour le montrer, prenons comme région R l'espace compris entre une sphère de grand rayon ρ, renfermant toutes les charges à l'intérieur, et une série de petites sphères de rayon ε, centrées sur chacune des charges et ne se coupant pas mutuellement. En vertu du théorème de Gauss appliqué en considérant toujours la normale extérieure, on peut écrire :

$$\int_R u\,dx\,dy\,dz = \int_\rho G_n\,d\sigma - \sum \int_\varepsilon G_n\,d\sigma.$$

La grandeur d'une charge étant $e = \int D_n\,d\sigma$, on a

$$\int_\varepsilon (D_1 - D_2)_n\,d\sigma = 0.$$

Dans le voisinage d'une charge déterminée $\varphi = \varphi^0 + O(\varepsilon^{-1})$; donc

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon G_n\,d\sigma &= \int_\varepsilon [\varphi_1^0 - \varphi_2^0 + O(\varepsilon^{-1})](D_1 - D_2)_n\,d\sigma \\ &= (\varphi_1^0 - \varphi_2^0)\int (D_1 - D_2)_n\,d\sigma + \int O(\varepsilon^{-1})\,d\sigma,\end{aligned}$$

et puisque $d\sigma = \varepsilon^2\,d\omega$, où $d\omega$ est l'élément de la sphère unité, on aura :

$$\int_\varepsilon G_n\,d\sigma = O(\varepsilon).$$

Par hypothèse, D est $O(\varepsilon^{-2})$ à l'infini; de (7.20) on conclut que $\vec{E} = O(\varepsilon^{-2})$, donc $\varphi = O(\varepsilon^{-1})$. La contribution de la grande sphère est donc

$$\int_\rho G_n\,d\sigma = \int_\rho O(\rho^{-3})\,d\sigma = O(\rho^{-1});$$

donc

$$\int_R u\,dx\,dy\,dz = O(\varepsilon) + O(\rho^{-1}).$$

Faisons tendre ε vers zéro, $\varepsilon \to 0$, et ρ vers l'infini, $\rho \to \infty$; le second membre tend vers zéro. L'intégrale étant non négative et ne pouvant décroître, doit, par conséquent, être nulle. Le lemme exige alors comme précédemment que l'on ait $\vec{E}_1 = \vec{E}_2$ en tout point de R.

Suivant mes indications, Pryce a réussi à résoudre complètement le *problème électrostatique à 2 dimensions* [3]. L'idée fondamentale utilisée est précisément la mise à profit de l'équivalence de ce problème avec celui des surfaces minima. Il existe une méthode de résolution de ce dernier problème, indiquée par Weierstrass, et qui consiste à représenter x, y et φ par des fonctions analytiques d'un paramètre complexe. On peut transposer, sans plus, cette méthode et l'appliquer au problème électrostatique à deux dimensions. Nous nous bornerons à en indiquer la solution.

Soit $f(\xi)$ une fonction arbitraire du paramètre complexe ξ.

On a

$$(7.26)\qquad \begin{cases} x = \mathfrak{R}\int\left(\frac{1}{\xi^2}+1\right)f(\xi)\,d\xi, \qquad y = \mathfrak{R}\int i\left(\frac{1}{\xi^2}-1\right)f(\xi)\,d\xi, \\ \varphi + i\psi = 2\int f(\xi)\frac{d\xi}{\xi}, \end{cases}$$

où $\mathfrak{R}A$ signifie la partie réelle du nombre complexe A.

La force s'exerçant sur un domaine fermé du plan x, y, limité par une courbe, s'exprime au moyen des intégrales de ligne

$$(7.27)\qquad \begin{cases} X = \int[X_{11}\cos(\nu, x) + X_{12}\cos(\nu, y)]\,ds, \\ Y = \int[X_{21}\cos(\nu, x) + X_{22}\cos(\nu, y)]\,ds, \end{cases}$$

où ν est la normale extérieure de l'élément ds. Introduisons dans cette formule les expressions (5.12) des tensions de Maxwell (pour le cas de deux dimensions); l'expression des composantes de la force en fonction du paramètre ξ sera

$$(7.28)\qquad \begin{cases} X = \mathfrak{R}\left(-\frac{i}{\pi}\int_C f(\xi)\,d\xi\right), \\ Y = \mathfrak{R}\left(-\frac{1}{\pi}\int_C f(\xi)\,d\xi\right). \end{cases}$$

les intégrales devant être prises le long de la courbe fermée C qui limite le domaine considéré. Lorsque ce domaine ne contient pas de charge, X et Y sont nulles en vertu du théorème de Cauchy. Lorsque le domaine contient une charge, X et Y ont des valeurs finies, représentant les forces qui s'exercent sur elle (et qui proviennent des autres charges). Dans le paragraphe suivant, nous discuterons en détail le problème des

forces et nous examinerons, en particulier, dans quelle mesure la formule (7.27) découle des hypothèses fondamentales.

Le choix de la fonction $f(\xi)$ est soumis à un certain nombre de restrictions qui découlent d'une analyse exacte de la signification physique des grandeurs exprimées au moyen de cette fonction. On trouve que $|\xi| \leqq 1$, c'est-à-dire que le point figuratif de ξ doit se trouver à l'intérieur ou sur le cercle $\xi = 1$, et que $f(\xi)$ doit être réelle pour tout $|\xi| = 1$. Ensuite $f(\xi)$ ne doit pas avoir de zéros (réguliers) dans $|\xi| = 1$; elle peut avoir des zéros sur le cercle $|\xi| = 1$, mais ils doivent être simples. $f(\xi)$ peut être multiforme; sur l'une des surfaces de Riemann correspondantes, $f(\xi)$ doit être infinie au point $\xi = 0$, tout en restant finie pour tous les autres feuillets; enfin les développements doivent être bien définis.

Lorsqu'on a choisi une fonction $f(\xi)$ satisfaisant à ces conditions, on peut montrer en général que le champ $\vec{D}$ dans le voisinage d'une charge est donné par $\vec{D} = D\frac{\vec{r}}{r}$, avec

$$D = \frac{2\,|F(\theta)|}{r}, \qquad F(\theta) = f(e^{i\theta}),$$

de sorte que la charge est représentée par

$$e = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\theta)\,d\theta. \tag{7.29}$$

Les forces sont données dans ce cas par les formules suivantes :

$$X = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\theta)\cos\theta\,d\theta, \qquad Y = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\theta)\sin\theta\,d\theta. \tag{7.30}$$

Le choix le plus simple est $f(\xi) =$ constante, soit

$$f(\xi) = -\frac{1}{2}a \qquad (a = \text{réel}). \tag{7.31}$$

Dans ce cas, les intégrales de (7.26) se calculent facilement et donnent

$$\varphi = a\sin^{-1}\left(\frac{r}{a}\right), \qquad \psi = a\theta \qquad (e = a), \tag{7.31 a}$$

où r, θ sont des coordonnées polaires. Ceci est la solution, dans deux dimensions, du problème d'une seule charge ponctuelle [et correspond

à celle qui a été donnée précédemment pour trois dimensions, à savoir (7.7)].

Pour représenter le cas de *deux charges ponctuelles*, il faut prendre pour $f(\xi)$ une fonction à deux déterminations, d'un type qui varie suivant qu'il s'agit de charges de même signe ou de signes opposés, à savoir :

pour deux charges de même signes :

$$(7.32)\quad f(\xi)=k\left\{\left[a+a'-\xi-\frac{1}{\xi}\right]\times\left[\left(2a-\xi-\frac{1}{\xi}\right)\left(2a'-\xi-\frac{1}{\xi}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}+1\right\}\quad \text{avec}\quad (a,a'>1),$$

et *pour deux charges de signes opposés*

$$(7.33)\quad f(\xi)=k\left\{\left[2a\cos\alpha-\xi-\frac{1}{\xi}\right]\times\left[4(a^2-\sin^2\alpha)-4a\left(\xi+\frac{1}{\xi}\right)\cos\alpha+\left(\xi+\frac{1}{\xi}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}+1\right\}\quad (a>0).$$

Les expressions du potentiel et de la force sont trop compliquées pour être reproduites ici. Considérons cependant le cas particulier de *deux charges égales mais de signes opposés;* dans ce cas, $f(\xi)$ a la forme simple suivante

$$(7.34)\qquad f(\xi)=\frac{k'}{\sqrt{2a-\xi-\frac{1}{\xi}}}.$$

Le champ est analogue à celui d'un dipôle classique, sauf au voisinage des charges. Donnons les expressions, relativement simples de la charge, de la force et de la distance :

$$(7.34\,a)\qquad \left\{\begin{aligned} e &= \frac{k'}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{2(a-\cos\theta)}},\\ X &= \frac{k''}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta\,d\theta}{\sqrt{2(a-\cos\theta)}},\\ r &= 2k'\int_0^{\pi}\frac{a+1-(a-1)\cos\theta}{\sqrt{a+3-(a-1)\cos\theta}}\,d\theta.\end{aligned}\right.$$

On voit que $\frac{X}{e}$ et $\frac{r}{e}$ ne dépendent que de la constante a; en l'éliminant,

on obtient pour $\frac{X}{e}$ en fonction de $\frac{e}{r}$ une expression qui se réduit à $X = \frac{e^2}{r}$ à grande distance, comme il fallait s'y attendre pour un problème à deux dimensions à potentiel logarithmique. A petite distance, les forces restent finies et tendent vers $X = e$.

Ce dernier résultat peut se généraliser pour le cas du problème de deux charges différentes; dans ce cas X tend vers la valeur absolue de la charge la plus petite.

Pryce a mis encore en évidence l'existence d'une solution intéressante, qui correspond à une ligne singulière de longueur finie et qui est donnée par

$$f(\xi) = -\frac{a\sqrt{\xi}}{2(1+\xi)} \qquad (a \text{ réel}). \tag{7.35}$$

A grande distance, elle a le caractère d'une solution de dipôle. Enfin Pryce a montré que la fonction

$$f(\xi) = -k\left(\frac{2\xi}{1-2a\xi+\xi^2}\right)^2 \qquad (a > 0) \tag{7.36}$$

correspond à une charge ponctuelle dans un champ extérieur constant E. Il trouve

$$E = \frac{1}{a}, \qquad e = \frac{2ka}{\sqrt{a^2-1}}, \qquad X = \frac{2k}{\sqrt{a^2-1}} = eE; \tag{7.36 a}$$

la force est égale au produit entre la charge et la valeur du champ comme dans la théorie de Maxwell. Nous verrons plus loin (§ 10) que ce résultat peut être déduit d'hypothèses beaucoup plus générales.

Malheureusement, il semble impossible de transposer cette méthode du cas à deux dimensions à celui à trois. En dehors du problème d'une charge ponctuelle au repos, il n'y en a qu'un seul autre qu'on puisse traiter dans l'espace à 3 dimensions, au moins par des méthodes approximatives : c'est *le problème du champ stationnaire d'un courant constant filiforme et circulaire*. J'ai suggéré l'étude de ce cas de *singularité annulaire* dans l'espoir qu'elle pourrait nous fournir un modèle applicable au proton.

L'énergie de cette singularité peut avoir n'importe quelle valeur, étant donné qu'elle dépend du rayon du cercle et de l'intensité du courant. Cette ambiguïté est cependant réduite par l'application du postulat quantique qui exige que le moment cinétique soit un multiple de $h/2\pi$.

J'espérais que la résolution de ce problème nous donnerait la possibilité de rendre compte de la valeur élevée de la masse du proton. M. B. S. Madhava Rao a pris la peine d'effectuer les calculs compliqués qu'exige cette résolution [4]. On peut les effectuer complètement, en raison du fait que la non-linéarité des équations n'affecte la solution que dans le voisinage immédiat de l'anneau, à l'intérieur d'un tore, à l'extérieur duquel on peut appliquer les équations de Maxwell. Or, d'une part, on connaît très bien la solution des équations de Maxwell pour une surface annulaire et, d'autre part, la solution à l'intérieur du tore peut être trouvée par une simple méthode d'approximation; il est donc parfaitement possible d'obtenir une solution approximative satisfaisante en tout point et de calculer l'énergie totale E, le moment cinétique M et le moment magnétique m. Le résultat final est le suivant :

$$(7.37)\qquad E = \frac{4e^2}{a}\log\left(\frac{16a}{r_1}\right), \qquad M = 4e^2 v \log\left(\frac{16a}{r_1}\right), \qquad m = \frac{aev}{2},$$

où e est la charge totale, uniformément distribuée sur l'anneau de rayon a, v la vitesse de rotation et

$$r_1 = 16\pi\left(\frac{a}{r_0}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{1-v^2}},$$

r_0 étant le rayon de l'électron défini par (7.6), (7.18).

La première conséquence qu'on peut en tirer est la suivante. On a

$$(7.38)\qquad \frac{m}{M} = \frac{e}{2E} = \frac{e}{2\mu},$$

où $E = \mu$ est la masse au repos; cette relation est identique à celle qui existe entre les moments magnétique et angulaire d'un électron orbital en théorie classique. Donc une pareille singularité annulaire ne constitue certainement pas un modèle d'un particule avec un « spin », pour lequel ce rapport est égal au double de la valeur précédente.

En prenant v voisin de c (vitesse de la lumière) et a égal à $r_0/17$, on obtient une masse environ 1840 fois plus grande que celle d'un électron (charge ponctuelle), et en même temps un moment angulaire égal à $\hbar$; seulement, cet état de l'anneau ne constitue pas une position d'équilibre stable.

Ce résultat montre que la théorie non-linéaire du champ électromagnétique ne fournit pas la solution du problème des deux masses élémentaires fondamentales [5].

8. **Autres exemples de théories unitaires.** — Examinons maintenant la question de savoir si l'on peut justifier le choix de la fonction (7.1) par des raisons plus fondamentales que celles que nous avons déjà données, ou s'il existe d'autres fonctions tout aussi bien adaptées, sinon mieux, au but poursuivi.

Infeld a proposé un raisonnement [1] qui conduit à une fonction légèrement différente de (7.1) et coïncidant avec elle dans le cas électrostatique; le calcul du champ et de l'énergie d'une charge ponctuelle reste donc le même que jusqu'à présent.

L'idée d'Infeld est étroitement liée à la conception constamment suivie par Einstein et suivant laquelle le champ gravifique et le champ électromagnétique sont en réalité deux aspects d'un seul et même champ « unifié » u_{kl}.

Admettons que ce champ soit quelconque, du point de vue de ses caractéristiques de symétrie; en tout cas il pourra être séparé additivement en une partie symétrique et une partie antisymétrique

$$u_{kl} = g_{kl} + f_{kl}, \qquad g_{kl} = g_{lk}, \qquad f_{kl} = -f_{lk}.$$

La première partie décrit le champ métrique ou gravifique, la seconde le champ électromagnétique. Le lagrangien sera la fonction la plus simple rendant invariante l'intégrale I, pour n'importe quelle transformation; cette fonction bien connue est la racine carrée du déterminant de u_{kl} (pris avec le signe —)

$$\sqrt{-|u|} = \sqrt{-|g+f|} = \sqrt{-|g|}\,\sqrt{|1+fg^{-1}|}.$$

Or, au § 4, nous avons déjà étudié la matrice $a(1) = 1 + fg^{-1}$; nous avons vu que d'après (4.18)

$$|a(1)| = |1 + fg^{-1}| = 1 + F - G^2.$$

Si nous voulons que L coïncide avec $\frac{1}{2}F$ pour des champs faibles, il suffira de retrancher 1 de l'expression précédente; on obtient donc

$$L = \sqrt{1 + F - G^2} - 1. \tag{8.1}$$

Cette expression diffère de (7.1) par le terme $-G^2 = -(\vec{E}.\vec{B})^2$, qui s'annule pour un champ électrostatique. Comme cependant *toute* fonction de F, G est permis également comme lagrangien L, nous pouvons ima-

giner ce terme $-G^2$ remplacé par $-\lambda G^2$, λ étant une constante arbitraire; pour $\lambda = 0$ on obtient (7.1) (avec $b = 1$). Dans ce qui suit, nous emploierons toujours le lagrangien (8.1); en supprimant les termes en G^2 nous obtiendrons les résultats correspondant à (7.1).

Le raisonnement qui conduit à (8.1) n'est pas très convaincant, puisqu'en traitant g_{ik} et f_{ik} sur le même plan on devrait pouvoir obtenir aussi bien les équations électromagnétiques que les équations gravifiques au moyen du même lagrangien. Une autre objection contre le procédé un peu sommaire qui consiste à ajouter simplement les deux types de champs pour obtenir u_{kl}, est l'énorme différence entre leurs valeurs exprimées avec les unités usuelles. Néanmoins, nous étudierons la fonction (8.1) en raison de ses propriétés remarquables.

Une première propriété est la suivante : l'hamiltonien correspondant à $\sqrt{1+F-G^2}-1$ est exactement cette même fonction où F et G ont été remplacés par les invariants duals P et Q (6.7). On trouve aisément qu'entre F, G et P, Q, on a les relations

$$\frac{1+F-G^2}{1+G^2} = \frac{1+Q^2}{1+P^2-Q^2} \qquad \text{et} \qquad G = Q, \tag{8.2}$$

d'où

$$H = \sqrt{1+P-Q^2}-1. \tag{8.3}$$

Les autres fonctions fondamentales U et V (6.14) et (6.15) ont également des valeurs simples

$$\begin{cases} U = \sqrt{1+D^2+B^2+S^2}-1, \\ V = \sqrt{1+E^2+H^2+S^2}-1, \end{cases} \tag{8.4}$$

où S^2 est le carré du vecteur de Poynting [*voir* (6.13)]

$$S^2 = \left(\vec{D}\times\vec{B}\right)^2 = \left(\vec{E}\times\vec{H}\right)^2. \tag{8.4 a}$$

Une autre forme intéressante de la théorie a été découverte par Schrödinger [2]. Celui-ci emploie les combinaisons complexes :

$$\vec{\mathcal{F}} = \vec{B} - i\vec{D}, \qquad \vec{\mathcal{G}} = \vec{E} + i\vec{H} \tag{8.5}$$

qui forment un véritable vecteur à six composantes; on constate que le lagrangien approprié est le suivant :

$$\mathfrak{L}' = \frac{\mathcal{F}^2 - \mathcal{G}^2}{\vec{\mathcal{F}}\,\vec{\mathcal{G}}}; \tag{8.6}$$

ses dérivées partielles par rapport à $\vec{\mathcal{F}}$ et $\vec{\mathcal{G}}$ sont précisément égales aux quantités complexes conjuguées de $\vec{\mathcal{G}}$ et $\vec{\mathcal{F}}$:

$$\vec{\mathcal{F}}^* = \frac{\partial \mathfrak{L}'}{\partial \vec{\mathcal{G}}'}, \qquad \vec{\mathcal{G}}^* = \frac{\partial \mathfrak{L}'}{\partial \vec{\mathcal{F}}}. \tag{8.7}$$

Schrödinger a démontré ces relations par une étude détaillée de l'aspect géométrique des transformations de Lorentz. Il a montré qu'il existe un système de Lorentz « normal », dans lequel tous les 4 vecteurs $\vec{\mathcal{F}}$, $\vec{\mathcal{G}}$, $\vec{\mathcal{F}}^*$, $\vec{\mathcal{G}}^*$, sont parallèles en un point donné; lorsqu'on développe la théorie initiale dans ce système particulier, on peut aisément démontrer qu'elle est identique à celle obtenue au moyen de la représentation complexe précédente.

