

ANNALES DE L'I. H. P.

L. DE BROGLIE

**Passage des corpuscules électrisés à travers les
barrières de potentiel**

Annales de l'I. H. P., tome 3, n° 4 (1933), p. 349-446

http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1933__3_4_349_0

© Gauthier-Villars, 1933, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P. » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Passage des corpuscules électrisés à travers les barrières de potentiel ⁽¹⁾

PAR

LOUIS DE BROGLIE

Introduction

J'ai choisi comme sujet de mon cours pour cette année : le passage des corpuscules électrisés au travers des barrières de potentiel et les théories qui s'y rattachent. J'ai choisi ce sujet parce qu'il fournit une belle illustration des méthodes de la Mécanique ondulatoire et montre comment bien des problèmes de la Dynamique de l'électron se sont trouvés transformés en des problèmes très analogues à ceux de l'optique classique.

Pour bien dégager l'intérêt de la question, nous commencerons par rappeler comment les notions de corpuscule et d'onde se sont rencontrées en Mécanique ondulatoire. Il y a encore quelques années, on imaginait que les corpuscules formant la matière (électrons, protons) pouvaient être considérés comme de simples points matériels électrisés, obéissant aux lois de la Dynamique classique, complétée au besoin par les corrections introduites par la théorie de Relativité. De même, les édifices plus complexes désignés sous le nom d'atomes et de molécules pouvaient aussi, chaque fois qu'il s'agissait de leurs mouvements d'ensemble, être traités comme des points matériels soumis à l'ancienne Dynamique. Ainsi l'étude de la matière devait consister essen-

(1) Extraits d'un cours professé à l'Institut Henri Poincaré de la Faculté des Sciences de Paris pendant l'année scolaire 1931-1932.

tiellement à suivre, à l'aide des lois de la Dynamique classique, les mouvements des corpuscules élémentaires.

Tout autre était la méthode à employer pour l'étude des phénomènes lumineux. Ici, plus de corpuscules en mouvement dont les lois dynamiques permettraient de suivre en fonction du temps la variation des coordonnées, mais des ondes se propageant suivant une équation aux dérivées partielles du type: $\Delta u = \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, généralisation de l'équation des cordes vibrantes. La vitesse de propagation V est caractéristique du milieu où se propage l'onde. Elle est partout la même dans les milieux homogènes, le vide par exemple, mais peut varier d'un point à l'autre dans les milieux hétérogènes. Cette vitesse V est définie par l'indice de réfraction qui donne en chaque point le rapport de la vitesse dans un milieu de référence homogène (généralement le vide), à la vitesse V .

D'ailleurs, la nature de l'onde lumineuse avait été conçue de façons assez différentes. Fresnel et ses continuateurs la considérait comme la vibration d'un milieu élastique très subtil, pénétrant tous les corps, l'éther. Evidemment, ce milieu devait posséder des propriétés un peu singulières puisqu'il devait n'opposer aucune résistance au mouvement des corps et cependant être plus rigide que l'acier. Plus tard, avec MAXWELL, la vibration lumineuse fut considérée comme de nature électromagnétique. L'interprétation de l'onde lumineuse comme étant la vibration mécanique de quelque milieu en devenait malaisée ; elle fut complètement abandonnée à la suite du développement de la théorie de Relativité qui exige l'abandon de tout milieu de référence universel, comme l'éther. Néanmoins, la théorie ondulatoire de la lumière basée essentiellement sur l'équation de propagation des ondes et vérifiée avec une extrême précision par l'étude expérimentale des phénomènes d'interférences et de diffraction, gardait toute sa valeur. Le point essentiel de la théorie, tout à fait indépendant de l'interprétation élastique, électromagnétique ou autre qu'on veut en donner, c'est que l'énergie localisée en un point de l'onde lumineuse est proportionnelle au carré de l'amplitude de l'onde en ce point : aussi donne-t-on à ce carré de l'amplitude le nom d'intensité de l'onde.

Voici donc deux ordres de phénomènes : les mouvements des particules matérielles d'une part, la progression de la lumière d'autre part, qui paraissent obéir à des lois essentiellement différentes. Le mouve-

ment des particules s'étudie en suivant la variation des coordonnées des particules au cours du temps, variation qui est déterminée par des équations *différentielles* de la Mécanique. Pour chaque particule tout le phénomène de mouvement n'intéresse qu'une seule courbe de l'espace, la trajectoire. De plus, exception faite pour la classe très particulière des mouvements périodiques, il n'y a aucun intervalle de temps, ni aucune longueur qui puisse jouer un rôle particulier dans la progression d'une particule. Rien ne peut nous faire prévoir, dans la conception classique, des phénomènes de mouvements de particules présentant quelque analogie avec les phénomènes de diffraction, d'interférences ou de résonance, si caractéristiques de la théorie des ondes et faisant intervenir dans les formules des nombres entiers.