La propriété la plus remarquable de $\mathfrak{L}'$ est son caractère de fonction rationnelle : elle est simplement le quotient des deux invariants. Cependant, cet avantage est purement formel : la racine carrée apparaît de nouveau dès qu'on veut effectuer un calcul concret. Schrödinger a également attiré l'attention sur le fait que cette représentation complexe permet l'existence de deux types de champs; l'un pour lequel les deux vecteurs $\vec{\mathcal{F}}$ et $\vec{\mathcal{G}}$ sont parallèles dans le système normal de Lorentz, l'autre pour lequel les mêmes vecteurs sont antiparallèles. Il n'y a aucun argument valable permettant d'exclure l'un ou l'autre de ces deux cas. Or, dans la forme réelle de la théorie cette différence correspond à la possibilité de prendre le signe + ou — devant le radical; il semble donc qu'on doive admettre dans la théorie initiale la possibilité de ce double signe [3].

Madhava Rao [4] a entrepris une comparaison détaillée des formules de Schrödinger avec les formules de notre théorie.

P. Weiss [5] a proposé une autre forme complexe essentiellement nouvelle de la théorie. Il introduit les vecteurs d'espace $\vec{B} \pm i\vec{E}$ et $\vec{D} \pm i\vec{H}$ dont l'ensemble *ne forme pas* un vecteur à six composantes. Il démontre que le groupe des transformations orthogonales des vecteurs *complexes* à 3 dimensions, est isomorphe au groupe de transformations des vecteurs à six composantes *réelles* (c'est-à-dire des tenseurs antisymétriques du second rang dans l'espace à 4 dimensions) induit par le groupe de Lorentz. Ce théorème permet de présenter l'ensemble de la théorie sous une forme parfaitement symétrique.

Weiss critique ensuite le lagrangien (8.1) et propose de le remplacer

par la partie réelle de la fonction complexe suivante des invariants F et G

$$\sqrt{1+2(F+iG)}-1; \tag{8.8}$$

ses arguments ne me semblent cependant pas convaincants.

La seule proposition raisonnable pour l'adoption d'un principe général d'où devrait découler univoquement le choix du lagrangien a été faite par Infeld [6]; celui-ci exige que les *composantes du champ* $f_{kl}(\vec{B}, \vec{E})$ *ne présentent aucune singularité.*

Considérons une charge ponctuelle avec un des lagrangiens (7.1) et (8.1), lesquels coïncident d'ailleurs dans le cas électrostatique. Dans ces deux cas, le point où se trouve la charge est un point singulier non seulement pour $\vec{D}$, qui varie comme e/r^2, mais aussi pour $\vec{E}$ puisque toutes les composantes de $\vec{E}$ sautent de -1 à $+1$ (en unités naturelles, $b=1$), lorsqu'on traverse la singularité sur une droite. Cette singularité est inoffensive puisqu'elle n'altère pas le caractère de grandeur finie de l'énergie. Néanmoins, il est intéressant de chercher s'il existe un lagrangien pour lequel $\vec{E}$ et ses premières dérivées soient continues partout, même au point central d'un champ à symétrie sphérique.

Infeld a découvert une pareille fonction par une étude systématique, que je vais uniquement esquisser dans ce qui suit. Il part de l'hypothèse que la symétrie complète de la théorie, qui s'exprime par son caractère de théorie selfduale, doit permettre l'emploi d'un principe de variation, contenant simultanément les deux groupes de tenseurs selfduals. Il introduit une fonction d'action T dépendant des $f_{kl}(\vec{E}, \vec{B})$ et $p^*_{kl}(\vec{D}, \vec{H})$, naturellement par l'intermédiaire des invariants F et P ($G = Q$ est exclu). Les f_{kl} doivent dériver des potentiels, les p_{kl} des « antipotentiels », de façon qu'ils satisfassent aux deux groupes de conditions d'intégrabilité

$$\frac{\partial f^{*kl}}{\partial x^l}=0, \qquad \frac{\partial p^{kl}}{\partial x^l}=0. \tag{8.9}$$

Ensuite, il restreint la généralité de la fonction T(F, P) en imposant la condition que f_{kl} et p^{kl} soient « canoniquement conjuguées », c'est-à-dire que l'on ait :

$$\begin{cases} p^{kl} = \dfrac{\partial T}{\partial f^{kl}} = \dfrac{\partial T}{\partial F}\, 2f^{kl}, \\ f^{*kl} = \dfrac{\partial T}{\partial p^*_{kl}} = \dfrac{\partial T}{\partial P}\, 2p^{*kl}. \end{cases} \tag{8.10}$$

Ces relations doivent permettre de calculer les p^*_{kl}, en fonction des f_{kl}. Leur nombre est égal cependant à $2 \times 6 = 12$, et par conséquent pour qu'elles soient compatibles il faut que T satisfasse à certaines conditions, qui s'expriment par

$$(8.11) \qquad 4\frac{\partial T}{\partial F}\frac{\partial T}{\partial P} = 1, \qquad \frac{\partial T}{\partial F}F + \frac{\partial T}{\partial P}P = 0.$$

La dernière condition montre que T est une fonction homogène de degré zéro en F et P, en d'autres termes qu'elle dépend uniquement de

$$(8.11\,a) \qquad \varepsilon = \sqrt{-\frac{F}{P}}.$$

Une discussion simple des caractéristiques de $T(\varepsilon)$ conduit au résultat suivant : pour que E puisse être continue en un point où $D \to \frac{1}{r^2}$, elle doit être de la forme

$$(8.12) \qquad T = -\log\varepsilon + 1 + \varepsilon + \ldots,$$

où les points indiquent des termes contenant des puissances plus élevées de ε.

Lorsqu'on néglige ces termes on obient le $T(\varepsilon)$ le plus simple; l'hamiltonien correspondant est :

$$(8.13) \qquad H = \frac{1}{2}\log(1 + P).$$

Le lagrangien a une forme plus compliquée, mais la formule qui relie p_{kl} et f_{kl} est simple, qu'on l'exprime au moyen de P ou de F :

$$(8.14) \qquad f_{kl} = \frac{p_{kl}}{1 + P}, \qquad p_{kl} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4F}}{2F} f_{kl}.$$

Le signe du radical doit être choisi de façon à satisfaire à la condition de continuité pour les composantes du champ. Les points critiques sont définis par $1 + 4F = 0$; en ces points critiques, qui forment en général une surface, F atteint son minimum, $F = -\frac{1}{4}$, et le radical disparaît. Pour conserver la continuité, le signe du radical doit être changé quand on traverse une surface $F = -\frac{1}{4}$. Puisqu'à grande distance des charges $p_{kl} \to f_{kl}$, nous voyons que dans ces régions il faudra prendre le signe « plus »; il existera donc une surface $-\frac{1}{4} = F$ entourant une charge et à l'intérieur de laquelle il faudra prendre le signe « moins ».

Ce raisonnement est confirmé par le résultat du calcul effectif du problème d'une charge ponctuelle isolée. Écrivons au lieu de (8.13)

$$(8.13\,a)\qquad H = \frac{b^2}{2}\log\left(1+\frac{P}{b^2}\right);$$

avec $P = D^2$, $D_r = \frac{e}{4\pi}\frac{1}{r^2}$, on obtient

$$(8.15)\qquad E_r = \frac{e}{4\pi r_0^2}\frac{x^2}{1+x^4}\qquad \left(x = \frac{r}{r_0};\ r_0 = \sqrt{\frac{e}{4\pi b}}\right).$$

La surface à l'intérieur de laquelle le signe du radical dans (8.14) change, est une sphère de rayon défini par $(E_r/b)^2 = \left(\frac{x^2}{1+x^4}\right)^2 = \frac{1}{4}$, soit $x = 1$. La densité de charge libre est

$$(8.16)\qquad \sigma = \operatorname{div}\vec{E} = \frac{e}{4\pi r_0^3}\frac{4x}{(1+x^4)^2};$$

elle s'annule pour $r = 0$ et, pour r grand, décroît comme r^{-7}, exactement comme dans le cas du § 7. On peut aisément vérifier que l'intégrale de σ sur tout l'espace est égale à e.

On trouve pour le potentiel

$$(8.17)\qquad \varphi(r) = \frac{e}{4\pi r_0}\int_x^\infty \frac{y^2}{1+y^4}\,dy.$$

Sa valeur pour $r = 0$ est

$$(8.18)\qquad \varphi(0) = \frac{e}{4\pi r_0}\frac{x\sqrt{2}}{4} = \frac{e}{4\pi r_0}\,1{,}11,$$

et l'énergie en vertu de (6.30)

$$(8.19)\qquad E_0 = \frac{e^2}{4\pi r_0}\frac{\sqrt{2}\pi}{6} = \frac{e^2}{4\pi r_0}\,0.741.$$

Le coefficient numérique est notablement plus faible que dans (7.16).

Ainsi qu'on le voit facilement, il n'existe pas de solution similaire pour une charge ponctuelle magnétique. Cette théorie rend donc compte de la constatation empirique d'après laquelle l'électricité et le magnétisme ne sont pas interchangeables. Ce fait semble constituer l'argument le plus sérieux en faveur de l'hypothèse de la continuité de $\vec{E}$; en effet,

puisque la singularité de $\vec{D}$ ne peut être évitée, l'existence d'une discontinuité de $\vec{E}$ n'a pas grande importance tant qu'elle reste inoffensive, c'est-à-dire tant qu'elle laisse l'énergie finie.

9. **Les conditions de l'équilibre dynamique** [1]. — Considérons maintenant le problème du mouvement d'une charge ponctuelle sous l'action d'un champ électromagnétique extérieur.

Il nous faut, avant tout, expliquer ce que nous entendons par cette dernière expression « champ électromagnétique extérieur », qui nécessite certains éclaircissements dans toute théorie non-linéaire où les champs ne peuvent plus être superposés. Il est évident que nous entendons par « champ extérieur », le champ à une distance infinie de la charge ponctuelle, laquelle doit être considérée comme donnée. Naturellement, cela n'est possible que s'il s'agit d'un calcul approximatif; en effet, si la particule se meut avec une vitesse variable, elle émettra des ondes qui seront fonctions du mouvement et qu'on ne peut pas considérer comme données. Il s'agira donc ici principalement de mouvements « quasi-stationnaires », pour lesquels on peut négliger la réaction produite par l'émission des ondes.

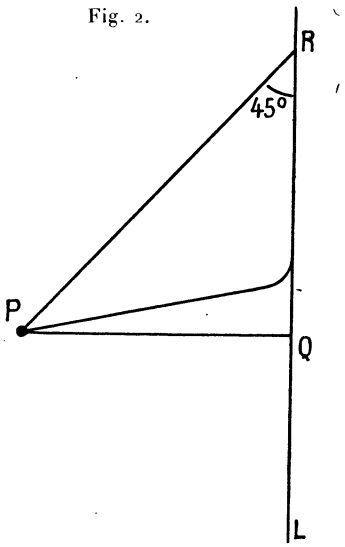
Nous ne faisons aucune hypothèse particulière concernant le lagrangien; nous admettons seulement que le champ, l'énergie et la quantité de mouvement ont des valeurs finies.

On a beaucoup débattu la question de savoir si l'établissement des équations du mouvement exigeait ou non de nouvelles hypothèses. Dans notre premier article, Infeld et moi-même avons traité ce problème en nous servant d'un principe de variation; nous avions formulé ce principe de telle manière que l'intégrale devait être stationnaire non seulement pour des variations du champ dans l'espace, mais aussi pour des variations des lignes d'univers de la charge.

Laissant de côté la question de savoir si la méthode mathématique que nous avons employée était correcte ou non, nous continuons à penser que notre point de vue est juste en principe et qu'il suffit d'une très légère amélioration pour le rendre tout à fait acceptable. Feenberg [2] a soulevé l'objection suivante : ayant démontré qu'on peut déterminer un champ pour tout mouvement arbitraire de la charge, il en a conclu que le mouvement réel doit être fixé parmi tous les autres possibles, au moyen d'hypothèses supplémentaires. Pryce a fait des remarques ana-

logues aux précédentes. Je pense que cette objection passe à côté du but. Pour le montrer, je vais considérer l'exemple très simple d'un problème du calcul des variations qui a un trait en commun avec la nôtre; à savoir le problème suivant : *trouver la plus petite distance d'un point* P *à une ligne droite* L. Le trait commun est constitué par le fait qu'on ne

Fig. 2.



donne pas la position du point Q le plus rapproché de P sur la droite; celui-ci correspond dans notre problème au mouvement inconnu de la charge.

En variant l'intégrale qui donne la distance, on obtient :

1° Une équation différentielle exprimant que l'extrémale doit être une droite;

2° une condition aux limites exprimant que l'extrémale doit être normale à L.

Le point de vue adopté par Feenberg conduirait à négliger la condition aux limites qui découle du principe de variation. Donner le mouvement de la charge, revient à donner arbitrairement l'angle sous lequel l'extrémale devra couper la droite L. Pour un angle donné, soit par exemple 45°, il existe une solution du problème, à savoir la courbe PR (*fig.* 2) qui est rectiligne (donc satisfait à l'équation différentielle) et qui coupe la droite L à 45°. Néanmoins, elle ne réalise pas un extrémum

de l'intégrale initiale; en effet, la longueur de toute courbe analogue à C (*fig.* 2) (droite depuis P jusque dans le voisinage de L où elle dévie pour rencontrer celle-ci sous un angle de 45°) est évidemment plus petite que PR. La limite inférieure de la longueur de toutes ces courbes est la longueur de la perpendiculaire PQ; celle-ci n'appartient pas à la catégorie des courbes précédentes puisqu'elle ne coupe pas L à 45°. Il résulte de cette analyse que l'intégrale n'a pas de minimum lorsqu'on impose cette condition arbitraire. Un tel minimum n'existe que pour les conditions aux limites « naturelles », qui expriment que l'angle avec L doit être 90°.

De la même façon, la solution des équations de champ pour un mouvement arbitraire de la charge ne fournit pas nécessairement un extrémum de l'intégrale I (ou, plus correctement, « n'annule pas nécessairement la première variation », attendu que l'intégrale peut ne pas être définie positive). Il nous faut trouver quelles sont les conditions aux limites naturelles de l'intégrale et voir si elles correspondent à un mouvement de la charge. Si tel n'est pas le cas, il faudra modifier convenablement l'intégrale de départ et utiliser les nouvelles conditions aux limites.

Au paragraphe 3 nous avons calculé la variation sur la frontière pour une surface quelconque à quatre dimensions; nous avions trouvé, voir (3.23), (3.24) et (3.24 *a*),

$$\delta I = \int_S (\mathfrak{X}_k\, \delta x^k + \mathfrak{P}^k\, \delta \varphi_k)\, du \tag{9.1}$$

avec

$$\mathfrak{X}_k = \mathfrak{T}^i_k N_i, \qquad \mathfrak{P}^k = \mathfrak{p}^{ik} N_i. \tag{9.2}$$

La surface S de notre problème est un tube de section infiniment petite, entourant la ligne d'univers de la singularité (singularité de $\vec{D}$, puisque $\vec{E}$ peut être continue, *cf.* § 8). Introduisons comme paramètres sur S, le temps t_0 de la ligne d'univers et deux autres paramètres (coordonnées polaires) définissant la position de l'élément de surface à deux dimensions $d\sigma$, d'une sphère infinitésimale s, dans l'espace à trois dimensions $t_0 =$ const. On a, alors, sur la surface de la sphère s

$$\frac{\partial x^1}{\partial t_0} = \frac{\partial x^2}{\partial t_0} = \frac{\partial x^3}{\partial t_0} = 0, \qquad \frac{\partial x^4}{\partial t_0} = 1,$$

et la définition (1.12) de N_i donne

$$(9.3)\qquad (N_1, N_2, N_3)\, du = \vec{n}\, d\sigma\, dt_0, \qquad N_4 = 0,$$

où $\vec{n}$ est le vecteur unité dirigé sur la normale à la sphère s, et $d\sigma$ l'élément de surface de celle-ci.

Introduisons maintenant les vecteurs

$$(9.4)\qquad \vec{X}(X_x, X_y, X_z), \quad \vec{Y}(Y_x, Y_y, Y_z), \quad \vec{Z}(Z_x, Z_y, Z_z)$$

et les intégrales prises sur la sphère s (et indiquées par un O)

$$(9.5)\qquad \int_0 \vec{X}\vec{n}\, d\sigma = F_x, \qquad \int_0 \vec{Y}\vec{n}\, d\sigma = F_y, \qquad \int_0 \vec{Z}\vec{n}\, d\sigma = F_z,$$

$$(9.6)\qquad \int_0 (\vec{\mathfrak{H}} \times \vec{n})\, d\sigma = \vec{\gamma}, \qquad \int_0 \vec{\mathfrak{D}}\vec{n}\, d\sigma = \varepsilon, \qquad \int_0 \vec{S}\vec{n}\, d\sigma = f.$$

Nous pouvons écrire (9.1) en notation vectorielle ordinaire sous la forme

$$(9.7)\qquad \delta I = -\int \left(\vec{F}\,\delta\vec{r} + f\,\delta t + \vec{\gamma}\,\delta\vec{a} + \varepsilon\,\delta\varphi\right) dt_0,$$

où $\vec{F}$ est le vecteur de composantes (9.5) et $\vec{r}$ le rayon vecteur de composantes x, y, z. $\delta\vec{r}$ et δt sont les variations de la ligne d'univers et $\delta\vec{a}$, $\delta\varphi$ les variations des potentiels sur la ligne d'univers.

Les conditions aux limites naturelles sont

$$(9.8)\qquad \vec{F} = 0, \qquad f = 0$$

et

$$(9.9)\qquad \vec{\gamma} = 0, \qquad \varepsilon = 0.$$

D'après la définition (9.6), on voit que (9.9) signifie : *absence complète de charge et de courant.*

Donc, un champ déterminé par une charge ponctuelle qui se meut arbitrairement ne correspond pas à une première variation nulle de I. En fait, cette intégrale I ne permet l'existence d'aucune charge ponctuelle; pour qu'elle puisse le faire il faut corriger l'énoncé du principe de variation, en ajoutant à l'intégrale primitive une autre prise sur la ligne d'univers de la singularité. Le temps propre de la ligne d'univers étant $d\tau = \sqrt{1 - v^2}\, dt_0$, on aura

$$(9.10)\qquad I = \int \mathfrak{L}\, dx + e \int u^k \varphi_k\, d\tau.$$

Dans cette expression, la constante e représente la charge de la singularité, u^k le vecteur d'univers de la vitesse, lequel est relié au vecteur ordinaire par les relations

$$(9.11)\qquad (u^1, u^2, u^3) = \frac{\vec{v}}{\sqrt{1-v^2}}, \qquad u^4 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}.$$

L'intégrale de ligne peut également s'écrire

$$(9.12)\qquad \int u^k \varphi_k \, d\tau = \int \left(\vec{v}\vec{a} + \varphi\right) dt_0.$$

En variant $\vec{a}$ et φ dans cette nouvelle intégrale, on constate que les conditions aux limites naturelles (9.9) doivent être remplacées par les suivantes :

$$(9.13)\qquad \gamma \equiv \int_0 \left(\vec{\mathfrak{H}} \times \vec{n}\right) d\sigma = e\vec{v}, \qquad \varepsilon \equiv \int_0 \vec{\mathfrak{D}}\vec{n} \, d\sigma = e,$$

tandis que les deux premières conditions (9.8), ainsi que les équations du champ, ne changent pas.

Nous devons donc considérer (9.10) comme l'expression exacte de l'intégrale qu'on doit varier; (9.13) exprime que la charge engendre le champ; (9.8) représente les conditions de l'équilibre dynamique, desquelles on peut déduire les équations du mouvement [1].

Évidemment, nous faisons une nouvelle hypothèse lorsque nous admettons que (9.8) reste la même que précédemment et ne doit pas être modifiée. Cette hypothèse revient à admettre qu'il n'existe *pas de masse concentrée en un point*, mais que toute masse est d'origine électromagnétique et, comme telle, distribuée sur le champ qui entoure la charge.