Au contraire, dans la théorie classique des ondes, le phénomène de propagation intéresse une région étendue de l'espace (et non pas seulement une ligne) ; il est régi par une équation *aux dérivées partielles*, précisément parce que l'onde est représentée dans toute une région de l'espace par une fonction $u(x,y,z,t)$, tandis que, pour la particule matérielle, nous avons avec les anciennes idées trois fonctions du temps $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ qui suivent la mobile dans son mouvement. De plus, toute onde peut se décomposer en une superposition d'ondes sinusoïdales simples de fréquences bien définies. En optique, chaque fréquence correspond à une couleur simple (d'où le nom d'onde monochromatique donné aux ondes sinusoïdales) et il existe des dispositifs (prismes et réseaux) qui permettent d'opérer en fait cette décomposition en lumières simples qui est toujours possible mathématiquement d'après le théorème de FOURIER. Une onde monochromatique dans un milieu homogène est définie par sa fréquence ν et par sa longueur d'onde, la longueur d'onde se déduisant de la fréquence par la relation $\lambda = \frac{V}{\nu}$ ou V est la vitesse de propagation dans le milieu homogène. La propagation de l'onde monochromatique peut dans certains cas dépendre beaucoup de la longueur d'onde. Par exemple, si dans le milieu homogène, on interpose sur le trajet de l'onde certains obstacles, l'influence de ces obstacles sur la propagation pourra être toute différente suivant que certaines dimensions de ces obstacles sont ou ne sont pas des multiples entiers de la longueur d'onde.

Voilà bien des différences essentielles entre le mouvement d'un corpuscule et la propagation d'une onde. Mais à y regarder de près, ces

différences sont peut-être moins profondes qu'un examen superficiel ne pourrait le faire croire. Remarquons d'abord que le mouvement d'un corpuscule dépend du champ de force dans lequel il est plongé, c'est-à-dire en quelque sorte d'un état du milieu où s'effectue la progression. Cet état est la plupart du temps défini en Physique par la fonction potentielle dont la force est le gradient et, dans les équations de Newton, les seconds membres contiennent alors les dérivées partielles de cette fonction. Il est illusoire de dire, comme je le faisais tout à l'heure, que le mouvement d'un corpuscule n'intéresse qu'une ligne, qu'une courbe de l'espace car, en réalité, cette ligne, la trajectoire, est déterminée par la nature du champ de force dans la région de l'espace qui l'avoisine. Ceci se voit très nettement si l'on examine le principe de moindre action de Maupertuis : dans un champ de force constant, dérivant d'une fonction potentielle $V(x, y, z)$, la trajectoire d'un corpuscule d'énergie E passant par deux points A et B est telle que l'intégrale $\int \sqrt{2m(E - V)} ds$, prise le long de la trajectoire de A en B,

soit stationnaire et pour appliquer ce principe, il faut considérer des courbes allant de A en B et infiniment voisines de la trajectoire, ce qui fait intervenir les propriétés du champ dans toute la région voisine de la trajectoire.

Mais ce sont surtout les travaux d'HAMILTON, qui ont mis en lumière, il y a un siècle, les analogies profondes qui existent sous certaines conditions entre le mouvement des corpuscules conçu suivant la dynamique de Newton et la propagation des ondes. On sait que quand l'indice de réfraction ne varie pas trop rapidement d'un point à un autre d'un milieu, la propagation d'une onde peut être suivie par des procédés approximatifs qui constituent l'optique géométrique. On définit les rayons de la propagation d'onde par le principe du temps minimum de Fermat et l'ensemble des rayons forme un ensemble de courbes orthogonales à une famille de surface qu'on nomme les surfaces d'ondes. Bien que le mot « onde » intervienne dans cette dernière dénomination, l'optique géométrique est tout à fait indépendante de toute conception ondulatoire et l'on y étudie la propagation de la lumière par des procédés purement géométriques. Les rayons sont les trajectoires de l'énergie et rien n'empêche de considérer l'ensemble des rayons lumineux comme l'ensemble des trajectoires de petits projectiles qui constituerait la lumière suivant la conception de Newton.