La découverte du neutron (et l'existence du neutrino, si elle se confirme) ont mis en doute l'exactitude de cette supposition. Cependant le problème essentiel pour nous n'est pas la question de l'origine électromagnétique de la masse, mais celui de l'élimination des masses

---

[1] Pryce a démontré qu'en se servant du principe de variation dual (6.8) et en remplaçant les conditions d'intégrabilité (6.10) par

$$\frac{\partial p^{ik}}{\partial x^k} = j^i,$$

où j^i désigne le vecteur densite charge-courant, on obtient non seulement les mêmes équations de champs (6.9), mais aussi les conditions (9.13) d'équilibre dynamique [3].

infinies qui découlent de la théorie de Maxwell. Nous estimons que ce problème est complètement résolu par les considérations exposées dans les paragraphes précédents et par la déduction des lois du mouvement que nous venons de donner. Dans ces dernières toute masse a une origine électromagnétique; s'il en existait une autre supplémentaire, il suffirait simplement de l'ajouter à la précédente. Personnellement, je crois que la conception suivant laquelle la masse représente l'énergie propre du champ d'une singularité sera conservée, même si l'on devait abandonner la théorie électromagnétique actuelle en faveur d'une autre théorie plus satisfaisante (par exemple en faveur de la théorie basée sur l'hypothèse du neutrino, suggérée par de Broglie [4] et développée par Jordan et Kronig [5]).

Arrivés à ce point nous devons discuter avec plus de détail l'influence de la gravitation sur les phénomènes électromagnétiques.

B. Hoffmann [6] a résolu le système d'équations simultanées (3.5), (3.13) et (3.15) de la gravitation et de l'électromagnétisme, dans le cas d'un champ à symétrie sphérique et avec une fonction L de la forme (7.1) ou (8.1). Les calculs sont trop longs pour que nous puissions les reproduire ici; nous nous contenterons d'en donner les résultats en les simplifiant d'ailleurs en certains points peu importants. Hoffmann tient compte du terme cosmologique dans les équations de la gravitation et admet l'existence de pôles magnétiques coïncidant avec les charges électriques ponctuelles; nous laisserons de côté, dans les équations, les termes correspondant à ces hypothèses.

On peut montrer qu'il existe un système de coordonnées dans lequel l'élément de ligne d'univers a la forme suivante

$$ds^2 = \mathrm{A}\, dt^2 - \mathrm{A}^{-1}\, dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2), \tag{9.14}$$

et dans lequel le champ électromagnétique d'une charge ponctuelle est exactement le même que celui donné au paragraphe 7. Cela revient à dire qu'en choisissant convenablement le système de coordonnées, la gravitation n'a absolument aucune influence sur le champ électromagnétique d'une particule au repos. Ce résultat n'a rien de surprenant si l'on se rappelle que les équations de champ ont la forme des équations de Maxwell généralisées [*cf.* § 5, (5.4)] *dans n'importe quel système de coordonnées*, pourvu qu'on considère $(\vec{\mathrm{E}}, \vec{\mathrm{B}})$ comme un tenseur et $(\vec{\mathfrak{D}}, \vec{\mathfrak{H}})$ comme une densité tensorielle.

La grandeur A, potentiel gravifique d'Einstein, est donnée par

$$A(r) = 1 - \frac{2}{r}[m_0 + m(r)], \tag{9.15}$$

où m_0 est une constante d'intégration, et

$$m(r) = 4\pi \int_0^r U r^2 \, dr \tag{9.16}$$

représente la fraction de l'énergie électromagnétique comprise à l'intérieur d'une sphère de rayon r; pour le lagrangien (7.1), elle est égale à

$$4\pi \int_0^r U r^2 \, dr = 4\pi \left(\frac{e}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{r_0} \int_0^{\frac{r}{r_0}} (\sqrt{1+x^2} - x^2) \, dx, \tag{9.17}$$

cette expression est proportionnelle à r pour r petit; donc sa contribution $\frac{m(r)}{r}$ au potentiel A reste finie pour $r \to 0$.

Pour une charge nulle, $m(r) = 0$, on a le ds bien connu de Schwarzschild, avec $A = 1 - \frac{2m_0}{r}$ qui devient infini pour $r = 0$. m_0 représente la masse gravifique de la sphère non chargée, ce qui signifie que les géodésiques de l'espace défini par le ds précédent coïncident approximativement avec les trajectoires d'un corps attiré par un point de masse m_0 et se mouvant suivant la loi de Newton.

Limitons maintenant le mouvement du corps d'épreuve à une région telle que la distance r au centre de notre particule soit grande par rapport à r_0; dans ce cas, la formule (9.15) nous apprend que la charge de la particule contribue à augmenter la masse gravifique d'une quantité $m(\infty) = m$, égale à l'énergie électromagnétique totale que nous avions appelée jusqu'ici E_0. La masse effective décroît exactement comme dans la théorie de Newton lorsque le corps d'épreuve s'approche du centre de la particule : la densité d'énergie répartie sur une couche sphérique ne contribue en rien à l'action gravifique sur les points qui se trouvent à l'intérieur.

Le postulat, d'après lequel les coefficients g_{kl} de l'intervalle d'univers élémentaire restent finis tout comme le champ électromagnétique f_{kl}, conduit à la condition $m_0 = 0$. La masse est alors strictement de nature électromagnétique, mais en même temps elle constitue la masse gravifique, dans le sens qui a été analysé plus haut.

Le centre de la particule n'est pas un point régulier, même si $m_0 = 0$; en effet, la limite

$$\lim_{r=0} \frac{m(r)}{r} = 4\pi \left(\frac{e}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{r_0^2} \tag{9.18}$$

est finie. La longueur de la circonférence de rayon 1 et centrée sur la particule, n'est donc pas égale à 2π, mais à $\frac{2\pi}{A}$; la géométrie au centre de la particule n'est donc pas euclidienne.

Cet inconvénient peut être évité par l'emploi de l'hamiltonien (8.13) de Infeld, dont le champ est partout continu. Infeld et Hoffmann ont calculé [7] le champ, simultanément électromagnétique et gravifique, qui lui correspond. Le résultat est le même que précédemment : il existe un système de coordonnées dans lequel l'expression de tout champ électrostatique à symétrie sphérique est la même, aussi bien en présence qu'en l'absence de gravitation; l'intervalle d'univers a la forme (9.14) avec (9.15) et (9.16). Si les forces gravifiques doivent être finies, $m_0 = 0$, elles seront également continues; la valeur de $m(r)$ est

$$m(r) = 4\pi \left(\frac{e}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{r_0} \frac{1}{2} \int_0^{\left(\frac{r}{r_0}\right)} x^2 \log\left(1 + \frac{1}{x^4}\right) dx, \tag{9.19}$$

et tend vers zéro pour $r \to 0$. Donc $A \to 1$ pour $r \to 0$, et la géométrie au voisinage du centre est euclidienne.

Nous pouvons résumer les résultats ci-dessus en disant qu'ils nous confirment dans l'opinion que la gravitation n'a rien à faire avec la structure et la cohésion des particules élémentaires. Les équations gravifiques d'Einstein peuvent être combinées avec les équations électromagnétiques sans les altérer. Ce résultat est très satisfaisant si l'on réfléchit que la théorie d'Einstein a un caractère plutôt formel, puisqu'elle ajoute simplement le terme de courbure au lagrangien électromagnétique et qu'elle n'explique pas la constante de gravitation. Ce dernier problème ne pourra avoir sa solution que plus tard. L'importance du postulat d'invariance générale d'Einstein pour la théorie du champ électromagnétique ne réside pas dans le lien qu'il établit avec la gravitation; elle apparaît plutôt dans les conséquences suivantes qui ont été exposées au paragraphe 5 :

1° les dérivées du lagrangien par rapport aux g_{ik} sont les composantes du tenseur d'énergie, lequel est par conséquent symétrique;

2° les dérivées des potentiels n'apparaissent que dans les combinaisons antisymétriques f_{ik}.

10. Équations du mouvement [1]. — Les conditions aux limites naturelles (9.8) nous donnent la possibilité d'intégrer les lois de conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement (5.14) sur un domaine à trois dimensions quelconque, sans tenir compte des singularités. En intégrant sur tout l'espace on obtient

$$(10.1)\qquad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_\infty \vec{X}\vec{n}\,d\sigma + \frac{dG_x}{dt} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \displaystyle\int_\infty \vec{S}\vec{n}\,d\sigma + \frac{dE}{dt} = 0, \end{array}\right.$$

où le symbole ∞ en bas du signe $\int$ indique une surface fermée située à l'infini, et où

$$(10.2)\qquad \vec{G} = \int \vec{S}\,dv, \qquad E = \int U\,dv$$

sont respectivement la *quantité de mouvement et l'énergie totales.*

On peut établir les équations du mouvement dans le cas où le champ extérieur ne varie pas sensiblement sur une distance grande par rapport au rayon de l'électron.

Il suffit de traiter le cas où à l'infini le champ *total* se réduit à un champ constant, lequel représente le champ *extérieur* dans le voisinage de l'électron.

Dans ce qui va suivre nous emploierons un système de Lorentz; donc nous ne distinguerons plus entre des vecteurs et des vecteurs densités. Il est commode de prendre $\vec{D}$ et $\vec{B}$ comme variables indépendantes.

Appelons $\vec{D}^{(e)}$, $\vec{B}^{(e)}$ le champ « extérieur » constant et $\vec{D}^{(i)}$, $\vec{B}^{(i)}$ le champ « intérieur » ou propre de l'électron. On a

$$(10.3)\qquad \lim_\infty \vec{D}^{(i)} = 0, \qquad \lim_\infty \vec{B}^{(i)} = 0$$

et le champ total est

$$(10.4)\qquad \vec{D} = \vec{D}^{(i)} + \vec{D}^{(e)}, \qquad \vec{B} = \vec{B}^{(i)} + \vec{B}^{(e)}.$$

Définissons le champ $\vec{E}^{(e)}$, $\vec{H}^{(e)}$ par

$$(10.5)\qquad \vec{E}^{(e)} = \left(\frac{\partial U}{\partial \vec{D}}\right)_e, \qquad \vec{H}^{(e)} = \left(\frac{\partial U}{\partial \vec{B}}\right)_e,$$

où l'indice e précise que les variables des fonctions considérées sont $\vec{D}^{(e)}$ et $\vec{B}^{(e)}$.

On peut alors séparer ce champ total $\vec{E}$, $\vec{H}$ en un champ extérieur $\vec{E}^{(e)}$, $\vec{H}^{(e)}$ et un champ intérieur $\vec{E}^{(i)}$, $\vec{H}^{(i)}$

$$\vec{E} = \vec{E}^{(e)} + \vec{E}^{(i)}, \qquad \vec{H} = \vec{H}^{(e)} + \vec{H}^{(i)}; \tag{10.6}$$

les $\vec{E}^{(i)}$, $\vec{H}^{(i)}$ dépendent non seulement des $\vec{D}^{(i)}$, $\vec{B}^{(i)}$ mais aussi de $\vec{D}^{(e)}$, $\vec{B}^{(e)}$, mais on a, en tout cas,

$$\lim_{\infty} \vec{E}^{(i)} = 0, \qquad \lim_{\infty} \vec{H}^{(i)} = 0.$$

Le champ intérieur ne diffère du champ extérieur que par un champ constant; il satisfait donc aux équations fondamentales; de plus il satisfait aux conditions (9.8) et (9.13) au point où se trouve la charge, puisque toutes les intégrales de surface s'annulent pour un champ constant.

On trouve pour le vecteur de Poynting

$$\vec{S} = \vec{S}^{(e)} + \left(\vec{D}^{(e)} \times \vec{B}^{(i)}\right) + \left(\vec{D}^{(i)} \times \vec{B}^{(e)}\right) + \vec{S}^{(i)}, \tag{10.7}$$

où $\vec{S}^{(i)} = \left(\vec{D}^{(i)} \times \vec{B}^{(i)}\right)$ est le vecteur de Poynting interne et $\vec{S}^{(e)}$ une constante qui peut être laissée de côté; en effet, elle ne fournit qu'un terme constant dans l'expression de la quantité de mouvement et celui-ci n'altère pas (10.1). Nous aurons donc

$$\vec{G} = \vec{G}^{(i)} + \left(\vec{D}^{(e)} \times \int \vec{B}^{(i)}\, dv\right) - \left(\vec{B}^{(e)} \times \int \vec{D}^{(i)}\, dv\right). \tag{10.8}$$

La dérivée de l'énergie par rapport au temps est

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\int U\, dv &= \int \left(\frac{\partial U}{\partial \vec{B}}\, \dot{\vec{B}} + \frac{\partial U}{\partial \vec{D}}\, \dot{\vec{D}}\right) dv \\ &= \int \left(\vec{H}\, \dot{\vec{B}} + \vec{E}\, \dot{\vec{D}}\right) dv, \end{aligned}$$

en vertu de (6.14). En y substituant (10.4) et (10.6), on obtient

$$\frac{dE}{dt} = \int \left(\vec{H}^{(e)}\, \dot{\vec{B}}^{(i)} + \vec{E}^{(e)}\, \dot{\vec{D}}^{(i)} + \vec{H}^{(i)}\, \dot{\vec{B}}^{(i)} + \vec{E}^{(i)}\, \dot{\vec{D}}^{(i)}\right) dv. \tag{10.9}$$

Définissons maintenant l'énergie interne par

$$E^{(i)} = \int dt \int \left(\vec{H}^{(i)}\, \dot{\vec{B}}^{(i)} + \vec{E}^{(i)}\, \dot{\vec{D}}^{(i)}\right) dv, \tag{10.10}$$

laquelle dépend du mouvement de la charge et du champ extérieur. Si ce dernier est faible, elle tend vers la valeur d'équilibre,

$$(10.10a)\qquad E^{(i)} = \int U\left(\vec{B}^{(i)}, \vec{D}^{(i)}\right) dv.$$

Alors on peut écrire (10.9) et la dérivée de (10.8) par rapport au temps sous la forme suivante :

$$(10.11)\qquad \begin{cases} \dfrac{dE}{dt} = \dfrac{dE^{(i)}}{dt} + \vec{H}^{(e)} \displaystyle\int \dot{\vec{B}}^{(i)}\, dv + \vec{E}^{(e)} \int \dot{\vec{D}}^{(i)}\, dv, \\ \dfrac{d\vec{G}}{dt} = \dfrac{d\vec{G}^{(i)}}{dt} + \left(\vec{D}^{(e)} \times \displaystyle\int \dot{\vec{B}}^{(i)}\, dv\right) - \left(\vec{B}^{(e)} \times \int \dot{\vec{D}}^{(i)}\, dv\right). \end{cases}$$

Calculons maintenant les intégrales de surface de (10.1). Les quantités sous le signe $\int$ peuvent être développées suivant $\vec{D}^{(i)}$, $\vec{B}^{(i)}$ ou $\vec{E}^{(i)}$, $\vec{H}^{(i)}$, puisque ces dernières sont très petites, par rapport au champ extérieur, sur une surface quelle qu'elle soit, située suffisamment loin.

Les composantes du vecteur $\vec{X}$ peuvent s'écrire [*cf.* (5.12)] :

$$(10.12)\qquad \begin{cases} X_x = H_y B_y + H_z B_z + D_y E_y + D_z E_z - U, \\ X_y = -H_x B_y - E_x D_y, \\ X_z = -H_x B_z - E_x D_z. \end{cases}$$

Substituons dans ces formules (10.4) et (10.6) et négligeons les termes du second ordre ; en tenant compte de (6.14 *a*) on obtient de nouveau, aisément,

$$(10.13)\qquad \begin{aligned} \left(\vec{X}\vec{n}\right) = {} & \left(\vec{X}^{(e)}\vec{n}\right) + \vec{H}_x^{(e)}\left(\vec{B}^{(i)}\vec{n}\right) - \vec{E}_x^{(e)}\left(\vec{D}^{(i)}\vec{n}\right) \\ & + \left[\vec{B}^{(e)} \times \left(\vec{n} \times \vec{H}^{(i)}\right)\right]_x + \left[\vec{D}^{(e)} \times \left(\vec{n} \times \vec{E}^{(i)}\right)\right]_x. \end{aligned}$$

Pour $\vec{S}$ on obtient, en employant l'expression $\left(\vec{E} \times \vec{H}\right)$,

$$(10.14)\qquad \left(\vec{S}\vec{n}\right) = \left(\vec{S}^{(e)}\vec{n}\right) + \vec{E}^{(e)}\left(\vec{H}^{(i)} \times \vec{n}\right) - \vec{H}^{(e)}\left(\vec{E}^{(i)} \times \vec{n}\right).$$

Considérons maintenant les équations du champ interne

$$\operatorname{rot} \vec{H}^{(i)} - \dot{\vec{D}}^{(i)} = 0, \qquad \operatorname{div} \vec{D}^{(i)} = 0,$$
$$\operatorname{rot} \vec{E}^{(i)} + \dot{\vec{B}}^{(i)} = 0, \qquad \operatorname{div} \vec{B}^{(i)} = 0,$$

et intégrons-les dans tout l'espace, à l'exclusion d'une petite sphère ayant la charge comme centre. Les valeurs des intégrales de surface

correspondantes sont données par (9.13); on obtient

$$(10.15)\quad \begin{cases} \int_\infty \left(\vec{n}\times\vec{H}^{(i)}\right) d\sigma = e\vec{v} + \int_\infty \dot{\vec{D}}^{(i)}\, dv, & \int_\infty \vec{n}\vec{D}^{(i)}\, d\sigma = e, \\ \int_\infty \left(\vec{n}\times\vec{E}^{(i)}\right) d\sigma = \quad -\int_\infty \dot{\vec{B}}^{(i)}\, dv, & \int_\infty \vec{n}\vec{B}^{(i)}\, d\sigma = 0. \end{cases}$$

Intégrons maintenant (10.13) sur une surface située à l'infini; les termes constants ne donnent rien et nous trouvons, en tenant compte de (10.15),

$$(10.16)\quad \begin{cases} \int_\infty \left(\vec{X}\vec{n}\right) d\sigma = -e\left[E_x^{(e)} + \left(\vec{v}\times\vec{B}^{(e)}\right)_x\right] \\ \qquad\qquad + \left(\vec{B}^{(e)}\times\int \dot{\vec{D}}^{(i)}\, dv\right)_x - \left(\vec{D}^{(e)}\times\int \dot{\vec{B}}^{(i)}\, dv\right)_x, \\ \int_\infty \left(\vec{S}\vec{n}\right) d\sigma = -e\vec{v}\vec{E}^{(e)} \\ \qquad\qquad - \vec{E}^{(e)}\int \dot{\vec{D}}^{(i)}\, dv - \vec{H}^{(e)}\int \dot{\vec{B}}^{(i)}\, dv. \end{cases}$$

En substituant (10.11) et (10.16) dans (10.1) on voit que tous les termes contenant des intégrales de volumes sont égaux deux à deux et de signes contraires et par conséquent disparaissent. Le résultat final est

$$(10.17)\quad \begin{cases} \dfrac{d\vec{G}^{(i)}}{dt} = e\left[\vec{E}^{(e)} + \left(\vec{v}\times\vec{B}^{(e)}\right)\right], \\ \dfrac{dE^{(i)}}{dt} = e\vec{v}\vec{E}^{(e)}. \end{cases}$$

Ces équations sont les *équations de mouvement bien connues de la théorie des électrons de Lorentz*, si l'on y remplace $\vec{E}^{(i)}$, $\vec{G}^{(i)}$ par les valeurs correspondantes pour le mouvement stationnaire donné par (6.34). Le système (10.17) reste cependant valable même si le mouvement ne peut plus être considéré comme quasi-stationnaire; dans ce cas, il faut corriger les valeurs de $\vec{G}^{(i)}$ et $\vec{E}^{(i)}$ pour tenir compte des ondes émises. Feenberg a calculé les approximations d'ordre supérieur et a montré que les termes correctifs du premier ordre correspondent exactement à la réaction de rayonnement classique bien connue.