Seulement, l'optique géométrique n'est valable que pour la propagation libre (sans obstacles) dans un milieu à indice lentement variable à l'échelle de la longueur d'onde. S'il y a une variation très brusque de l'indice (comme à la surface de séparation de deux milieux) ou s'il y a des obstacles sur le parcours de la lumière, (écrans, par exemple), alors l'optique géométrique devient impuissante à expliquer les phénomènes qui se produisent et, comme on le sait depuis FRESNEL, seule la théorie ondulatoire peut les interpréter (interférences, diffraction, lames minces). Fort heureusement pour la cohérence de nos explications physiques, l'optique géométrique apparaît à l'étude comme une méthode d'approximation dont la théorie ondulatoire justifie l'emploi chaque fois que la propagation est libre et que l'indice est lentement variable. Comme la notion de rayon perd son sens quand il y a interférence ou diffraction, la théorie corpusculaire qui paraissait compatible avec l'optique géométrique, a dû être abandonnée après FRESNEL.

Le grand mérite d'HAMILTON est d'avoir aperçu l'analogie formelle complète qui existe entre l'optique géométrique et la Dynamique newtonienne des corpuscules. Aux rayons déterminés par le principe du temps minimum, correspondent les trajectoires déterminées par le principe de l'action minimum. A l'ensemble des rayons d'une même propagation, correspond l'ensemble des trajectoires que la Mécanique analytique rattache à une même fonction de Jacobi. Aux surfaces d'ondes, correspondent les surfaces $S = \text{const.}$ d'égale valeur de la fonction de Jacobi. Il reste cependant quelques points importants où l'analogie paraît cesser. C'est le cas, en particulier, pour le rôle joué par la vitesse du corpuscule en Dynamique et par la vitesse de l'onde en optique géométrique. Ce sont ces difficultés qui ont empêché HAMILTON de voir dans l'analogie qu'il découvrait, autre chose qu'une analogie formelle. S'il avait pensé que l'analogie n'était pas seulement formelle, qu'elle avait un sens physique, à quelles conclusions serait-il arrivé ? Puisque la Mécanique de Newton correspond à l'optique géométrique qui n'est elle-même qu'une approximation de l'optique ondulatoire, il aurait dû conclure que la Mécanique de Newton a seulement une valeur limitée, que la véritable Mécanique doit avoir un caractère ondulatoire et admettre la Mécanique de Newton comme première approximation valable dans certains cas, comme la théorie ondulatoire de la lumière admet l'optique géométrique comme première approximation valable dans certains cas. Mais cette idée hardie qui

n'a pu pénétrer dans la Science qu'un siècle plus tard, entraînait une formidable difficulté : de même que la notion de rayon disparaît en passant de l'optique géométrique à l'optique ondulatoire, de même la notion de trajectoire doit disparaître en passant de la Dynamique de Newton à la Mécanique ondulatoire et, dès lors en Mécanique ondulatoire, la notion de corpuscule doit sinon s'évanouir, tout au moins subir une étrange transformation.

Vous savez à la suite de quelles découvertes, l'idée d'une Mécanique ondulatoire s'est développée. L'origine en est dans la théorie des quanta qui est sortie des travaux de PLANCK sur le rayonnement noir. L'idée essentielle, le leitmotiv, de cette théorie, depuis les travaux de PLANCK jusqu'à ceux de BOHR, SOMMERFELD, etc., c'est que les mouvements des particules, du moins à très petite échelle, ne peuvent être prévus d'une façon complète avec la seule aide de la Dynamique de Newton. Parmi tous les mouvements prévus comme possibles par cette dynamique, certains seulement sont réellement existants dans la nature et ces mouvements privilégiés ou quantifiés sont spécifiés par le fait que certaines grandeurs les caractérisant et ayant les dimensions d'une action (énergie $\times$ temps, ML^2T^{-1}), sont des multiples entiers du quantum d'action h de PLANCK. Cette apparition des nombres entiers tout à fait naturelle dans les théories ondulatoires, paraissait inexplicables en Dynamique. On a reconnu depuis qu'elle indique la nécessité de remplacer l'ancienne Dynamique « géométrique » de Newton par une Mécanique ondulatoire, de même qu'en théorie de la Lumière, on a dû remplacer l'optique géométrique par l'optique ondulatoire. Mais la difficulté sera alors de conserver la notion de corpuscule sans pouvoir définir nettement leurs trajectoires.