J'ai essayé de généraliser ces formules dans un autre sens, en admettant que la particule possède non seulement une charge ponctuelle, mais aussi un dipôle magnétique (et électrique) [2]. Les deux moments correspondants sont reliés au champ par des formules analogues aux condi-

tions (9.13) dans lesquels le rayon vecteur apparaît sous les intégrales prises sur les sphères infiniment petites considérées, par exemple

$$\int_0 \vec{r}\left(\vec{n}\vec{D}\right) d\sigma = e\vec{r}_0 + \vec{p},$$

où $\vec{r}_0(t)$ est le rayon vecteur de la singularité et $\vec{p}$ le moment électrique. Cette méthode fournit des équations de mouvement supplémentaires reliant le moment angulaire $\vec{M}$ et le centre d'énergie électrique $\vec{P}$ du champ, aux moments $\vec{m}$, $\vec{p}$ du dipôle : magnétique et électrique,

$$(10.18)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\vec{M}^{(i)}}{dt} &= \left(\vec{B}^{(e)} \times \vec{m}\right) - \left(\vec{E}^{(e)} \times \vec{p}\right), \\ \frac{d\vec{P}^{(i)}}{dt} &= \left(\vec{E}^{(e)} \times \vec{m}\right) + \left(\vec{B}^{(e)} \times \vec{p}\right). \end{aligned}\right.$$

Kramers [3] a postulé l'existence des mêmes équations en se plaçant à un point de vue purement descriptif; il a admis de plus que le tenseur antisymétrique $\left(\vec{M}^{(i)}, \vec{P}^{(i)}\right)$ était proportionnel au tenseur $\left(\vec{m}, \vec{p}\right)$ et il a pu démontrer que cette hypothèse conduisait au résultat suivant : *si la particule au repos a un moment magnétique m_0 et un moment électrique nul, le rapport* $\frac{m_0}{M_0^{(i)}}$ du moment magnétique au moment angulaire *sera égal à* $\frac{e}{c\mu_0}$, *où μ_0 est la masse au repos;* cette valeur est le double de la valeur du rapport analogue pour le mouvement orbital de l'électron. Ce résultat lui avait semblé fournir une base suffisante pour développer une théorie classique de l'électron tournant.

Il ne m'est pas possible de discuter ici ce dernier point. Les équations (10.18) sont peut-être correctes, mais la manière dont je les ai obtenues moi-même de la théorie non-linéaire du champ n'est pas défendable. La raison en est simple : *il est impossible de choisir et d'employer des types quelconques de singularités*. Nous avons vu au paragraphe 9 qu'en chaque singularité il faut satisfaire à certaines conditions aux limites « naturelles » et non pas à des conditions qu'on impose arbitrairement.

Pour toute théorie de champ du type considéré, ces conditions ont la forme (9.13), c'est-à-dire sont compatibles uniquement avec l'existence d'une charge ponctuelle. On ne peut pas admettre l'existence d'un moment ponctuel supplémentaire (électrique ou magnétique ou des deux sortes) sans modifier radicalement la structure de la théorie, équations du champ comprises. L'existence expérimentalement prouvée du spin

indique que de pareilles modifications sont devenues nécessaires. Je n'ai fait jusqu'à présent aucune tentative dans ce sens, parce que le succès me semble douteux tant qu'on restera dans le cadre de la théorie classique, sans introduire des considérations de quanta.

Nous arrêterons ici cet exposé du traitement classique de l'électrodynamique non-linéaire ; rappelons-en brièvement les résultats :

Il est possible de généraliser les équations de Maxwell de manière à rendre finie l'énergie propre d'une charge ponctuelle. Il existe cependant une infinité de généralisations possibles remplissant cette condition, chacune conduisant à une autre « structure » de l'électron et à d'autres facteurs numériques. Les deux lois fondamentales de la théorie classique de l'électron, à savoir les équations de Maxwell pour le champ « extérieur » à l'électron et l'expression de la force de Lorentz produite par un champ extérieur, sont valables en tout cas [4]. L'électrodynamique non-linéaire n'altère donc en aucune manière les caractéristiques essentielles des anciennes théories, tout en les débarrassant de leur « point noir », l'énergie propre infinie, et permettant l'introduction de l'hypothèse d'une masse purement électromagnétique. Elle ne donne cependant aucune indication sur la structure effective de l'électron : le « point noir » s'est transformé en un « point d'interrogation ».

Le problème qui se pose maintenant est de savoir si l'on peut répondre en utilisant la théorie des quanta.

CHAPITRE II.
THÉORIE QUANTIQUE.

11. Dynamique quantique des milieux continus. — La « quantification » de l'électrodynamique est aussi ancienne que la théorie quantique elle-même; en effet, l'idée de quantum est apparue pour la première fois dans la théorie de rayonnement de Planck. c'est-à-dire dans la théorie statistique des ondes électromagnétiques.

Entre 1900 et 1906, pendant la première période du développement de la théorie des quanta, on ne se rendait pas compte exactement si le quantum correspondait à une propriété reliée à l'échange d'énergie entre la matière et le rayonnement ou à une caractéristique du rayonnement électromagnétique lui-même. Le pas décisif vers cette seconde

hypothèse fut fait par Einstein qui donna une explication du phénomène photoélectrique basée sur la conception des *quanta de lumière* ou *photons* et fournit ultérieurement des arguments en faveur de l'existence de ces derniers, tirés de l'analyse des fluctuations de l'énergie du rayonnement. L'étape suivante fut franchie par Debye, lequel déduisit la formule de Planck par des raisonnements purement électromagnétiques, ne faisant appel ni à l'électron ni à l'atome; son procédé constituait au fond une « quantification » de la méthode par laquelle Rayleigh et Jeans avaient trouvé leur loi de rayonnement. On développait le champ de rayonnement en série de Fourier et l'on considérait chacun de ces termes comme un oscillateur obéissant à la loi de quanta de Planck. Cette méthode constitue le point de départ de toutes les améliorations apportées ultérieurement à la théorie quantique des champs de rayonnement; nous nous bornerons ici à en mentionner quelques-uns seulement.

La quantification du champ de Debye fournissait bien la valeur de l'énergie moyenne (formule de Planck), mais ne rendait pas compte des fluctuations d'énergie. Einstein montra qu'on peut calculer les fluctuations pour un système quelconque au moyen d'une formule générale de la mécanique statistique de Gibbs, pourvu qu'on connaisse l'expression de l'énergie totale du système en fonction de la température. L'application de cette méthode à la formule de Planck fournissait un résultat, qui était en contradiction flagrante avec celui obtenu directement au moyen de la théorie classique de la lumière; un nouveau terme apparaissait qu'Einstein interpréta comme une preuve de l'existence de quanta de lumières corpusculaires.

Ce désaccord fut éliminé par la découverte de la mécanique quantique. Dans notre premier travail sur la mécanique des matrices, Heisenberg, Jordan et moi-même [1] avons traité ce problème et trouvé une formule qui concorde avec la formule statistique d'Einstein. Plus tard, Heisenberg [2] a critiqué la déduction de cette formule à cause d'un terme infini qu'on rencontre en cours de route, et a montré comment il fallait s'y prendre pour l'éviter : il suffit de supposer que la cavité dans laquelle on calcule les fluctuations d'énergie n'a pas de frontières parfaitement bien définies, mais qu'il subsiste une certaine incertitude quant à leur position dans l'espace. Avec cette correction, intimement reliée aux conditions générales d'incertitude de la mécanique quantique, on obtient un accord complet entre les résultats de la

thermodynamique statistique et ceux de la théorie quantique des ondes.

Un grand pas en avant a été fait par Dirac, qui a appliqué systématiquement les règles de quanta au système « rayonnement + particules matérielles », et a pu obtenir les formules bien connues d'Einstein donnant la probabilité d'émission et d'absorption d'un atome dans un champ de rayonnement. Ces formules sont l'équivalent quantique des lois classiques d'émission et absorption utilisées au début par Planck; elles conduisent directement à la formule de celui-ci sans rencontrer les obstacles auxquels on se heurtait dans la théorie initiale, laquelle était au fond un mélange de considérations quantiques et classiques qui, strictement parlant, se contredisaient les unes les autres.

En fait, la théorie de Dirac nous apporte beaucoup plus que cela, à savoir une théorie complète de l'émission, de l'absorption, de la dispersion, de la diffusion de la lumière par des électrons ou atomes (effets de Rayleigh, Raman, Compton) et enfin de la largeur naturelle des raies spectrales (Weisskopf, Wigner, Fermi). Cependant, cette théorie admirable [3], qui rend compte d'un très grand nombre de phénomènes, rencontre de sérieux obstacles. La méthode de Dirac consiste à considérer les forces de couplage entre matière et rayonnement comme des petites perturbations des systèmes non couplés, l'atome et le champ. La première approximation fournit des résultats raisonnables, confirmés par l'expérience, mais la seconde et les approximations d'ordre supérieur conduisent à des intégrales divergentes. Celles-ci sont reliées au nombre de fréquences différentes d'un champ de rayonnement, présentes dans un intervalle de fréquence donné, et sont analogues à l'énergie propre infinie de ce champ. L'analogie ne va cependant pas loin : tandis que l'énergie au zéro absolu se présente comme une constante et peut être simplement omise, dans les calculs, les infinis d'ordre supérieur semblent inévitables.

La tentative la plus générale d'établir une théorie quantique des champs d'ondes en accord avec le principe d'invariance relativiste, a été faite par Heisenberg et Pauli [4]. Elle constitue une généralisation systématique de la théorie classique que nous avons exposée au paragraphe 1, et contient, comme cas particuliers toutes les théories antérieures, y compris celle de Dirac. Elle fournit également une méthode appropriée pour la quantification des électrodynamiques non-linéaires; cette quantification a été effectuée par Infeld et moi-même dans le cas

d'un champ de rayonnement pur [5], et par Pryce dans le cas de champs contenant des charges ponctuelles [6].

Le problème qui nous intéresse ici est uniquement celui de la masse électromagnétique, et pour ce problème tous les efforts accomplis n'ont donné que des résultats peu satisfaisants. Les équations non-linéaires, qui s'étaient avérées si utiles pour rendre finie l'énergie propre classique d'un électron, n'ont pas réussi à atteindre le même but en théorie quantique. En tout cas, il a été impossible de démontrer si ce but était atteint ou non, les équations étant trop compliquées pour être résolues même dans le cas le plus simple.

Pour ces raisons je ne reproduirai pas ici cette théorie, d'ailleurs assez étendue, mais je me bornerai à de brèves indications concernant ses principales caractéristiques.

L'application des principes de la théorie des quanta à un système dépend en premier lieu de la possibilité d'exprimer ses lois dans le schéma de la dynamique hamiltonienne, pour laquelle nous connaissons des règles qui permettent de passer d'une loi classique à la loi quantique correspondante.

Le principe de variation que nous avions pris comme point de départ au paragraphe 1 ne nous est donc plus d'aucune utilité.

Dans le mécanisme du point, on peut remplacer le lagrangien par une autre fonction fondamentale, appelée l'hamiltonien et qui représente l'énergie du point matériel considéré; dans la dynamique des milieux continus il n'existe pas cependant de relation simple et unique de ce type qui nous permette de procéder d'une façon analogue à la précédente. Par exemple, en électrodynamique, la fonction H que nous avons appelée l' « hamiltonien » ne représente nullement l'énergie du champ et ni même la densité d'énergie. Si nous voulons appliquer les règles habituelles de quantification nous devons employer comme fonction fondamentale l'énergie totale, qui est l'intégrale d'espace de la composante 44 d'un tenseur du second rang. Cela signifie que nous sommes contraints d'abandonner la symétrie des formules par rapport à x^1, x^2, x^3, x^4 ainsi que l'emploi du calcul tensoriel. Dans ces conditions, l'invariance relativiste n'est plus immédiate et il faut la démontrer séparément (1).

(1) Un procédé invariant, qui évite ces difficultés et rend évidente l'invariance relativiste, a été donné par Weiss [7].

Dans ce qui suit nous traiterons donc à part la coordonnée $x^4 = t$ et nous entendrons par l'expression « un point x », un point dans l'espace ordinaire à trois dimensions

$$(x^1, x^2, x^3) = (x, y, z).$$

Considérons le milieu continu envisagé comme la limite d'un système discontinu. Pour cela, divisons l'espace à trois dimensions tout entier en cellules identiques $\Delta x = \Delta x^1 \Delta^2 \Delta x^3$ que nous numérotons par trois nombres entiers l_1, l_2, l_3. Remplaçons toute fonction continue z^α par une fonction discontinue ayant dans la cellule $l(l_1, l_2, l_3)$ la valeur constante z_l^α. Les dérivées d'espace $z_k^\alpha = \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^k}$ seront remplacées par des quotients de différences

$$\frac{\Delta z^\alpha}{\Delta x^k} = \frac{z_{l+1}^\alpha - z_l^\alpha}{\Delta x^k},$$

où $l+1$ représente la cellule voisine dans la direction $x^k (k = 1, 2, 3)$.

Désignons la dérivée par rapport an temps, z_4^α par $\dot{z}^\alpha$. L'intégrale (1.4) est remplacée par la somme

$$\overline{\mathcal{L}} = \sum_l \mathcal{L}\left(z_l^\alpha, \frac{z_{l+1}^\alpha - z_l^\alpha}{\Delta x}, \dot{z}_l^\alpha\right) \Delta x = \sum_l \mathcal{L}_l \Delta x \tag{11.1}$$

prise sur les cellules, et la fonction $\overline{\mathcal{L}}$ est considérée comme le lagrangien d'un système mécanique ayant pour variables les z_l^α. Les moments sont :

$$p_{\alpha l} = \frac{\partial \overline{\mathcal{L}}}{\partial \dot{z}_l^\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}_l}{\partial \dot{z}_l^\alpha} \Delta x = \mathrm{P}_{\alpha l} \Delta x, \tag{11.2}$$

où

$$\mathrm{P}_{\alpha l} = \frac{\partial \mathcal{L}_l}{\partial \dot{z}_l^\alpha} \to \mathrm{P}_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}^\alpha}. \tag{11.3}$$

z_l^α apparaît non seulement dans le terme l de la somme (11.1), mais aussi dans les termes voisins $l+1$; pour cette raison, on a

$$\frac{1}{\Delta x} \frac{\partial \overline{\mathcal{L}}}{\partial z_l^\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}_l}{\partial z_l^\alpha} - \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_l^\alpha}\right)_l - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_l^\alpha}\right)_{l-1}\right] \frac{1}{\Delta x^1} - \ldots ;$$

à la limite $\Delta x \to 0$

$$\lim \frac{1}{\Delta x} \frac{\partial \overline{\mathcal{L}}}{\partial z_l^\alpha} \to \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z^\alpha} - \sum_{k=1,2,3} \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_k^\alpha}\right) = \frac{\delta \overline{\mathcal{L}}}{\delta z^\alpha}. \tag{11.4}$$

Cette formule montre que le processus de dérivation de la fonction

discontinue envisagée fournit à la limite « la dérivée fonctionnelle » qui apparaît dans l'équation d'Euler du système continu (2.1).

Les équations du mouvement de Lagrange, de (11.1) à savoir :

$$\frac{d}{dt} p_{\alpha l} - \frac{\partial \overline{\mathcal{L}}}{\partial z_l^\alpha} = 0 \tag{11.5}$$

sont également équivalentes aux équations d'Euler (2.1); en effet, on peut les écrire sous la forme ci-dessous, lorsqu'on tient compte de (11.3) et (11.4)

$$\dot{P}_\alpha + \sum_{k=1,2,3} \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_k^\alpha}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z^\alpha} = \sum_{k=1,\ldots,4} \frac{\partial}{\partial x^k} \mathcal{L}_{z_k^\alpha} - \mathcal{L}_{z^\alpha} = 0. \tag{11.6}$$

Nous pouvons maintenant passer à la forme hamiltonienne de la dynamique en définissant l'énergie totale, ou l'hamiltonien par

$$\overline{H} = \sum_l p_{\alpha l} \dot{z}_l^\alpha - \overline{\mathcal{L}} = \sum_l (P_{\alpha l} \dot{z}_l^\alpha - \mathcal{L}_l)\,\Delta x \to \int (P_\alpha \dot{z}_\alpha - \mathcal{L})\, dx. \tag{11.7}$$

La variation totale de $\overline{H}$ est

$$\delta \overline{H} = \sum_l (p_{\alpha l}\, \delta \dot{z}_l^\alpha + \dot{z}_l^\alpha\, \delta p_{\alpha l} - \delta \mathcal{L}_l)\,\Delta x$$

où

$$\delta \mathcal{L}_l = \frac{\partial \mathcal{L}}{\delta z_l^\alpha}\, \delta z_l^\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_l^\alpha}\, \delta \dot{z}_l^\alpha.$$

Donc, en vertu de (11.2) et (11.3),

$$\delta \overline{H} = \sum_l \left(-\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta z_l^\alpha}\, \delta z_l^\alpha + \dot{z}_l^\alpha\, \delta P_\alpha\right) \Delta x$$

ou

$$\frac{\delta \overline{H}}{\delta z^\alpha} = -\frac{\delta \overline{\mathcal{L}}}{\partial z^\alpha}, \qquad \frac{\delta \overline{H}}{\delta P^\alpha} = \dot{z}^\alpha. \tag{11.8}$$

En combinant ces équations avec (11.6) on obtient les équations canoniques

$$\dot{z}^\alpha = \frac{\delta \overline{H}}{\delta P^\alpha}, \qquad \dot{P}_\alpha = -\frac{\delta \overline{H}}{\delta z^\alpha}. \tag{11.9}$$

Les raisonnements précédents nous prouvent qu'on peut considérer un milieu continu à tous les points de vue comme le cas limite d'un système discontinu. Dans ces conditions, la méthode de quantification est évidemment la suivante :

En mécanique du point, nous avons la loi de commutation

$$p_{\alpha l} z^{\beta l'} - z^{\beta l'} p_{\alpha l} = \frac{h}{2\pi i} \delta_l^{l'} \delta_\alpha^\beta, \tag{11.10}$$

où l, l' sont les indices de deux cellules différentes. Dans cette relation (11.10) nous ne pouvons pas passer directement à la limite $\Delta x \to 0$, puisque les $p_{\alpha l}$ sont, par définition, proportionnels au volume Δx de la cellule [*voir* (11.2)]. Pour pouvoir le faire, multiplions d'abord (11.10) par une fonction $f_{l'}$, discontinue, constante dans chaque cellule et qui s'approche à la limite d'une fonction continue $f(x^1, x^2, x^3)$, de telle manière que

$$\sum_{l'} f_{l'} \Delta x \to \int f\, dx.$$

En sommant l' sur un volume d'espace V′ on obtient :

$$\sum_{l' \text{ dans } V'} f_{l'} \Delta x \left[\frac{p_{\alpha l}}{\Delta x} z^{\beta l'} - z^{\beta l'} \frac{p_{\alpha l}}{\Delta x} \right] = \frac{h}{2\pi i} \delta_{\alpha\beta} \begin{cases} f_l & \text{si } l \text{ est dans V}', \\ 0 & \text{si } l \text{ n'est pas dans V}'. \end{cases}$$

A la limite $\Delta x \to 0$, on aura

$$\int_{V'} f(x')\, dx' \{ P_\alpha(x) z^\beta(x') - z^\beta(x') P_\alpha(x) \} = \frac{h}{2\pi i} \delta_{\alpha\beta} \begin{cases} f(x) & \text{si } x \text{ est dans V}', \\ 0 & \text{si } x \text{ n'est pas dans V}', \end{cases} \tag{11.11}$$

où x représente un point (x^1, x^2, x^3) et x' un autre.

Il est commode d'écrire les formules de ce type sous forme abrégée en employant la fonction symbolique δ de Dirac, définie par

$$\int_a^b f(x)\, \delta(x)\, dx = \begin{cases} f(0) & \text{si } x = 0 \text{ est dans } (a, b) \\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ n'est pas dans } (a, b). \end{cases} \tag{11.12}$$

Il s'ensuit que nous pouvons admettre que $\delta(-x) = \delta(x)$.

Employons le même symbole $\delta(x)$ pour désigner une fonction à trois dimensions, égale en réalité au produit $\delta(x^1).\delta(x^2).\delta(x^3)$. Au moyen de la notation des crochets

$$FG - GF = [F, G], \tag{11.13}$$

on peut écrire les lois de commutation sous la forme suivante [8]

$$[P_\alpha(x), z^\beta(x')] = \frac{h}{2\pi i} \delta_\alpha^\beta\, \delta(x - x'); \tag{11.14}$$

Ces lois doivent être complétées par les suivantes, qui sont évidentes :

$$(11.15)\qquad [z^\alpha(x), z^\beta(x')] = 0, \qquad [P_\alpha(x), P_\beta(x')] = 0.$$

Remarquons que la variable temps, $x^4 = t$, a toujours la même valeur dans toutes les fonctions qui apparaissent dans (11.14) et (11.5).

En appliquant les formules bien connues de la mécanique quantique au système de cellules envisagé et en passant à la limite, on obtient les équations du mouvement

$$(11.16)\qquad \dot{z}_\alpha = \frac{2\pi i}{h}[\overline{H}, z_\alpha], \qquad \dot{P}^\alpha = \frac{2\pi i}{h}[\overline{H}, P^\alpha].$$

On peut montrer directement que ces équations sont formellement identiques aux équations d'Euler (2.1) de la théorie classique. Il en résulte ensuite qu'il existe une intégrale première d'énergie $\overline{H} = \text{const.}$ et des intégrales premières correspondantes, exprimant la conservation de la quantité de mouvement (que nous laisserons de côté ici, parce que nous ne les avons pas considérées non plus dans la théorie générale classique du paragraphe 1). Enfin, on peut démontrer que si les conditions de commutation (11.14) et (11.15) sont valables à un instant donné t_0, elles le seront également à tout autre instant ultérieur t.

12. Électrodynamique quantique. — Appliquons la théorie générale précédente au cas particulier du champ électromagnétique; les fonctions inconnues z^α seront les potentiels φ_k et nous devons prendre $\mathcal{L}$ fonction des composantes du champ $f_{kl} = \varphi_{k,l} - \varphi_{l,k}$.

Une sérieuse difficulté se présente lorsqu'on veut former les moments

$$(12.1)\qquad P^k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{4,k}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_k}.$$

On trouve

$$(12.2)\qquad P^k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{4,k}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f_{4,k}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f_{k,4}} = p^{4,k} = -\vec{D} \qquad (k = 1, 2, 3),$$

mais aussi

$$(12.3)\qquad P^4 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{4,4}} = 0.$$

Cette relation qui exprime que le moment du potentiel scalaire est nul, correspond à une dégénérescence remarquable du lagrangien de l'électrodynamique et conduit à de grandes complications. Elles résultent

du fait que les trois composantes d'espace P_1, P_2, P_3 doivent satisfaire (en théorie classique) à la relation

$$\sum_{k=1,2,3} \frac{\partial P^k}{\partial x^k} = -\operatorname{div}\vec{D} = 0 \tag{12.4}$$

et que par conséquent elles ne peuvent être prises arbitrairement toutes les trois sur une section d'univers quelconque, $t = \text{const.}$

Il s'ensuit qu'on ne peut pas appliquer directement les conditions de commutation (11.14) et (11.15). En effet, on aurait

$$\left\{\begin{aligned} &[\varphi_k(x), \varphi_l(x')] = 0, \\ &[P^k(x), P^l(x')] = 0, \\ &[P^k(x), \varphi_l(x')] = \frac{h}{2\pi i}\delta_l^k\,\delta(x-x'). \end{aligned}\right. \tag{12.5}$$

La dernière donne cependant

$$\left[\sum_{k=1,2,3} \frac{\partial P^k}{\partial x^k}, \varphi_l(x')\right] = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x^l}\delta(x-x').$$

Le premier membre est nul en vertu de (12.4) et le second ne l'est pas. Donc, la condition (12.4), c'est-à-dire l'une des équations de Maxwell est en contradiction avec les lois de commutation.

On a imaginé plusieurs méthodes pour éviter cette difficulté. La plus raisonnable semble être celle qui préconise l'emploi des formules (12.5) uniquement comme moyen heuristique pour découvrir les véritables conditions de commutation des composantes du champ [§ 11; 4], lesquelles ne sont pas en contradiction avec (12.4), comme nous le verrons dans un instant.

En dérivant (12.5) par rapport à x, y, z, on obtient

$$\left\{\begin{aligned} &[B_x(x), B_y(x')] = 0, \quad \ldots, \\ &[D_x(x), D_y(x')] = 0, \quad \ldots, \\ &[D_x(x), B_x(x')] = 0, \quad \ldots, \\ &[D_y(x), B_z(x')] = -[D_z(x), B_y(x')] = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\delta}{\partial x}, \quad \ldots. \end{aligned}\right. \tag{12.6}$$

En formant le crochet de $\operatorname{div} D$, on obtient

$$\left[B_x(x), \operatorname{div}\vec{D}\right] = \frac{h}{2\pi i}\left(\frac{\partial^2\delta}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2\delta}{\partial z\,\partial y}\right) = 0;$$

la contradiction a disparu [1].

Les variables qui apparaissent dans les conditions de commutation (12.6) sont uniquement les composantes des vecteurs D, B. Cela nous incite à les considérer comme variables fondamentales à la place des potentiels φ_k. L'opportunité de ce choix se manifeste dans le fait que les variables « naturelles » de l'énergie totale $E = \int U\, dv$ (qui est la grandeur fondamentale de la théorie des quanta), sont précisément les vecteurs $\vec{B}$ et $\vec{D}$; les autres vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{H}$ peuvent se déduire par dérivation

$$\vec{E} = \frac{\partial U}{\partial \vec{D}}, \qquad H = \frac{\partial U}{\partial \vec{B}}. \tag{12.7}$$

En nous plaçant systématiquement à ce point de vue, Infeld et moi-même avons développé une théorie cohérente de l'électrodynamique quantique non-linéaire. Au début, il est vrai, nous avions espéré obtenir également de cette façon les lois de mouvement des charges, c'est-à-dire des singularités; cet espoir s'est évanoui, comme s'est évanoui l'espoir de Mie de construire une théorie classique strictement unitaire du champ électromagnétique. Nous examinerons plus loin en détail le point capital de ce problème particulier. Pour l'instant, je vais esquisser d'abord l'électrodynamique quantique en l'absence de charges ponctuelles et ajouter ensuite quelques observations sur la manière qui me semble la plus adéquate pour étudier le cas général.

Il est clair qu'on devra renoncer à la symétrie complète entre coordonnées d'espace et de temps; il est cependant possible d'écrire les équations du mouvement sous forme d'un ensemble symétrique en ajoutant à (11.16) des équations similaires qui relient les dérivées d'espace à la quantité de mouvement totale.

Considérons $\vec{D}$ et $\vec{B}$ comme des opérateurs, opérant sur une certaine fonction (plus précisément sur une fonctionnelle) que nous n'écrivons pas explicitement. Ce faisant, nous adoptons le point de vue de Heisenberg et non pas celui de Schrödinger. D'après la conception de Heisenberg, les opérateurs dépendent des variables d'espace et de temps, la loi de variation étant dans notre cas la suivante.

Soit $F(\vec{D}, \vec{B})$ une fonction quelconque du champ et soient

$$\vec{E} = \int U\, dv, \qquad \vec{G} = \int \vec{S}\, dv \tag{12.8}$$

l'énergie et la quantité de mouvement de ce champ; la variation de F dans l'espace et le temps est donnée par

$$(12.9)\qquad \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{2\pi i}{h}[E, F], \qquad \frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{2\pi i}{h}[G_x F], \qquad \ldots.$$

Ces *lois de mouvement* complétées par les conditions de commutation (12.6) sont les équations fondamentales de la théorie.

La première question qui se pose est de savoir si ce système est invariant par rapport aux transformations de Lorentz.

Il n'en serait pas ainsi si l'on choisissait arbitrairement la fonction $(\vec{D}, \vec{B})$. Nous avons vu précédemment (§ 6, p. 192) que la condition d'invariance est la symétrie du tenseur d'énergie, laquelle peut s'exprimer par les deux équations vectorielles suivantes :

$$(12.10)\qquad \begin{cases} \vec{S} = \vec{D} \times \vec{B} = \vec{E} \times \vec{H}, \\ \vec{D} \times \vec{E} = \vec{H} \times \vec{B}. \end{cases}$$

En remplaçant dans ces relations $\vec{E}$ et $\vec{H}$ par leurs expressions (12.7), on obtient six équations aux dérivées partielles pour $U(\vec{D}, \vec{B})$ qui constituent les conditions nécessaires et suffisantes pour l'invariance du système considéré. Toute fonction U déduite d'un lagrangien invariant $L(\vec{E}, \vec{B})$ satisfait naturellement à ces conditions (12.10).

La seconde question à examiner est celle de l'invariance des lois de commutation (12.6). Cette invariance a été démontrée pour le cas de la théorie de Maxwell, par Heisenberg et Pauli dans leur travail fondamental déjà cité. Infeld et moi-même avons donné une démonstration générale qui n'était cependant pas tout à fait satisfaisante, mais qui a été améliorée depuis, par Infeld [2] et indépendamment par Pryce [3]. La méthode employée consiste à appliquer une transformation infinitésimale de Lorentz aux tenseurs antisymétriques $(\vec{E}, \vec{B})$ et $(\vec{D}, \vec{H})$ ainsi qu'aux variables x, y, z, t et x', y', z', t' qui apparaissent dans les lois de commutation et de montrer que ces dernières ne changent pas. Le calcul effectif est trop compliqué pour être reproduit ici.

Souvent, il est plus commode de remplacer les lois de commutation par des formules contenant des fonctions arbitraires à la place de la

fonction δ. Pour y arriver nous avons procédé, Infeld et moi-même, de la façon suivante :

Soient F et G des fonctions arbitraires de $\vec{D}$ et $\vec{B}$; formons les intégrales d'espace $\int F\,dv$ et $\int G\,dv$ prises sur un domaine quelconque V. On a :

$$(12.11)\quad \frac{4\pi i}{h}\left[\int F\,dv, \int G\,dv\right] = \int\left\{\frac{\partial F}{\partial \vec{B}}\left(\nabla\times\frac{\partial G}{\partial \vec{D}}\right) - \frac{\partial F}{\partial \vec{D}}\left(\nabla\times\frac{\partial G}{\partial \vec{B}}\right)\right\}dv$$
$$= -\int\left\{\frac{\partial G}{\partial \vec{B}}\left(\nabla\times\frac{\partial F}{\partial \vec{D}}\right) - \frac{\partial G}{\partial \vec{D}}\left(\nabla\times\frac{\partial F}{\partial \vec{B}}\right)\right\}dv,$$

où ∇ est l'opérateur vectoriel $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$. En vertu de $[a, b] = -[b, a]$, les deux seconds membres de (12.11) doivent être identiques, ce qui restreint l'arbitraire des fonctions admissibles. Celles-ci doivent être telles que l'intégrale

$$\int\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial \vec{B}}\times\frac{\partial G}{\partial \vec{D}}\right) - \left(\frac{\partial F}{\partial \vec{D}}\times\frac{\partial G}{\partial \vec{B}}\right)\right\}\vec{n}\,d\sigma$$

prise sur la frontière du domaine V, s'annule.

On obtient la forme (12.6) des lois de commutation en prenant

$$F = B_x, \quad \ldots, \quad G = \delta D_x, \quad \ldots.$$

Si l'on prend ensuite

$$F = B_x, \ldots \text{ ou } D_x, \ldots; \qquad G = U \text{ ou } S_x, S_y, S_z$$

et si l'on tient compte de (12.7), on obtient, à partir des équations du mouvement (12.9),

$$(12.12)\quad \begin{cases} \dot{\vec{B}} = -(\nabla\times\vec{E}), & \dot{\vec{D}} = (\nabla\times\vec{H}), \\ \operatorname{div}\vec{B} = 0, & \operatorname{div}\vec{D} = 0, \end{cases}$$

tout l'ensemble des équations du champ.

En prenant

$$F = \delta U, \qquad G = U,$$

on obtient

$$\dot{U} = -\operatorname{div}(\vec{E}\times\vec{H}) = -\operatorname{div}\vec{S},$$

c'est-à-dire la loi de conservation de l'énergie sous forme différentielle;

de la même façon, on peut démontrer la conservation de la quantité de mouvement.

Le *moment angulaire* total du champ est défini par

$$\vec{M} = \int (\vec{r} \times \vec{S})\, dv \tag{12.13}$$

et le *centre d'énergie* $\vec{q}$ par

$$\frac{1}{2}(E\vec{q} + \vec{q}E) = \int \vec{r}U\, dv. \tag{12.14}$$

Les lois de commutation correspondantes sont les suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} \vec{M} \times \vec{M} &= \frac{h}{2\pi i}\vec{M}, \\ \dot{\vec{q}} &= [E, \vec{q}] = \vec{G}E^{-1}, \\ \ddot{\vec{q}} &= [E, \dot{\vec{q}}] = 0 \end{aligned}\right. \tag{12.15}$$

et les autres relations connues entre $\vec{q}$, $\vec{G}$, $\vec{M}$, exactement comme s'il s'agissait de points matériels.

Un raisonnement bien connu, appliqué à la première des équations (12.15), nous apprend que les valeurs propres du moment cinétique total peuvent être soit $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, soit $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{5}{2}, \ldots$ (l'unité étant $h/2\pi i$).

Nous avions cru au début, Infeld et moi-même, qu'il serait possible d'expliquer le spin en le considérant comme un état quantique de nombre demi-entier, du champ électromagnétique; dans ce but nous avons défini un « moment cinétique interne », c'est-à-dire un moment par rapport au centre d'énergie $\vec{q}$, qui présentait certaines propriétés analogues à celles du spin. Cette identification était cependant erronée, ainsi que Pauli l'a remarqué. Pryce a démontré rigoureusement que le moment angulaire électromagnétique n'a que des valeurs propres entières même si l'on admet l'existence de singularités (sans spin) [4].

Ce résultat montre clairement qu'il est impossible d'expliquer l'existence des particules au moyen d'une théorie non-linéaire de champ, sans les introduire explicitement et sans leur attribuer des variables de spin convenables.

Le problème a été traité par Heisenberg et Pauli pour le cas particulier

d'un champ de Maxwell $\left(\text{où } U = \frac{1}{2}(D^2 + B^2)\right)$, et par Pryce pour le cas de la théorie générale des champs $\left[\text{avec } U\left(\vec{D}, \vec{B}\right) \text{ quelconque soumis seulement aux conditions d'invariance relativiste.}\right]$ [3].

Dans cette dernière théorie la position d'une singularité est représentée par un rayon vecteur $\vec{\xi}^{(n)}$ avec les composantes $\xi_x^{(n)}$, $\xi_y^{(n)}$, $\xi_z^{(n)}$; de plus, on attribue à chacune d'entre elles un « moment intrinsèque » $\vec{\pi}^{(n)}$, lequel *n'est pas* relié à la vitesse par la relation simple bien connue qui contient la masse, puisque ici on n'introduit pas de masse pour les particules. Pryce écrit systématiquement les lois de commutation entre ces quantités et les composantes du champ. Nous ne pouvons pas nous arrêter ici sur ces considérations trop compliquées; nous nous contenterons d'en indiquer les résultats finaux qui sont relativement simples.

Exactement comme dans la théorie des champs sans charge, il y a trois groupes de lois fondamentales :

1. Les expressions de l'énergie et de la quantité de mouvement

$$(12.16)\qquad \begin{cases} E = \int U\left(\vec{D}, \vec{B}\right) dv - \sum_n \vec{\alpha}^{(n)} \vec{\pi}^{(n)}, \\ \vec{G} = \int \left(\vec{D} \times \vec{B}\right) dv + \sum_n \vec{\pi}^{(n)}; \end{cases}$$

dans ces formules $\vec{\alpha}^{(n)}(\alpha_x^{(n)}, \alpha_y^{(n)}, \alpha_z^{(n)})$ sont un groupe d'opérateurs de Dirac (3 matrices à 4 lignes et 4 colonnes) qui satisfont à

$$(12.17)\qquad \alpha_x^{(n)}\alpha_y^{(m)} + \alpha_y^{(m)}\alpha_x^{(n)} = 2\,\delta_{xy}\,\delta_{mn}.$$

2. Les équations du mouvement pour une quantité quelconque F :

$$(12.18)\qquad \frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{2\pi i}{h}[E, F], \qquad \frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{2\pi i}{h}[G_x, F], \qquad \ldots.$$

3. Les lois de commutation

$$(12.19)\qquad \begin{cases} [D_y(x), B_z(x')] = \dfrac{h}{2\pi i}\dfrac{\partial\delta}{\partial x}, & \ldots, \\ [D_x(x), \pi_x^{(n)}] = -e\,\delta(x - \xi^{(n)}), & \ldots, \\ [\xi_x^{(n)}, \pi_x^{(n)}] = \dfrac{h}{2\pi i}, & \ldots, \\ [\pi_y^{(n)}, \pi_z^{(n)}] = \dfrac{h}{2\pi i} e \int \delta(x - \xi^{(n)})\, B_x(x)\, dv, & \ldots, \end{cases}$$

en outre, toutes les autres grandeurs non mentionnées commutent entre elles. On peut montrer que l'ensemble de ces équations est invariant du point de vue relativiste.

L'opérateur d'énergie de (12.16) a la forme de l'opérateur d'énergie d'un électron de Dirac, dans lequel le terme de masse aurait été remplacé par l'énergie du champ électromagnétique.

On peut montrer maintenant que ces lois générales contiennent toutes celles qu'on doit attendre, à savoir, les équations de Maxwell avec charge ponctuelle et courant correspondant, exprimées au moyen des fonctions δ :

$$(12.20)\quad \begin{cases} \dot{\vec{D}} - \operatorname{rot}\vec{H} = e\sum_n \delta(x-\xi^{(n)})\alpha^{(n)}, & \operatorname{div}\vec{D} = \sum_n \delta(x-\xi^{(n)}), \\ \dot{\vec{B}} + \operatorname{rot}\vec{E} = 0, & \operatorname{div}\vec{B} = 0; \end{cases}$$

ensuite le fait bien connu de la théorie de Dirac que la vitesse de la particule n est $\vec{\alpha}^{(n)}$

$$(12.21)\qquad \dot{\vec{\xi}}^{(n)} = \vec{\alpha}^{(n)},$$

et enfin les équations du mouvement de Lorentz sous la forme suivante

$$\dot{\vec{\pi}}^{(n)} = e\int \delta(x-\xi^{(n)})\left[\vec{E} + \left(\dot{\vec{\xi}}^{(n)} \times \vec{B}\right)\right] dv.$$

On peut ensuite montrer que les composantes de la quantité de mouvement $\vec{G}$ commutent avec E, et constituent par conséquent des intégrales premières du mouvement.

Le moment angulaire total devient

$$\vec{M} = \int \left(\vec{r} \times \vec{S}\right) dv + \sum_n \left(\vec{\xi}^{(n)} \times \vec{\pi}^{(n)}\right) + \frac{1}{2}\,\frac{h}{2\pi}\sum_n \vec{\sigma}^{(n)},$$

où $\sigma_x^{(n)} = \alpha_y^{(n)}.\alpha_z^{(n)}, \ldots$ sont les composantes du spin; il s'ensuit que $\vec{M}$ est également une intégrale première. Le terme qui ne contient pas le spin a des valeurs propres entières; par conséquent, le moment angulaire total se comporte exactement comme il devrait se comporter pour un système de particules dont chacune possède un spin.