Une autre catégorie de faits nouveaux a contribué à préciser le sens de l'évolution de nos conceptions. Je veux parler des phénomènes tels que l'effet photoélectrique et l'effet Compton, qui ont montré l'existence de grains d'énergie lumineuse de valeur $h\nu$ dans toute radiation de fréquence ν : pour parler plus prudemment, ces phénomènes ont montré que, dans certains cas, tout se passe comme si les radiations de fréquence ν étaient formées de corpuscules d'énergie $h\nu$. Ceci concorde très bien avec la conception de Newton dite « théorie de l'émission » et nous sommes obligés de revenir à l'idée de corpuscules de lumière malgré l'existence incontestable des phénomènes de diffraction et d'interférences. Ici aussi, il faut donc conserver en une certaine mesure

les notions corpusculaires tout en ne pouvant pas dans le cas général (en dehors du domaine d'application de l'optique géométrique) définir les trajectoires des corpuscules. La Mécanique ondulatoire est parvenue à réaliser le difficile compromis entre la conception des corpuscules et celle des ondes à la fois pour la matière et pour la lumière, mais uniquement au prix d'idées entièrement nouvelles et en particulier d'un certain renoncement aux images claires et au déterminisme parfait des théories classiques. Le principe d'incertitude d'Heisenberg nous a expliqué dans quelle mesure on doit accepter ce renoncement pour pouvoir concilier l'existence des corpuscules avec une dynamique ondulatoire qui, dans le cas général (en dehors du cas correspondant à l'optique géométrique), ne peut définir d'une façon précise la trajectoire des corpuscules et leur progression. J'ai examiné le principe d'incertitude dans mon cours de 1928-29. Je n'y reviendrai ici qu'incidemment.

Mais ce qui nous intéresse maintenant, c'est que la nouvelle Mécanique, en soumettant la Dynamique du corpuscule à une discipline ondulatoire, a permis de prévoir des phénomènes très intéressants que la Dynamique de Newton ne pouvait expliquer. Je citerai en premier lieu précisément les mouvements quantifiés à petite échelle, par exemple les mouvements quantifiés des électrons dans les atomes. La Mécanique ondulatoire est arrivée à les interpréter complètement comme analogues à des phénomènes de résonance, ou d'ondes stationnaires. L'intervention des nombres entiers dans la spécification de ces états quantifiés apparaît alors comme toute naturelle. Un autre phénomène dont la découverte a fourni une preuve expérimentale directe des idées directrices de la Mécanique ondulatoire est le phénomène de la diffraction des électrons par les cristaux (DAVISSON et GERMER, THOMSON, PONTE, RUPP, KIKUCHI, etc.), tout à fait analogue au phénomène de Laue-Bragg pour les rayons X.

Mais la nouvelle Mécanique fait aussi prévoir d'autres genres de phénomènes dont je voudrais vous parler dans ce cours et qui sont très intéressants à étudier théoriquement en raison de leur analogie avec des phénomènes classiques en optique. Voici par exemple un phénomène fondamental de l'optique : celui des lames minces. Interposons normalement sur le trajet d'une onde lumineuse plane de fréquence ν une lame homogène à faces parallèles d'une substance réfringente ; soit λ la longueur d'onde de la lumière *dans la lame*. Si l'épais-

seur de la lame est égale à un multiple impair de $\frac{\lambda}{4}$, les ondes qui se sont réfléchies sur les faces d'entrée et de sortie de la lame sont en concordance de phase et il y a une forte réflexion. Si, au contraire, l'épaisseur de la lame est un multiple pair de $\frac{\lambda}{4}$, c'est-à-dire un multiple entier quelconque de $\frac{\lambda}{2}$, la réflexion sera nulle ou faible. Une manière bien connue de mettre ces phénomènes en évidence est d'employer une lame en forme de coin, c'est-à-dire d'épaisseur variable ; on obtient alors des franges brillantes et des franges noires correspondant aux régions où, suivant l'épaisseur, il y a forte réflexion ou forte transmission. Les anneaux de Newton sont un cas particulier de ceci. Il est assez intéressant de rappeler en passant comment NEWTON qui était partisan de la théorie corpusculaire, cherchait à rendre compte de ces anneaux qu'il avait découverts. Il admettait que les corpuscules de lumière une fois entrés dans le milieu réfringent passaient alternativement et périodiquement par des « accès de facile transmission » et par des « accès de facile réflexion ». On concevait donc que suivant l'épaisseur de la lame, le corpuscule en arrivant à la deuxième surface de séparation pouvait se trouver soit en état de facile réflexion, soit en état de facile transmission. La théorie des ondulations a permis d'expliquer aisément les phénomènes de lames minces et a fait oublier complètement les corpuscules de Newton et leurs accès.

Nous allons avoir à étudier pour les corpuscules matériels des phénomènes entièrement analogues à ceux des lames minces. Nous verrons que dans la nouvelle Mécanique, l'analogue d'un milieu homogène réfringent est une région de l'espace où règne un potentiel constant. Nous examinerons ces cas ainsi que des cas plus généraux où le potentiel n'est pas constant, ce qui correspond au passage de la lumière dans des corps réfringents non homogènes. A ces théories se rattachent des tentatives d'explications de l'effet Ramsauer et de la diffusion anormale des rayons α .

Une autre catégorie de phénomènes prévus par la Mécanique ondulatoire dans cet ordre d'idée se rattache au fait que dans la théorie des ondes, il n'y a jamais de limites infranchissables pour les ondes.

Un premier exemple de ce fait se présente en optique dans la théorie des Caustiques. Pour l'optique géométrique, la Caustique étant l'enveloppe des rayons, est une limite nette du champ de l'éner-

gie lumineuse. Mais si l'on examine de près la question des Caus-
 tiques avec l'optique ondulatoire, on s'aperçoit que la caustique
 est bien, *grosso modo*, la limite de l'énergie lumineuse, mais qu'en
 toute rigueur il y a une petite pénétration des ondes, et par suite
 de l'énergie lumineuse, dans la région extérieure à la caustique. En mé-
 canique ondulatoire, voici ce que cela signifie. Supposons une région
 où règne un champ uniforme. En un point de ce champ sont projetés
 avec une même vitesse initiale dans toutes les directions des corpus-
 cules sensibles au champ ; trouver leur mouvement. Pour l'acienne
 mécanique ce problème est celui du mouvement des projectiles dans
 le champ de la pesanteur (abstraction faite, bien entendu, de la résis-
 tance de l'air) : les trajectoires sont des paraboles d'axe parallèle à
 la direction du champ, et ces paraboles admettent pour enveloppe une
 autre parabole, la parabole de sûreté, à l'extérieur de laquelle (c'est
 là l'origine de son nom) on ne peut être atteint par aucun projectile.
 La parabole de sûreté est une caustique.

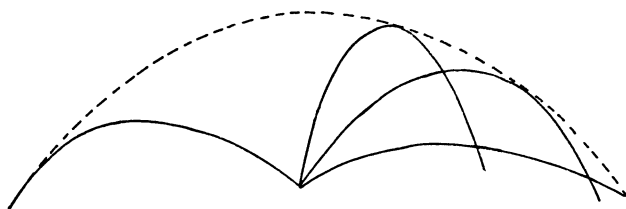


Fig. 1.

La parabole de sûreté est une limite infranchissable pour l'énergie
 de la salve de projectiles. Eh bien ! si l'on traite le même problème en
 Mécanique ondulatoire pour ces corpuscules, on trouvera bien qu'au
 delà de la parabole de sûreté, on a très peu de chances de trouver un
 des corpuscules, mais cependant il y aura tout de même une petite
 probabilité de trouver un corpuscule dans la région extérieure à cette
 parabole-caustique.

De la même façon, l'ombre géométrique du bord d'un écran
 n'est pas une limite réellement absolue pour la lumière, puisque
 la théorie de la diffraction par le bord d'un écran montre qu'il y
 a de la lumière dans l'ombre géométrique. De même encore, lors de
 la réflexion totale de la lumière, il y a une onde évanescente qui
 pénètre légèrement dans le second milieu. Dans tous ces cas, il n'existe

pas de limite absolument nette pour les ondes, dont la décroissance a toujours lieu d'une façon continue quoique souvent très rapide. Nous trouverons des exemples analogues dans la Mécanique ondulatoire des corpuscules. Les ondes associées aux corpuscules ne seront jamais complètement arrêtées par un obstacle et puisque le corpuscule peut se trouver partout où son onde n'est pas nulle, les corpuscules ne pourront jamais être complètement arrêtés par aucune barrière. C'est là aussi une différence fondamentale d'avec l'ancienne Mécanique. Considérons un corpuscule animé d'une énergie E qui arrive dans une région où le potentiel va en croissant, passe par un maximum, puis décroît.

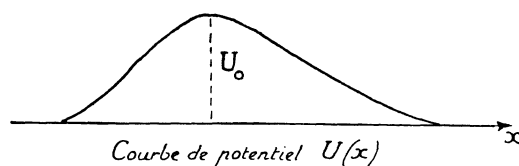


Fig. 2.