Le problème capital de cette théorie est celui de l'existence de valeurs propres finies pour l'énergie d'une particule isolée, et de leur calcul. Aucune solution de ce problème n'a pu être obtenue cependant jusqu'à présent.

Nous ne savons pas si cette théorie, qui est formellement la contrepartie de la théorie non-linéaire classique des champs, contient ou non la solution quantique du problème de la masse électromagnétique. Cependant, en tous cas, qu'on arrive ou non à résoudre ce problème, la théorie telle que nous l'avons présentée ici ne peut pas être considérée comme satisfaisante, pour les raisons suivantes.

Lorsqu'on prend pour U l'expression de Maxwell, $\frac{1}{2}(D^2+B^2)$, on retombe sur l'électrodynamique quantique de Heisenberg et Pauli qui contient la théorie du rayonnement de Dirac comme cas particulier. Tous les termes infinis qui rendent cette théorie inacceptable apparaissent de nouveau et il ne semble pas que l'on puisse s'en débarrasser en tenant compte des termes non-linéaires en D et B.

La découverte des particules non chargées rend douteuse l'origine purement électromagnétique de la masse. L'hypothèse de l'existence de dipôles (ou multipôles) ponctuels est en contradiction avec les conditions aux limites « naturelles » et par conséquent ne peut être acceptée même dans la théorie classique des champs. Le problème d'une généralisation correcte de la théorie qui fasse apparaître normalement l'existence des dipôles (ou multipôles) n'a pas encore été correctement étudié.

L'analyse des processus nucléaires a révélé l'existence de forces d'un type nouveau dans les régions de l'ordre de grandeur d'un « rayon électronique ». Nous savons maintenant qu'entre deux neutrons ou entre un neutron et un proton situés à petite distance l'un de l'autre, apparaissent des forces d'un caractère inconnu jusqu'à présent. La théorie de la désintégration β de Fermi introduit un autre type d'interaction, tout à fait nouveau, introduisant simultanément quatre particules, un neutron, un proton, un électron et un neutrino. Nous ne pouvons pas nous attendre raisonnablement à obtenir une valeur correcte de la masse électromagnétique si les lois fondamentales de la nature sont d'un type très différent du type électromagnétique précisément dans la région où se trouve concentrée toute l'énergie de la particule.

Les équations de Pryce contiennent 2 constantes, la charge élémentaire et la constante de Planck h. Or, nous savons que ces deux constantes ne sont pas indépendantes; elles sont liées par la relation $\frac{2\pi e^2}{ch} = \frac{1}{137}$; cette combinaison des constantes e, h, c est un nombre sans dimensions, la « constante de structure fine » de Sommerfeld. Il semble très peu pro-

bable qu'on puisse développer une théorie des particules s'appliquant seulement à l'électron et négligeant l'existence des particules lourdes, dont la masse est 1840 fois plus élevée. Une théorie satisfaisante des particules élémentaires devrait pouvoir expliquer les valeurs des deux nombres sans dimensions, 137 et 1840.

Nous sommes très loin d'une telle théorie. Certaines tentatives dans ce sens ont des points communs avec la théorie non-linéaire des champs; nous les examinerons au dernier paragraphe de ce travail.

13. La théorie de l'électron de Dirac et l'électrodynamique non-linéaire. — La théorie quantique de l'électron nous a permis d'attaquer le problème de l'électrodynamique non-linéaire d'une manière entièrement nouvelle. L'importance de cette tentative de Dirac, Heisenberg et leurs collaborateurs réside dans le fait qu'elle a été la première à justifier théoriquement la relation qui existe entre la charge élémentaire et la constante de Planck, en d'autres termes la valeur de la constante de structure fine. Dans ce qui suit nous esquisserons rapidement cette théorie.

L'équation d'onde relativiste d'un électron se déduit des équations classiques du mouvement, lesquelles, nous l'avons vu, sont une conséquence d'une électrodynamique non-linéaire avec un lagrangien quelconque. Ces équations peuvent s'écrire sous la forme canonique suivante :

$$\dot{\vec{r}} = \frac{\partial W}{\partial \vec{p}}, \qquad \dot{\vec{p}} = -\frac{\partial W}{\partial \vec{r}} \tag{13.1}$$

avec l'hamiltonien

$$W = \left\{ \left(\vec{p} - e\vec{a}\right)^2 + m_0^2 \right\}^{\frac{1}{2}} + e\varphi, \tag{13.2}$$

où $\vec{a}$, φ sont les potentiels vecteur et scalaire. En effectuant les dérivations dans (13.1) on obtient

$$\dot{x} = \frac{p_x - ea_x}{\sqrt{\left(\vec{p} - e\vec{a}\right)^2 + m_0^2}},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\dot{p}_x = \frac{e}{\sqrt{\left(\vec{p} - e\vec{a}\right)^2 + m_0^2}} \times \left\{ (p_x - ea_x)\frac{\partial a_x}{\partial x} + (p_y - ea_y)\frac{\partial a_y}{\partial x} + (p_z - ea_z)\frac{\partial a_z}{\partial x} \right\} - e\frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Du premier groupe d'équations on déduit que

$$(13.3)\qquad \left(\vec{p} - e\vec{a}\right)^2 + m_0^2 = \frac{m_0^2}{1-\rho^2},$$

donc

$$(13.4)\qquad \vec{p} = \frac{m_0\vec{\rho}}{\sqrt{1-\rho^2}} + e\vec{a};$$

avec ces valeurs le second groupe devient

$$(13.5)\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\dot{x}}{\sqrt{1-\rho^2}} + ea_x\right) = e\left\{\dot{x}\frac{\partial a_x}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial a_y}{\partial x} + \frac{\partial a_z}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right\}, \qquad \ldots$$

En utilisant les relations entre potentiels et champs, à savoir

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \dot{\vec{a}}, \qquad \vec{B} = \operatorname{rot}\vec{a},$$

ces équations sont équivalentes à

$$(13.6)\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\vec{\rho}}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) = e\left\{\vec{E} - \left(\vec{\rho}\times\vec{B}\right)\right\},$$

en concordance avec (10.17), (6.34).

Écrivons (13.2) sous la forme symétrique

$$(13.7)\qquad (W - e\varphi)^2 - \left(\vec{p} - e\vec{a}\right)^2 = m_0^2.$$

On peut employer cette relation pour mettre en accord la théorie ondulatoire de la matière proposée par Schrödinger avec le principe de relativité, en considérant W et $\vec{p}$ comme des opérateurs de la forme

$$(13.8)\qquad W = \frac{-\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}, \qquad p_x = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}, \qquad \ldots \qquad \left(\hbar = \frac{h}{2\pi}\right)$$

opérant sur une fonction d'onde $\psi(x, y, z, t)$.

On appelle l'équation d'onde ainsi obtenue l'équation de Klein et Gordon [1]. Cette équation ne satisfait pas à toutes les conditions requises par l'interprétation statistique de la mécanique quantique [2]. On constate que la densité de probabilité de présence d'une particule n'est pas définie positive; l'équation contient des dérivées secondes par rapport au temps, ce qui est en contradiction avec le postulat statistique fondamental d'après lequel la fonction ψ doit être complètement déter-

minée par ses valeurs initiales; enfin, cette équation ne rend pas compte du spin de l'électron. Ces objections ont conduit Dirac à la remplacer par sa célèbre équation relativiste [3]

$$\left\{ W - e\varphi - \vec{\alpha}\left(\vec{p} - e\vec{a}\right) - \beta m_0 \right\} \psi = 0, \tag{13.9}$$

où $\vec{\alpha}(\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z)$, β sont 4 matrices à 4 lignes et 4 colonnes, satisfaisant à des lois de commutation

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_x \alpha_y + \alpha_y \alpha_x = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \\ \alpha_x \beta + \beta \alpha_x = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{array} \right. \tag{13.9 a}$$

Cette équation est linéaire en W (c'est-à-dire du premier ordre en d/dt), et permet de rendre compte des propriétés mécaniques et magnétiques du spin en parfait accord avec l'expérience.

Les deux équations (13.7) et (13.9) présentent le grave défaut de conduire à des valeurs propres négatives pour l'énergie. Par exemple, dans le cas de l'absence de champ $\left(\vec{a} = 0,\ \varphi = 0\right)$, on aura une solution en prenant ψ proportionnel à

$$e^{\frac{i}{h}\left(Wt - \vec{p}\vec{r}\right)},$$

W et $\vec{p}$ étant des constantes reliées par

$$W^2 - \vec{p}^2 = m_0^2;$$

il est clair que pour un $\vec{p}$ donné, W peut avoir deux valeurs égales et de signe contraire $W = \pm\sqrt{\vec{p}^2 + m_0^2}$.

Or, c'est précisément ce défaut qui a assuré le triomphe de la théorie. Dirac proposa d'admettre que tous les états d'énergie négative sont occupés par des électrons qui existent partout mais qu'on ne peut observer, attendu qu'ils ne contribuent pas à la formation de champs électromagnétiques observables. Une action extérieure peut cependant élever un électron d'un état d'énergie négative à un autre état d'énergie positive et le rendre ainsi observable; en même temps, le « trou » ainsi créé dans l'ensemble infini des électrons à énergie négative devient également observable, et l'expérience doit nous le révéler sous la forme d'une

particule chargée positivement. Dirac crut d'abord que ces « trous » devaient représenter des protons [4], malgré la difficulté que présentait pour cette identification le fait que la masse de proton est 1840 fois plus grande que celle d'un électron. Cependant, à cette même époque, Anderson découvrit l'existence d'électrons positifs dans les rayons cosmiques [5], et cette découverte fut confirmée par Blackett et Occhialini [6]; Dirac reconnut immédiatement [7] que ces expériences constituaient une confirmation de sa théorie.

L'idée fondamentale de celle-ci est la suivante : dans l'univers (ou du moins dans la partie qui nous est connue) il existe un surplus d'électrons à énergie positive, constituant l'enveloppe extérieure des atomes. Il peut arriver qu'à la suite d'une collision entre électrons ou photons, un des électrons à énergie négative soit tiré de son sommeil et pourvu d'énergie positive : on observe alors l'apparition d'une *paire* formée d'un électron et un « positon ». Un positon a une vie moyenne de courte durée : en effet, il peut se combiner avec n'importe quel électron rencontré en route en émettant de l'énergie ($2m_0c^2$, plus l'énergie cinétique des deux particules); le résultat de cette combinaison est de la lumière et pour préciser *deux* photons au moins si l'on veut que le principe de la conservation de la quantité de mouvement soit satisfait. Dans le langage de la théorie des « trous », cela signifie que l'électron saute dans une place vide inoccupée par un électron d'énergie négative, et ne peut plus être observé.

Cette théorie permet de prévoir par exemple les valeurs minima de l'énergie des photons pouvant donner lieu à une paire, ou au contraire provenant de l'annihilation d'un électron et d'un positon; elle permet ensuite de calculer la probabilité de matérialisation et dématérialisation sous l'action catalytique d'un champ extérieur (nucléaire), etc.; les résultats présentent un étonnant accord avec l'expérience [8].

Les difficultés que rencontre cette théorie proviennent du fait que les électrons inobservables en nombre infini, se trouvant dans les états d'énergie négative, fournissent une contribution elle-même infinie, aux valeurs de la densité d'énergie, du courant et de la charge et que cette contribution est dépourvue en apparence de toute signification physique. Dirac lui-même [9] ainsi que Heisenberg [10] ont proposé des règles formelles pour éliminer ces termes infinis. Récemment Weisskopf [11] a simplifié considérablement ces règles et a montré

qu'en partant de postulats essentiellement physiques il est possible d'isoler d'une manière univoque et bien déterminée, dans les sommes divergentes qui représentent formellement la charge, le courant, l'énergie, etc., les sommes partielles finies qui seules sont susceptibles d'une interprétation physique. Dans ce qui suit nous suivrons le travail de Weisskopf.

Nous arrivons maintenant au point où cette théorie rejoint celle d'une électrodynamique non-linéaire.

Du point de vue de l'observabilité des phénomènes la production de paires ou le processus inverse a lieu dans le vide, puisque l'infinité d'électrons qui se trouvent dans des états d'énergie négative est inobservable. Il est vrai que l'apparition de ces processus dépend de la présence d'un champ électromagnétique extérieur; cependant, ces champs ne prennent aucune part aux échanges d'énergie en présence et ne jouent en somme que le rôle de catalyseurs, ainsi que nous l'avons déjà dit.

La théorie exige donc qu'en présence d'un champ extérieur constant, des phénomènes d'absorption ou d'émission de lumière puissent avoir lieu dans le vide. Or, cette exigence est en contradiction avec la loi de superposition qui découle de la théorie linéaire de Maxwell; en effet, d'après celle-ci une onde de lumière peut traverser sans encombre toute portion d'espace vide de matière indépendamment de la présence ou de l'absence dans cet espace d'un champ électromagnétique quelconque.

Nous devons donc nous attendre à trouver des résultats différents de ceux que fournit la théorie de Maxwell; la caractéristique générale de ces résultats peut être entrevue en établissant une analogie avec une situation similaire, bien connue de la théorie des atomes. Considérons une onde de lumière qui traverse une substance dont les atomes se trouvent tous dans l'état fondamental. Si le spectre de l'onde de lumière contient une fréquence qui correspond à la différence d'énergie entre un état excité et l'état fondamental de l'atome, cette fréquence sera absorbée et l'atome excité. Si la lumière ne contient pas de fréquence suffisamment élevée pour exciter même le premier état de l'atome, il n'y aura aucune absorption; cependant cela ne signifie en aucune manière que la substance en question n'exercera aucune influence sur l'onde de lumière qui la traverse. L'atome est polarisé par la lumière à la cadence propre de cette dernière; il y a diffusion et, à la suite de l'interférence des ondes diffusées, dispersion, effet qui peut être également décrit en attribuant à

la substance traversée une constante diélectrique plus grande que l'unité.

Or, dans la théorie relativiste de l'électron, le vide se comporte d'une façon analogue à celle de la substance hypothétique précédente; en effet, dans cette théorie le « vide » n'est pas absolument dépourvu de matière, puisqu'il est rempli au contraire par un nombre infini d'électrons dans des états stationnaires, à savoir chacun dans l'état le plus bas possible que le permet le principe d'exclusion de Pauli. Une onde de lumière d'énergie suffisante ($> 2m_0c^2$) peut être absorbée par le passage d'un électron dans un état excité d'énergie positive. Si toutefois l'énergie ne suffit pas pour produire un pareil saut, l'onde de lumière sera diffusée, exactement de la même manière que celle analysée plus haut. Ce processus peut également être décrit comme un double saut virtuel, aller et retour, entre l'état fondamental et un état excité. La configuration électronique générale du vide n'est pas changée et il n'y a pas de production de paires; néanmoins, le vide acquiert une énergie de polarisation additionnelle, fonction de champ de l'onde lumineuse.

Heisenberg et ses collaborateurs, Euler et Kockel [12], ont développé cette théorie dans l'hypothèse d'une variation très lente dans l'espace et le temps du champ extérieur (champ de l'onde lumineuse); pour préciser, dans l'hypothèse que toute composante F satisfait aux conditions suivantes :

$$\frac{\hbar}{mc}|\operatorname{grad} F| \ll |F|, \qquad \frac{\hbar}{mc^2}\left|\frac{\partial F}{\partial t}\right| \ll |F|,$$

où c est la vitesse de la lumière [1].

Nous admettrons ces mêmes hypothèses et de plus nous supposerons que la densité de rayonnement est petite, qu'il n'existe pas de différences de potentiel supérieures à $2m_0c^2$; dans ces conditions nous pouvons raisonnablement admettre qu'il n'y a pas de production de paires.

Une autre hypothèse simplificatrice est celle qui consiste à négliger l'interaction des électrons du vide. En réalité, il est impossible de séparer ce champ « interne » du champ électromagnétique extérieur de l'onde lumineuse; strictement parlant, il faudra donc considérer la méthode que nous utiliserons comme analogue à la méthode du champ

---

[1] Nous ne poserons plus dans ce qui suit $c = 1$, pour pouvoir précisément mettre en évidence la manière dont les diverses constantes dépendent de c.

self-consistent, utilisée par Hartree [13] pour calculer les orbites électroniques dans l'atome : on sait que dans cette manière de procéder chaque électron est traité séparément sous l'action du champ, lequel est la somme du champ extérieur et du champ moyen produit par les autres électrons. Une analyse plus exacte de la question devrait faire usage de la méthode de la seconde quantification des ondes électroniques; cela serait cependant trop compliqué et ferait apparaître un autre type de processus de divergence, complètement étranger au problème que nous considérons.

Nous allons effectuer les calculs pour le cas de l'électron de Dirac. Néanmoins, il est remarquable de constater que la même théorie peut être développée pour un électron satisfaisant à l'équation de Klein-Gordon, la différence étant que la statistique à laquelle doivent obéir les électrons sera celle de Dirac-Fermi dans le premier cas et celle de Bose-Einstein dans le second. Pauli et Weisskopf ont montré [14] qu'une théorie scalaire d'un électron sans spin, basée sur l'équation de Klein-Gordon, est parfaitement possible, et Weisskopf l'a appliquée au problème de la polarisation du vide; en fait, ce dernier effet ne dépend que de l'existence des états d'énergie négative et n'a rien à faire avec le spin. Néanmoins, comme l'électron possède réellement un spin, la théorie scalaire précédente a le caractère d'un développement théorique abstrait beaucoup trop éloigné de la réalité.

14. Théorie des trous et polarisation du vide. — Nous admettons que la densité d'énergie totale du vide se compose de deux parties

$$U = U^0 + U', \tag{14.1}$$

la première U^0 représentant la densité de Maxwell (en unités électrostatiques)

$$U^0 = \frac{1}{8\pi}(E^2 + B^2), \tag{14.2}$$

et la seconde U' la contribution des « électrons du vide »

$$U' = \sum_i U'_i. \tag{14.3}$$

La contribution d'un seul électron est donnée par

$$U'_i = (\psi_i, \varpi\psi_i), \tag{14.4}$$

où w est l'énergie interne de l'électron et ψ_i la fonction propre qui décrit l'état dans lequel il se trouve; le produit scalaire des deux fonctions ψ et φ signifie simplement qu'on forme la somme suivante sur l'indice du spin

$$(\psi, \varphi) = \sum_k \psi^{*k} \varphi^k. \tag{14.5}$$

Si l'électron n'avait pas de spin nous aurions

$$w = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = W - e\varphi,$$

où W est l'énergie totale ou l'hamiltonien, donné par (13.2).

Pour un électron pourvu d'un spin, il nous faudra utiliser (13.9) au lieu de (13.2). Introduisons la vitesse de la lumière c et écrivons pour la charge, qui est négative $-e(e > 0)$ au lieu de e; nous aurons

$$w = W + e\varphi = \vec{\alpha}(c\vec{p} + e\vec{a}) + \beta m_0 c^2, \tag{14.6}$$

ψ_i est une fonction propre de l'opérateur W, donc

$$W\psi_i = W_i \psi_i, \tag{14.7}$$

W_i étant la valeur propre correspondante. La somme (14.3) se compose d'une partie provenant de l'énergie totale W, partie que nous désignerons par

$$\widetilde{U} = \sum_i W_i(\psi_i, \psi_i), \tag{14.8}$$

et d'une seconde partie ayant son origine dans le terme $e\varphi$, égale à

$$\sum_i (\psi_i, e\varphi\psi_i). \tag{14.9}$$

Cette dernière partie peut être réduite à une autre qui dépend de $\widetilde{U}$. En effet, si nous intégrons $(\psi_i, e\varphi\psi_i)$ dans tout l'espace, nous obtenons l'élément diagonal $e\varphi_{ii}$. D'un autre côté, si nous remplaçons φ par $\lambda\varphi$ et si nous écrivons $W = W_0 - \lambda e\varphi$, nous aurons $\lambda e\varphi_{ii} = -\lambda \frac{\partial W_{ii}}{\partial \lambda}$.