C'est une montagne de potentiel. Le corpuscule en gravissant la montagne de potentiel perdra de son énergie cinétique ; si la valeur du potentiel U_0 au sommet de la montagne est supérieure à E , le corpuscule s'arrêtera, son énergie cinétique ne pouvant devenir négative, puis retournera en arrière sans avoir pu franchir la montagne. La montagne de potentiel est donc, en ce cas, dans la Mécanique classique, une barrière infranchissable pour les corpuscules. La Mécanique ondulatoire prévoit un phénomène tout différent. L'onde associée au corpuscule incident subira une réflexion presque totale sur la montagne de potentiel, mais néanmoins, une petite fraction de l'onde pénétrera dans la région située à droite. Ceci doit s'interpréter comme il suit : un corpuscule a beaucoup de chances d'être réfléchi par la montagne et rejeté à gauche, mais, si haute que soit cette montagne, il a toujours une petite chance de pouvoir passer à droite — ou, si l'on veut, étant donné un nuage de corpuscules, d'énergie E , venant de la gauche sur la montagne de potentiel, la presque totalité sera renvoyée vers la gauche avec réflexion, mais il y en aura toujours quelques-uns qui parviendront à franchir la montagne. Il en résulte que si des corpuscules se trouvent dans une région fermée de l'espace, un champ antagoniste

existant à la limite de cet espace pour les empêcher de sortir, il y aura tout de même toujours quelques-uns qui s'échapperont.

Des corpuscules enfermés dans une sorte de cirque entouré par une montagne de potentiel, comme dans la figure 3, auront toujours une chance de s'évader, si haute que soit la montagne. C'est le principe

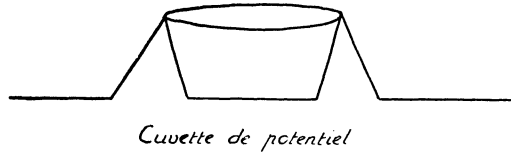


Fig. 3.

de la théorie de la Radioactivité proposée par GURNEY et CONDON et par GAMOW et à laquelle se rattachent plusieurs autres tentatives théoriques. C'est aussi le principe d'une théorie de la catalyse due à M. BORN.

Ce sont ces phénomènes de passage de corpuscules à travers les seuils et barrières de potentiel que nous voulons étudier cette année.

Nous supposons connus les principes fondamentaux et les équations générales de la Mécanique ondulatoire que nous avons déjà plus d'une fois exposés dans d'autres publications ⁽¹⁾.

I

Considérations générales

Méthode de Brillouin-Wentzel. — On sait que l'ancienne mécanique correspond, au point de vue de la mécanique ondulatoire, à l'approximation de l'optique géométrique. Nous allons retrouver et préciser ce résultat dans le cas des problèmes à une seule variable par une méthode due à MM. L. BRILLOUIN et G. WENTZEL.

(1) Voir en particulier : *Introduction à l'étude de la Mécanique ondulatoire*, Hermann, Paris, 1930. — *La théorie de la quantification dans la nouvelle Mécanique*, Hermann, Paris, 1932. Nous renverrons parfois à ces ouvrages dans le cours de l'exposé.

Considérons l'équation de propagation de la mécanique ondulatoire dans le cas des mouvements qui intéressent une seule dimension :

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} [E - U(x)] \psi = 0,$$

où $U(x)$ est la fonction potentielle.

Posons :

$$(2) \quad \psi = e^{\frac{2\pi i}{h} \int^x y dx}.$$

La fonction $y(x)$ peut être développée suivant les puissances croissantes du paramètre $\frac{h}{2\pi i}$ sous la forme :

$$(3) \quad y(x) = y_0(x) + \frac{h}{2\pi i} y_1(x) + \left(\frac{h}{2\pi i}\right)^2 y_2(x) + \dots$$

En substituant dans l'équation différentielle et en annulant les termes de divers ordres en $\frac{h}{2\pi i}$, on trouve (en supposant $E > U$) :

$$(4) \quad y_0^2 = 2m[E - U(x)]; \quad y_1 = -\frac{y_0'}{2y_0} = \frac{d}{dx} \left(\log y_0^{-\frac{1}{2}} \right); \quad y_2 = -\frac{y_1' + y_1^2}{2y_0}, \text{ etc.}$$

Si nous nous contentons des deux premiers termes dans le développement de $y(x)$, nous aurons donc :

$$(5) \quad \begin{aligned} \psi &= e^{\frac{2\pi i}{h} \left[\pm \int^x \sqrt{2m(E-U)} dx + \frac{h}{2\pi i} \log (\sqrt{y_0})^{-1} \right]} \\ &= \frac{1}{\sqrt{y_0}} e^{\pm \frac{2\pi i}{h} \int^x \sqrt{2m(E-U)} dx} = \frac{1}{\sqrt{2m(E-U)}} e^{\pm 2\pi \int^x \sqrt{2m(E-U)} dx}. \end{aligned}$$

L'intégrale :

$$(6) \quad S(x) = \int^x \sqrt{2m(E-U)} dx \quad \left(= \int^x m v ds \right).$$

est l'intégrale d'Action Maupertuisienne et l'on peut écrire :

$$(7) \quad \psi = \frac{1}{\sqrt{2m(E-U)}} e^{\pm \frac{2\pi i}{h} S(x)}.$$

Si nous rétablissons dans la fonction ψ le facteur $e^{\frac{2\pi i}{h} Et}$ exprimant la variation avec le temps, nous obtenons la forme de ψ valable à

l'approximation de l'optique géométrique, forme où la « phase » est égale, comme il est bien connu, à la « fonction de Jacobi » au facteur $\frac{1}{h}$ près.

La quantité :

$$(8) \quad \lambda = \frac{1}{\sqrt{2m(E - U)}}$$

variable en général d'un point à un autre est la longueur d'onde. Si U est constant, λ l'est aussi et l'on a simplement :

$$(9) \quad \psi = \text{cte} \cdot e^{2\pi i \left(\nu t \pm \frac{x}{\lambda} \right)}$$

avec bien entendu $\nu = \frac{E}{h}$.

Pour voir sous quelles conditions, l'optique géométrique et la formule (7) sont valables, examinons l'ordre de grandeur de $\left| \frac{h}{2\pi i} y_2(x) \right|$ par rapport à $y_1(x)$. Par définition, l'indice de réfraction des ondes ψ dans la région où règne le potentiel $U(x)$ est ⁽¹⁾ :

$$(10) \quad n = \sqrt{1 - \frac{U(x)}{E}}.$$

Donc, d'après (4), y_0 est proportionnel à n , et comme d'autre part λ est égal à $\frac{h}{y_0}$, on a :

$$(11) \quad y_1 = -\frac{y_0'}{2y_0} = -\frac{\frac{dn}{dx}}{2n}$$

Quant à y_2 , il est de l'ordre de $\frac{y_1^2}{2y_0} = \frac{\left(\frac{dn}{dx}\right)^2}{4n^2y_0}$. Il en résulte que le rapport $\left| \frac{\frac{h}{2\pi i} y_2}{y_1} \right|$ est de l'ordre de $\frac{1}{n} \frac{dn}{dx} \lambda$. Donc l'optique géométrique et la formule (7) ne peuvent être exactes que si l'on a :

$$(12) \quad \frac{dn}{dx} \lambda \ll n,$$

(1) Il est égal, en effet, par définition, au rapport de la longueur d'onde $\lambda_0 = \frac{h}{\sqrt{2mE}}$ qui correspond à l'énergie E en l'absence de champ, à la longueur d'onde λ dans la région considérée qui est donnée par (8).

c'est-à-dire que si l'indice n varie lentement à l'échelle de la longueur d'onde. En particulier, l'optique géométrique ne peut pas être valable près du point x_0 où l'on a $E = U(x_0)$, point qui est le rebroussement des trajectoires prévues par l'ancienne Mécanique : en x_0 , en effet, y_0 est nul et par suite λ est infiniment grand.

Cas où $E < U$. — Dans la théorie précédente nous avons supposé $E > U(x)$. — Plaçons-nous maintenant dans le cas opposé. On aura alors :

$$(13) \quad \begin{cases} y_0^2 = 2m(E - U) & \text{donc} & y_0 = \pm i \sqrt{2m(U - E)} \\ y_1 = -\frac{y_0'}{2y_0} = \frac{d}{dx} \left[\log |y_0|^{-\frac{1}{2}} \right]; & y_2 = \frac{y_1' + y_1^2}{2y_0}. \end{cases}$$

On voit de suite que y_1 est réel tandis que y_0 et y_2 sont purement imaginaires. L'approximation de l'optique géométrique s'exprime alors par la formule :

$$(14) \quad \begin{cases} \psi = e^{\frac{2\pi i}{h} \left[\pm i \int^x \sqrt{2m(U - E)} dx + \frac{2\pi i}{h} \log |y_0|^{-\frac{1}{2}} \right]} \\ = \frac{1}{\sqrt{2m(U - E)}} e^{\pm \frac{2\pi}{h} \int^x \sqrt{2m(U - E)} dx}. \end{cases}$$

L'indice n , défini par (10), est ici imaginaire. En prenant le signe — dans la formule (14), nous avons une absorption de l'onde dans une région où l'indice est imaginaire, cas connu en optique.