Résolvons maintenant l'équation d'ondes dans le cas d'un champ électrique constant $\vec{E}$; nous pourrons ensuite égaler la valeur E de ce dernier

avec le paramètre λ. L'intégrale de l'expression (14.9) dans tout l'espace est par conséquent $-E\frac{dW_{ii}}{dE}$, et cette expression doit également être valable pour les densités, toutes les fois que le champ extérieur est constant. Nous aurons donc

$$U' = \widetilde{U} - E\frac{d\widetilde{U}}{dE}. \tag{14.10}$$

Le calcul de U' s'effectue donc de la manière suivante : nous déterminons d'abord les valeurs propres négatives W_i et les fonctions propres ψ_i correspondantes pour un électron. Ensuite nous formons la densité $\widetilde{U}$ (14.8), en prenant la somme sur tous les états négatifs et enfin, nous effectuons l'opération indiquée en (14.10).

Le calcul peut être simplifié davantage si l'on prend le cas d'un champ extérieur particulier; le résultat final devant jouir de l'invariance relativiste, nous pouvons aisément passer de ce cas particulier au cas général d'un champ quelconque, par l'application d'une transformation de Lorentz.

Heisenberg et Euler ont choisi comme cas particulier celui d'un champ magnétique constant superposé à un champ électrique constant et parallèle au précédent. Cette hypothèse donne lieu à certaines difficultés; en effet, dans un champ constant, si petit qu'il soit, il existe des différences de potentiel considérables entre deux points situés à grande distance l'un de l'autre. D'autre part, le « paradoxe de Klein », bien connu [1] précise que toute différence de potentiel supérieure à $2m_0c^2$ peut donner lieu à une paire, c'est-à-dire peut provoquer le saut d'un électron d'un état négatif à un état positif. Or, nous voulons exclure complètement le cas de la production de paires. Pour éviter cette difficulté, Weisskopf prend un champ électrique, parallèle au champ magnétique, et lentement périodique dans l'espace, son potentiel étant

$$\varphi = \varphi_0 e^{\frac{ig}{h}x} + \varphi_0^* e^{-\frac{ig}{h}x}. \tag{14.11}$$

Ensuite, il procède de la manière suivante. Il résout d'abord l'équation de Dirac dans l'hypothèse que le champ magnétique $\vec{B} = (B_x, 0, 0)$ existe seul. Ce problème peut être traité rigoureusement. Sa caractéristique est la possibilité de séparer l'équation aux dérivées partielles en trois autres ne contenant qu'une seule des trois variables indépendantes

de x, y, z; deux d'entre elles ont un spectre continu et la troisième un spectre discontinu du type de celui de l'oscillateur harmonique. Cela correspond au fait qu'en théorie classique, le mouvement d'un électron dans un champ magnétique a lieu sur une hélice. Les fonctions propres sont données par :

$$\psi_i = \frac{a(p_x)}{2\pi h} e^{\frac{i}{\hbar}[(xp_x + zp_z + t\,W_n(p_x)]} \left(\frac{b}{2\hbar^2}\right)^{\frac{1}{2}} H_n(\eta), \tag{14.12}$$

où η est une fonction linéaire de y et b est proportionnel au champ magnétique :

$$\eta = \left(y + \frac{2\hbar}{b} p_z\right)\sqrt{\frac{b}{2\hbar^2}} \qquad \text{et} \qquad b = \frac{2e\hbar}{c} B. \tag{14.13}$$

$H_n(\eta)$ est la $n^{\text{ième}}$ fonction propre de l'oscillateur harmonique, normalisée à l'unité. $a(p_x)$ est un « spineur », ayant deux composantes. L'énergie négative est donnée par

$$W_n(p_x) = -c\sqrt{p_x^2 + m_0^2 c^2 + b\left(n + \frac{1-\sigma}{2}\right)}, \tag{14.14}$$

où σ est un autre spineur ayant comme valeurs propres $+1$ et -1 qui correspondent aux deux positions possibles du spin de l'électron.

On substitue (14.12) et (14.14) dans (14.8). La somme doit être prise sur $n = 0, 1, \ldots, \sigma = +1, -1$ et sur le domaine continu de p_x, p_z allant de $-\infty$ à $+\infty$. La relation (14.13) montre que lorsqu'on intègre par rapport à p_z la variable y disparaît; le résultat est (en écrivant p au lieu de p_z) :

$$\widetilde{U}^0 = \left(\frac{b}{8\pi^2\hbar^3}\right) \sum_{\sigma=-1}^{+1} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_n(p)\,dp. \tag{14.15}$$

Posons

$$x = b\left(n + \frac{1-\sigma}{2}\right),$$

x est nul pour $n = 0$, $\sigma = 1$, mais prend *la même* valeur b, $2b$, $3b$, ... pour *deux* combinaisons de n et σ; par exemple : $x = 2b$ aussi bien pour $n = 2$, $\sigma = 1$ que pour $n = 1$, $\sigma = -1$. Nous avons donc

$$\sum_{\sigma=-1}^{+1} \sum_{n=0} W_n = F(0) + 2\sum_{n=1}^{\infty} F(nb) \tag{14.16}$$

où

$$F(x) = -c\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2 + x}. \tag{14.17}$$

Il est clair que la somme (14.16) est divergente; cependant, on peut la tranformer de telle manière que la signification physique des termes qui divergent soit évidente; appliquons la formule de sommation de Mac Laurin-Euler, qui donne :

$$(14.18)\quad \frac{1}{2}F(0)+\sum_{n=1}^{\infty}F(nb)=\frac{1}{b}\left\{\int_0^{\infty}F(x)\,dx+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{B_k}{(2k)!}b^{2k}F^{(2k-1)}(0)\right\},$$

puisque toutes les dérivées $F^{(k)}(x)$ de $F(x)$, à savoir :

$$(14.19)\quad F^{(1)}(x)=-\frac{c}{2}(p^2+m_0^2c^2+x)^{-\frac{1}{2}},\qquad F^{(2)}(x)=\frac{c}{4}(p^2+m_0^2c^2+x)^{-\frac{3}{2}}$$

s'annulent quand $x\to\infty$. B_k est le nombre de Bernoulli de rang k.

En substituant (14.18) dans (14.15), on obtient la densité d'énergie $\widetilde{U}$ des électrons du vide dans un champ magnétique $\vec{B}$, exprimée au moyen d'une série de puissances d'une quantité b proportionnelle à B.

Isolons la seule partie de $\widetilde{U}$ qui puisse avoir une signification physique; Weisskopf la caractérise par les conditions suivantes :

1° *La densité d'énergie des électrons doit s'annuler avec le champ.*

Cela signifie que le terme d'ordre zéro dans le développement (14.15) n'a pas de signification physique; or, c'est précisément ce terme qui contient l'intégrale divergente de $F(x)$.

2° *La polarisabilité du vide doit s'annuler également dans le cas de l'absence de champ.*

Par « polarisabilité du vide » nous entendons le facteur α qui mesure l'écart par rapport à la théorie de Maxwell dans l'équation

$$\vec{H}=\frac{\partial U}{\partial\vec{B}}=\vec{B}+\frac{\partial U'}{\partial\vec{B}}=\vec{B}(1+\alpha).$$

α est une fonction de $\vec{B}$ et notre postulat consiste à dire qu'il n'y a pas de terme constant dans le développement de cette fonction suivant les puissances de $|\vec{B}|$. Dans ce cas $\frac{\partial U'}{\partial\vec{B}}=\alpha\vec{B}$ ne contient pas de terme du premier ordre et U', pas de terme du second ordre en $|\vec{B}|$.

Nous devons donc éliminer les termes $k=1$ dans (14.18) qui donnent

lieu aux termes en b^2 dans $\widetilde{U}$. En effet l'intégrale de ces termes par rapport à p diverge, ainsi qu'on peut le voir en analysant le comportement de $F^{(1)}(x)$, (14.19). Les termes d'ordre supérieur donnent lieu à des intégrales convergentes ainsi qu'on le voit en (14.18); nous sommes donc conduit à l'expression fini de $\widetilde{U}$ suivante :

$$(14.19)\quad \widetilde{U}_0 = \frac{1}{4\pi^2\hbar^3}\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\frac{B_k}{(2k)!}b^{2k}\int_{-\infty}^{+\infty}F^{(2k-1)}\,dp$$

$$= -\frac{c}{4\pi^2\hbar^3}\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\frac{B_k}{(2k)!}b^{2k}\frac{1.3\ldots(4k-5)}{2^{2k-1}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{(p^2+m_0^2c^2)^{\frac{4k-3}{2}}}.$$

Cette série de puissances peut être exprimée à l'aide des cotangentes hyperboliques par la formule suivante :

$$(14.20)\quad \widetilde{U}_0 = -\frac{1}{8\pi^2}m_0^2c^2\left(\frac{m_0c}{\hbar}\right)^3\int_0^{\infty}\frac{d\eta}{\eta^3}e^{-\eta}\left[\mathfrak{B}\eta\coth(\eta\mathfrak{B})-1-\frac{\eta^2}{3}\mathfrak{B}^2\right];$$

$\mathfrak{B}$ est le champ magnétique rapporté au champ critique b_1 :

$$(14.21)\qquad \mathfrak{B} = \frac{B}{b_1};$$

le champ critique est donné par

$$(14.22)\qquad b_1 = \frac{m_0^2c^3}{e\hbar} = b_0\frac{e^2}{\hbar c} = \frac{b_0}{137},$$

où b_0 est le champ de Coulomb de la charge e à une distance égale au rayon de l'électron :

$$(14.23)\qquad b_0 = \frac{e}{r_0^2},\qquad m_0c^2 = \frac{e^2}{r_0}.$$

Calculons maintenant la contribution du champ électrique, donnée par (14.11). Weisskopf procède en deux étapes. Il admet d'abord que le champ est suffisamment petit pour qu'on puisse appliquer la méthode de perturbation ordinaire, qui fournit ainsi les premiers termes du développement en série suivant les puissances de E; ensuite il détermine la forme générale de la loi cherchée, par des considérations d'invariance relativiste.

Nous nous contenterons d'exposer les caractéristiques essentielles de cette méthode de calcul sans en reproduire les détails. Les termes de

seconde approximation $\overline{U^{(2)}}$ de $\widetilde{U}$, dus au potentiel électrique V, sont proportionnels à

$$\frac{g^2}{\hbar^2} V_0^2 = \frac{1}{2} \overline{E^2},$$

où $g/\hbar$ est la fréquence qui intervient dans (14.11) et où le trait signifie qu'on prend la moyenne sur tout l'espace. (14.10) montre alors que

$$U' = \widetilde{U}^{(0)} + \overline{U^{(2)}} - E \frac{d\overline{U^{(2)}}}{dE} = \widetilde{U}_0 - \overline{U^{(2)}}. \tag{14.24}$$

Le calcul donne

$$\overline{U^{(2)}} = \frac{1}{8\pi^2} m_0 c^2 \left(\frac{m_0 c}{\hbar}\right)^3 \frac{1}{3} \mathfrak{E}^2 \int_0^\infty \frac{d\eta}{\eta^3} e^{-\eta} [\mathfrak{B} \coth(\eta \mathfrak{B}) - 1], \tag{14.25}$$

où

$$\mathfrak{E} = \frac{E}{b_1}. \tag{14.26}$$

Écrivons maintenant les premiers termes du développement de U′ par rapport à $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{E}$ déduits de (14.20) et (14.25), à savoir

$$\left\{\begin{aligned} \widetilde{U}_0 &= -\frac{1}{360\pi^2} m_0 c^2 \left(\frac{m_0 c}{\hbar}\right)^3 \left(\mathfrak{B}^4 + \frac{4}{7}\mathfrak{B}^6 + \ldots\right), \\ \overline{U^{(2)}} &= \frac{1}{360\pi^2} m_0 c^2 \left(\frac{m_0 c}{\hbar}\right)^3 (5\mathfrak{E}^2\mathfrak{B}^2 - 2\mathfrak{E}^2\mathfrak{B}^4 + \ldots). \end{aligned}\right. \tag{14.27}$$

Ces formules sont valables pour des champs $\vec{E}$, $\vec{B}$ parallèles entre eux; on les généralise pour des champs arbitraires au moyen du raisonnement suivant.

Nous savons, d'après le paragraphe 4, que la densité d'énergie U ne peut être une fonction arbitraire de $\vec{E}$, $\vec{B}$ (ou de D, $\vec{H}$), le postulat de la relativité imposant certaines conditions, lesquelles d'ailleurs ne sont pas très simples. D'un autre côté nous savons qu'on peut choisir arbitrairement le lagrangien L en fonction des invariants élémentaires $E^2 - B^2$ et $\vec{E}\vec{B}$; lorsqu'on se donne L on obtient U au moyen de l'équation

$$U = \vec{E}\vec{D} - L = \vec{E}\frac{\partial L}{\partial \vec{E}} - L. \tag{14.28}$$

Soit

$$L = L^0 + L^1 \tag{14.29}$$

le développement de L, où

$$(14.30)\quad \begin{cases} L^0 = \frac{1}{8}(E^2 - B^2), \\ L^1 = \alpha(E^2 - B^2)^2 + \beta\left(\vec{E}\vec{B}\right)^2 + \xi(E^2 - B^2)^3 + \zeta(E^2 - B^2)\left(\vec{E}\vec{B}\right)^2 + \ldots. \end{cases}$$

On obtient à partir de (14.28)

$$(14.31)\quad \begin{aligned} U^1 = {} & \alpha(E^2 - B^2)(3E^2 + B^2) + \beta\left(\vec{E}\vec{B}\right)^2 \\ & + \xi(E^2 - B^2)^2(5E^2 + B^2) + \zeta\left(\vec{E}\vec{B}\right)^2(3E^2 - B^2) + \ldots. \end{aligned}$$

Il suffit de comparer (14.27) et (14.31) pour obtenir les valeurs de α, β, ξ, ζ, ... :

$$(14.32)\quad \begin{cases} \alpha = \frac{1}{360\pi^2} m_0 c^2 \left(\frac{m_0 c}{\hbar}\right)^3 \frac{1}{b_1^4} = \frac{1}{360\pi^2} \frac{e^4 \hbar}{m_0^4 c^7} = \frac{1}{360\pi^2} \frac{\hbar c}{e^2} \frac{1}{b_0^2}, \\ \beta = 7\alpha, \\ \xi = \frac{1}{360\pi^2} m_0 c^2 \left(\frac{m_0 c}{\hbar}\right)^3 \frac{4}{7} \frac{1}{b_1^6} = \frac{4}{7} \frac{1}{360\pi^2} \frac{e^6 \hbar^3}{m_0^8 c^{13}} = \frac{4}{7} \frac{1}{360\pi^2} \left(\frac{\hbar c}{e^2}\right)^3 \frac{1}{b_0^4}, \\ \zeta = \frac{13}{2}\xi. \end{cases}$$

Des considérations d'invariance analogues peuvent également être employées pour déterminer les termes de U' d'ordre élevé en E. Le fait que L ne dépend que de $E^2 - B^2$ et $\left(\vec{E}.\vec{B}\right)$, signifie qu'il existe par exemple entre les coefficients E^k et B^k une relation numérique.

Si l'on désigne par RA et IA respectivement la partie réelle et imaginaire de A, le résultat final s'écrit

$$(14.33)\quad \begin{aligned} L' = {} & \frac{b_1^2}{8\pi^2} \frac{e^2}{\hbar c} \int_0^\infty e^{-\eta} \frac{d\eta}{\eta^3} \\ & \times \left[i\eta\left(\vec{\mathfrak{E}}\vec{\mathfrak{B}}\right) \frac{\cos\eta\, R\left\{\sqrt{\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{B}^2 + 2i\left(\vec{\mathfrak{E}}\vec{\mathfrak{B}}\right)}\right\}}{\cos\eta\, I\left\{\sqrt{\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{B}^2 + 2i\left(\vec{\mathfrak{E}}\vec{\mathfrak{B}}\right)}\right\}} + 1 + \frac{\eta^2}{3}(\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{B}^2) \right]. \end{aligned}$$

Cette expression a été découverte par Heisenberg et Euler [2] à l'aide d'une méthode beaucoup plus compliquée que la précédente, qui peut être décrite comme une théorie de la « diffusion de la lumière par la lumière ».

Nous voyons donc que la théorie des « trous » nous conduit à un lagrangien bien défini pour le champ électromagnétique. Il s'agit maintenant de le comparer aux divers lagrangiens que nous avons introduits

dans les paragraphes précédents dans le but de rendre possible l'assimilation de la masse à l'énergie électromagnétique d'une charge ponctuelle.

Cette dernière conception est évidemment en contradiction avec la théorie que nous venons de développer et dans laquelle la masse de l'électron est une constante fondamentale de l'équation d'onde qui constitue notre point de départ. Nous ne pouvons donc espérer trouver un accord complet entre les résultats de deux théories si dissemblables quant à leurs hypothèses de base; néanmoins il y aura lieu d'être satisfait si l'on peut les amener à coïncider dans le domaine où toutes les deux ne s'écartent pas trop du point de départ commun, à savoir dans le domaine des équations de Maxwell.

Nous aurons donc à comparer le développement (14.30) avec celui d'un lagrangien d'un type étudié dans les paragraphes précédents. Ainsi que nous l'avons vu, il y a une ambiguïté considérable dans le choix de cet hamiltonien, mais nous pouvons raisonnablement espérer que les coefficients des développements de toutes les fonctions ne différeront pas beaucoup entre eux. Dans ces conditions prenons la fonction que nous avons longuement étudiée.

$$(14.34)\qquad L = \frac{b^2}{4\pi}\left[1 - \sqrt{1 + \frac{B^2 - E^2}{b^2} - \frac{(\vec{B}\vec{E})}{b^4}}\right] = L^0 + L^1 + \ldots,$$

que nous écrivons en unités électrostatiques et avec le signe —, pour être en accord avec les formules de Weisskopf. Le développement donne

$$(14.35)\qquad \begin{cases} L^0 = \dfrac{1}{8\pi}(E^2 - B^2), \\ L^1 = \dfrac{1}{32\pi b^2}\left[(E^2 - B^2)^2 + 4(\vec{E}\vec{B})^2\right]. \end{cases}$$

La comparaison avec (14.30) donne

$$(14.36)\qquad \alpha = \frac{1}{32\pi b^2}, \qquad \beta = 4\alpha.$$

On constate déjà une divergence entre les deux théories : dans celle des « trous », on a $\frac{\beta}{\alpha} = 7$ (formule 14.32), et dans celle-ci on a $\frac{\beta}{\alpha} = 4$. Néanmoins, si nous passons outre, et si nous postulons l'identité des

coefficients α dans les deux théories, nous pouvons écrire la relation

$$\frac{\hbar c}{e^2} = \frac{45\pi}{4}\frac{b_0^2}{b^2}. \tag{14.37}$$

D'un autre côté, b est relié au « rayon électronique » par $b = \frac{e}{r_0^2}$ et r_0 à la masse propre par $m_0 c^2 = \frac{e^2}{r_0} 1,2361$, de sorte que

$$b = \frac{e}{\left(\frac{e^2}{m_0 c^2} 1,2361\right)^2} = \frac{b_0}{(1,2361)^2}. \tag{14.38}$$

En substituant dans (14.37), on trouve

$$\frac{\hbar c}{e^2} = \frac{45\pi(1,2361)^4}{4} = 82.$$

Ce résultat, dû à Euler et Kockel [3], présente un intérêt considérable. Il montre qu'en postulant l'identité des écarts d'avec les équations de Maxwell, des termes des développements, obtenus, d'une part, au moyen de la théorie quantique du vide et d'autre part au moyen de la théorie classique de la masse électromagnétique, on est conduit à une relation entre la charge et la constante de Planck; en d'autres termes on obtient une valeur numérique pour la constante de structure fine. Cette valeur est trop faible, la valeur expérimentale étant $\frac{137}{82} = 1,67$ fois plus grande [4]; néanmoins, l'ordre de grandeur est correct et le procédé de calcul montre comment un nombre, sans dimensions, de cet ordre, peut se présenter sous forme d'une combinaison d'autres facteurs, comme par exemple les facteurs 45, etc., dans (14.38).

Ce raisonnement constitue la première indication connue d'une explication théorique du « mystérieux » nombre 137, si nous laissons de côté les spéculations d'Eddington d'après lesquelles ce nombre serait un entier donné par la formule $\frac{n^2(n^2+1)}{2} + 1$ pour $n = 4$.

Établissons maintenant une comparaison entre les deux théories pour des valeurs élevées du champ.

Remarquons en premier lieu que le « champ caractéristique » b_1 est beaucoup plus petit que le champ absolu de la théorie unitaire; en effet, on a, d'après (14.22) et (14.38),

$$b_1 = \frac{b_0}{137} = \frac{(1,2361)^2}{137} b = \frac{b}{90}. \tag{14.40}$$

Ensuite observons que les termes d'ordre élevé dans le développement de l'expression (14.33) deviennent, pour de grandes valeurs de $\vec{E}$:

$$L' \to \frac{e^2}{24\pi^2\hbar c} E^2 \log \frac{E}{b_1} \tag{14.41}$$

(et une expression similaire pour des grandes valeurs de $\vec{B}$). Le rapport entre ce terme additionnel et le terme correspondant $\frac{1}{4\pi} E^2$ de la théorie de Maxwell est

$$\frac{L^1}{L^0} \to \frac{1}{3\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \log \frac{E}{b_1} = \frac{1}{1290} \log \frac{E}{b_1}. \tag{14.42}$$

Ce résultat démontre que, même pour des champs très élevés, les termes non-linéaires qu'introduit la théorie des trous ne constituent que de très faibles corrections des termes de Maxwell. Un lagrangien du type (14.33) n'est donc d'aucune utilité pour le problème de la masse électromagnétique. Ce résultat négatif ne doit pas nous surprendre ; il suffit en effet, de nous rappeler que l'origine de ce lagrangien est l'équation d'onde de l'électron et que cette équation contient déjà la masse comme coefficient d'un terme essentiel.

15. **Remarques finales.** — Le mémoire qui précède n'examine qu'une seule face du problème général de l'adaptation des théories physiques aux résultats des découvertes expérimentales modernes. L'électrodynamique non-linéaire peut être considérée comme une *superstructure* de la théorie classique de Maxwell; il existe cependant une *infrastructure* dont le rôle est de réduire les lois de Maxwell à un ensemble plus simple d'équations : je veux parler de la théorie de la lumière basée sur l'hypothèse du neutrino, telle qu'elle a été imaginée par de Broglie et complétée par Jordan et Kronig. Nous ne pouvons deviner à l'heure actuelle laquelle de ces conceptions sortira victorieuse du débat, et nous ne pouvons pas savoir si finalement elles ne vont pas se confondre en une seule qui les embrassera toutes les deux. Un seul point semble acquis : la certitude qu'il nous manque à l'heure actuelle un principe général qui régisse les phénomènes à l'échelle nucléaire. Le devoir des théoriciens est de suivre attentivement les recherches expérimentales et d'analyser avec soin leurs résultats dans l'espoir de trouver une indication concernant ce principe encore inconnu. Le but de ce mémoire est précisément de fournir une pareille analyse en ce qui concerne l'état actuel de l'électrodynamique.

NOTES ET BIBLIOGRAPHIE.

INTRODUCTION 1. — J. J. THOMSON, *Recollections and reflections*, London, G. Bell and Sons, Ltd, 1936.

2. P. WEISS, *Proc. Roy. Soc. London A*, vol. 156, 1936, p. 192.

§ 1. — 1. Exposés généraux concernant le calcul des variations et le calcul fonctionnel :

E. CARTAN, *Leçons sur les invariants intégraux*, Hermann, Paris, Ch. I-III.

V. VOLTERRA, *Theory of functionals*, London, 1930.

TH. DE DONDER, *Théorie Invariantive du Calcul des variations*, Paris, 1935.

Les ouvrages suivants traitent des problèmes de variations particulières dans l'espace à n dimensions.

V. VOLTERRA, *Act. Lincei Rend. Roma*, 4e série, t. VI, 1, 1890, p. 43.

D. HILBERT, *Göttinger Nachr.*, 1900, p. 253; 1905, p. 159.

M. FRÉCHET, *Ann. di Math.*, 3e série, t. XI, 1905, p. 187,

G. PRANGE, *Die Hamilton-Jacobische Theorie für Doppelintegrale* (*Dissertation*, Göttingen, 1915).

M. G. JUVET, *Sur une équation aux dérivées fonctionnelles partielles et sur une généralisation du théorème de Jacobi* (*Thèse*, Paris, 1926).

§ 2. — 1. F. KLEIN, *Göttingen Nachr.*, 1918, p. 171 et 394.

§ 3. — 1. G. MIE, *Ann. d. Phys.*, 4e série, Bd. 37, 1912, p. 511; 39, 1912, p. 1; 40, 1913, p. 1.

2. Divers traités sur le calcul tensoriel :

H. WEYL, *Raum. Zeit. Materie*, 5th éd., Berlin, 1923.

W. PAULI, *Relativitätstheorie* (*Encyclop. d. Math. Wiss.*, V, t. 19, p. 539).

A. EDDINGTON, *The Mathematical Theory of Relativity*, Cambridge, 1922.

J. A. SCHOUTEN, *Der Ricci-Calcül*, Berlin, 1924.

J. LEVI-CIVITA, *The absolute differential calculus*, London, 1935.

3. La bibliographie du sujet est trop vaste pour pouvoir trouver place ici.

4. Voir, par exemple, l'article de PAULI dans l'*Encyclopédie allemande*, cité au N° 2, p. 609.

5. Le raisonnement de la fin du § 3 n'est pas rigoureux à cause de l'apparition des fonctions variationnelles arbitraires δx^k comme coefficients des $\mathfrak{U}^l_k$ ou $\mathfrak{C}^l_k$ dans l'expression (3.23). Dans le cas de l'électrodynamique unitaire (voir § 6) Weiss a récemment développé un calcul qui conduit rigoureusement aux $\mathfrak{C}^l_k$ au lieu des $\mathfrak{U}^l_k$ et qui sera publié sous peu. Son raisonnement est basé « sur l'invariance de jauge » [voir § 5 (5.18)], qui est une propriété caractéristique de l'électrodynamique unitaire. Dans le cas général de l'électrodynamique de Mie il n'y a pas « d'invariance de jauge », donc un tel calcul est impossible. Ce fait peut être regardé comme une raison de plus contre la théorie de Mie, en dehors des autres discutées à la fin du § 5.

§ 4. — 1. La démonstration correspondant aux deux relations (4.14) dans le cas du champ gravitationnel a été esquissée par Klein dans le Mémoire cité au § 2, N° 1. On peut trouver également la seconde condition (4.15) dans l'article de PAULI et en plusieurs autres publications.

2. Voir, par exemple le § 48 de A. EDDINGTON (Ouvrage cité au § 3, 2).
3. P. WEISS, dans sa thèse déjà citée, a démontré par une autre voie algébrique les conditions (3.12) dans le cas où L dépend seulement de F et G. La démonstration du texte ne semble pas avoir été indiquée dans aucune publication connue.

§ 5. — 1. M. BORN, *Göttinger Nachr.*, 1914, p. 1.
2. Ce fait, clairement expliqué dans l'ouvrage de WEYL (§ 3, N° 2) et dans l'article de PAULI, a fait l'objet d'un examen détaillé par VAN DANTZIG (*Proc. Cambr. Phil. Soc.*, 1934, p. 421).
3. L'exposé le plus complet de cette théorie se trouve dans les articles de LORENTZ dans l'*Encyclop. d. Math. Wiss.* V, t. 3.
4. W. KAUFMANN, *Gött. Nachr.*, 1901, p. 143; 1902, p. 291; 1903, p. 90.
5. Les recherches d'ABRAHAM ont été réunies dans son ouvrage bien connu : *Theorie der Elektrizität*, 3 Ed., 1914, Berlin; on y trouvera la bibliographie correspondante dans le volume II.
6. M. BORN, *Ann. d. Phys.*, 4e série, t. 30, 1909, p. 1.
7. P. LANGEVIN, *Jubilé de Marcel Brillouin*, p. 426.

§ 6. — 1. M. BORN, *Nature*, t. 132, 1933, p. 282. *Proc. Roy. Soc. A*, t. 143. 1934, p. 410.
M. BORN and L. INFELD, *Nature*, t. 132, 1933, p. 970, 1004; *Proc. Roy. Soc. A.*, t. 144, 1934, p. 425.
J. FRENKEL, *Proc. Roy. Soc. A.*. t. 146, 1934, p. 930.
2. B. S. MADHAVA RAO, *Proc. Indiam Ac. Sciences*, vol. 4, 1936, p. 436.

§ 7. — 1. S. SCHUBIN and A. SMIRNOV, *C. R. Acad. Sciences de l'U. R. S. S.*, vol. 1, 10e série, 1935, p. 69, ont traité des cas particuliers.
2. M. H. L. PRYCE, *Proc. Cambr. Phil. Soc.*, vol. 31, 1935, p. 625.
3. M. H. L. PRYCE, *Proc. Cambr. Phil. Soc.*, vol. 31, 1935, p. 50.
4. B. S. MADHAVA RAO, *Proc. Indian Ac. Sciences*, vol. 4, 1936, p. 355.
5. Dès 1907, J. Stark avait émis l'hypothèse de l'existence d'un électron à symétrie axiale, et avait essayé de la confirmer expérimentalement. Ses efforts ne furent cependant pas couronnés de succès, car il passa à côté de l'explication, découverte pas Pauli, Uhlenbeck et Goudmit, de la multiplicité des lignes spectrales au moyen du spin. Récemment, Stark a renouvelé sa tentative (*Phys. Zeitschr.*, t. 38, 1937, p. 269), en essayant d'établir un rapport entre la structure axiale de l'électron et la supraconductivité des métaux, mais, tout comme auparavant, sans chercher à donner une forme mathématique à sa pensée. D'ailleurs, s'il avait essayé de le faire en utilisant la théorie classique dont il est un strict partisan, il aurait rencontré certainement des difficultés du même ordre ou même plus considérables que celles sur lesquelles échoue la théorie classique de l'électron. Les calculs de Madhava Rao constituent en quelque sorte la réalisation du programme tracé par Stark; ils montrent clairement que n'importe quelle théorie classique de l'électron annulaire est incapable de représenter les faits expérimentaux et mettent en évidence la raison de cet échec.

§ 8. — 1. La suggestion d'Infeld a été développée dans le second Mémoire, de M. Born et L. Infeld, cité sous le n° § 6, 1.
2. E. SCHRÖDINGER, *Proc. Roy. Soc.*, A, t. 150, 1935, p. 465.
3. Le double signe du radical représentant la densité d'énergie dans un champ électromagnétique est analogue ou double signe de l'énergie d'un électron dans le traitement relativiste. Dans ce dernier cas, Dirac a montré comment on peut l'éliminer par l'introduction des matrices de spin. Il est tentant d'essayer d'appliquer le même procédé à l'énergie

d'un champ électromagnétique; j'ai réussi à montrer que pour un point donné de l'espace, il est possible d'éliminer la racine carrée, sans utiliser d'autres matrices que celles employées par Dirac (M. Born, *Proc. Cambr. Phil. Soc.*, t. 32, 1936, p. 102). La théorie générale exigerait alors l'attribution de matrices de spin indépendantes à chacun des points de l'espace et il ne m'a pas été possible de développer suffisamment cette idée pour la rendre féconde.

4. B. S. Madhava Rao, *Proc. Indian Ac. Sciences*, t. 4, 1936, p. 575.
5. P. Weiss, *Proc. Cambr. Phil. Soc.*, vol. 33, 1937, p. 79.
6. L. Infeld, *Proc. Cambr. Phil. Soc.*, vol. 32, 1936, p. 127; vol. 33, 1937, p. 70; L. Infeld and B. Hoffmann, *Phys. Rev.*, vol 51, 1937, p. 765.

§ 9. — 1. Voir les Mémoires de Born, Infeld, Frenkel cités sous le n° § 6, 1.
2. E. Feenberg, *Phys. Rev.*, vol. 47, 1935, p. 148.
3. M. H. L. Pryce, *Proc. Roy. Soc.*, (A), vol 155, 1936, p. 597.
4. L. de Broglie, *Comptes rendus*, t. 199, 1934, p. 813; *Une nouvelle conception de la lumière*, Hermann, Paris, 1934.
5. P. Jordan, *Zs. f. Phys.*, t. 93, 1935, p. 464; t. 98, 1936, p. 759; t. 99, 1936, p. 109; t. 100, 1936, p. 569.
6. B. Hoffmann, *Quart. Journ. of Math.*, vol. 6, 1935, p. 149; *Phys. Rev.*, vol. 47, 1935, p. 877.
7. L. Infeld and B. Hoffmann, cité sous le n° § 8, 6.

§ 10. — 1. La Méthode utilisée dans le texte est indiquée dans l'article de M. Born, *Proc. Indian Acad. Sciences*, vol. 3, 1936, part. I, p. 8; part. II, p. 85.
2. Cette tentative se trouve dans le Mémoire cité au n° 1.
3. H. A. Kramers, *Physica*, t. 1, 1934, p. 825; Zeeman, *Verhandelingen*, 1935, p. 403.
4. G. Racah a démontré que la force de Lorentz est la seule qui puisse être déduite d'un principe variationnel pourvu qu'elle ne dépende des dérivées des coordonnées d'ordre supérieur à un (*Rend. dei Lincei*, vol, 25, 1937, p. 223).

§ 11. — 1. M. Born, W. Heisenberg et P. Jordan, *Zeitschr. f. Phys.*, t. 35, 1925, p. 557.
2. W. Heisenberg, *Ber. d. Sächs. Ac. d. Wiss.*, vol. 83, 1931, p. 5.
3. On trouvera des exposés clairs et complets de cette théorie dans : E. Fermi, *Rev. of Modern Physics*, vol. 4, 1932, p. 87; W. Heitler, *The Quantum Theory of Radiation*, Oxford, 1936; L. Nordheim, *Théorie des chocs et du rayonnement* (*Ann. de l'Institut Poincaré*, 1936).
4. W. Heisenberg and W. Pauli, *Zeitschr. f. Phys.*, t. 56, 1929, p. 1; t. 59, 1930, p. 168.
5. M. Born et L. Infeld, *Proc. Roy. Soc.*, (A), vol. 147, 1934, p. 522; vol. 150, 1935, p. 141.
6. M. H. L. Pryce, *Proc. Roy. Soc.*, (A), vol. 155, 1936, p. 597. vol. 159, 1937, p. 355.
7. Dans sa Thèse et dans les *Proc. Roy. Soc.*, (A), t. 156, 1936, p. 192, P. Weiss a développé une Méthode directe de déduire les lois de commutation, en introduisant une nouvelle définition des variables « canoniquement conjuguées » valable pour des systèmes à plus d'une variable indépendante. Cette Méthode a l'avantage d'être absolument invariante du point de vue relativiste et de mettre en évidence le rôle important joué par l'énergie totale dans la Méthode de quantification de Heisenberg et Pauli.
8. P. Weiss a donné (dans le Mémoire cité sous 7, une généralisation des lois de commutation qui est valable, lorsqu'au lieu d'une section d'univers $t =$ const., on se donne une section à 3 dimensions quelconque.

Voir également : V. Fock, *Phys. Zeitschr. d. Sowjetunion*, vol. 6, 1934, p. 425.

§ **12.** — 1. La Méthode de P. Weiss (cité sous § **11**, 7, 8) met en évidence la raison profonde de la dégénérescence mentionnée dans le texte, la disparition du moment correspondant au potentiel scalaire. P. Weiss a également établi de nouvelles lois de commutation reliant les potentiels et la charge totale, mais n'en a fait aucune application.

2. L. Infeld, *Proc. Roy. Soc.*, (A), vol. 158, 1937, p. 368.

3. Voir le Mémoire de Pryce cité sous le n° § **11**, 6.

4. M. H. L. Pryce, *Proc. Cambr. Phil. Soc.*, vol. 32, 1936, p. 614.

§ **13.** — 1. Cette équation d'ondes a été établie par plusieurs auteurs : E. Schrödinger, *Ann. d. Phys.*, t. 81, 1926, p. 129; O. Klein, *Zeitschr. f. Phys.*, t. 37, 1926, p. 895; V. Fock, *Zeitschr. f. Phys.*, t. 38, 1926, p. 242; t. 39, 1926. p. 226; J. Kudar, *Ann. d. Phys.*, t. 81, 1926, p. 632; W. Gordon, *Zeitschr, f. Phys.*, t. 40, 1926, p. 117.

2. La discussion complète de cette question se trouve dans W. Pauli, *Geiger-Scheel's Handbuch d. Physik* (J. Springer), vol. 24, part. II (2e édit., 1933), p. 214.

3. P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc. London*, (A), vol. 117, 1928, p. 610; vol. 118, 1928, p. 341, et également dans l'ouvrage, *The Principles of Quantum Mechanics* (2e édit., 1935, Oxford). Pour compléter cette bibliographie, voir l'article de Pauli dans le *Handbuch*, cité au n° 2.

4. P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc. London*, (A), vol. 126, 1930, p. 360; *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, vol. 26, 1930, p. 361.

5. C. D. Anderson, *Phys. Rev.*, t. 43, 1933, p. 491.

6. P. M. S. Blackett and G. Occhialini, *Proc. Roy. Soc.* (A), vol. 139, 1933, p. 699.

7. P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.* (A), vol. 133, 1931, p. 61.

8. La bibliographie du sujet est trop vaste pour pouvoir trouver place ici : on la trouvera dans l'excellent article de L. Nordheim, *Théorie des chocs et du rayonnement pour les énergies élevées* (*Ann. de l'Institut Henri Poincaré*, 1936).

9. P. A. M. Dirac, *Proc. Cambr. Phil. Soc.*, vol. 30, 1934, p. 150.

10. W. Heisenberg, *Zeitschr. f. Phys.*, t. 90, 1934, p. 209. Voir ensuite E. A. Uehling, *Phys. Rev.*, t. 48, 1935, p. 55; R. Serber, *Phys. Rev.*, t. 48, 1935, p. 49.

11. V. Weisskopf, *Kgl. Danske Videnskabernes Selskab. Math.-fys. Meddel.*, t. 14, 1936, p. 6.

12. H. Euler and B. Kockel, *Naturwiss.*, t. 23, 1935, p. 246; W. Heisenberg and H. Euler, *Zeitschr. f. Phys.*, t. 98, 1936, p. 714; H. Euler, *Ann. d. Phys.* (5), t. 26, 1936, p. 398.

13. D. R. Hartree, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, t. 26, 1928, p. 89.

14. W. Pauli aud V. Weisskopf, *Helvetica Physica Acta*, vol. 7, 1934, fasc. 7, p. 709.

§ **14.** — 1. O. Klein, *Zeitschr. f. Phys.*, t. 53, 1929, p. 157.

2. Dans le second Mémoire cité au n° § **13**, 12.

3. Dans le premier Mémoire cité au n° § **13**, 12.

4. En utilisant un autre Lagrangien, L. Infeld a réussi à obtenir la valeur $\frac{\hbar c}{e} = 130$; voir L. Infeld, *Nature*, t. 137, 1936, p. 658 et *Proc. Cambr. Phil. Soc.*, vol. 33, 1937, p. 70.