Naturellement, il n'y a plus ici, à strictement parler, de longueur d'onde puisque ψ n'est plus périodique en x . Mais nous pouvons poser :

$$(15) \quad \lambda' = \frac{h}{\sqrt{2m(U - E)}}$$

et le facteur exponentiel dans ψ sera $e^{-2\pi \int^x \frac{dx}{\lambda'}}$. Si U est constant, on a :

$$(16) \quad \psi = \frac{1}{\sqrt{2m(U - E)}} e^{-2\pi \frac{x}{\lambda'}}.$$

et λ' est alors la longueur correspondant à un affaiblissement de ψ dans le rapport $e^{-2\pi}$.

PASSAGE DES CORPUSCULES ÉLECTRISÉS

La formule (14) correspond à l'approximation de l'optique géométrique et nous devons voir dans quelles limites cette approximation est valable. Le raisonnement est le même que précédemment et l'on trouve aisément comme condition de validité de (14) :

$$(17) \quad \frac{dn}{dx} \lambda' \ll n.$$

L'indice de réfraction et par conséquent le potentiel U doivent peu varier à l'échelle de la pseudo-longueur d'onde λ' . En particulier, la formule (14) n'est pas applicable au voisinage du point x_0 tel que $U(x_0) = E$, point où λ' est infinie.

Considérons un corpuscule qui arrive avec une énergie E dans une région où règne un potentiel $U > E$ constant. Soit l l'épaisseur de cette barrière de potentiel :

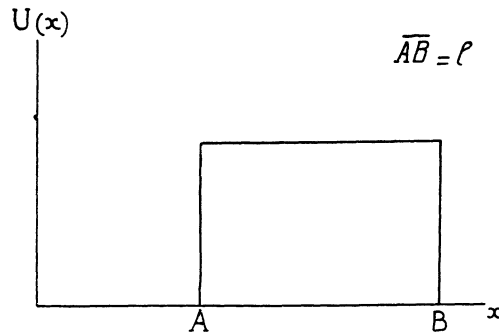


Fig. 4.

L'onde ψ du corpuscule dont la longueur d'onde à l'extérieur de la barrière est :

$$(18) \quad \lambda_0 = \frac{h}{\sqrt{2mE}},$$

est absorbée dans la barrière et si l'on a :

$$(19) \quad l \gg \lambda' = \frac{h}{\sqrt{2m(U - E)}},$$

on peut s'attendre à ce que l'affaiblissement de l'onde soit donnée principalement par le facteur ;

$$e^{-\frac{2\pi}{h} \sqrt{2m(U - E)} l}$$

Le $|\psi|^2$ après la barrière sera donc, avec le $|\psi|^2$ avant la barrière dans un rapport voisin de $e^{-\frac{4\pi}{h}\sqrt{2m(E-U)}l}$. Cette expression doit donc nous donner approximativement la proportion des corpuscules qui franchiront la barrière et nous verrons qu'un calcul rigoureux confirme en général cette conclusion.

Il faut remarquer que : si l'on a $U \gg E$, on a aussi $\lambda' \ll \lambda_0$ et par suite la condition $l \gg \lambda'$ peut se trouver réalisée sans que la condition $l \gg \lambda_0$ le soit. En d'autres termes, la formule (14) peut être applicable dans la barrière, même si la largeur de cette barrière est de l'ordre de la longueur d'onde de l'onde ψ à l'extérieur de la barrière.

Remarquons encore que pour $\lambda_0 \rightarrow \infty$, on a $\lambda' \rightarrow \frac{h}{\sqrt{2mU}}$, valeur finie qui peut être très petite.

En général, dans les applications, la barrière de potentiel aura une forme moins schématique que celle de la figure 4. Elle pourra par exemple avoir la forme suivante :

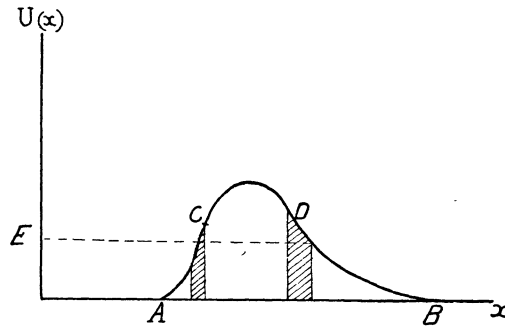


Fig. 5.

L'optique géométrique ne sera alors certainement pas valable dans les régions hachurées, c'est-à-dire pour des valeurs de x voisines de celles qui annulent $U - E$; mais dans la région centrale entre C et D, si la montagne de potentiel est suffisamment haute par rapport à l'énergie des corpuscules incidents ($U_{\max} \gg E$), la formule (14) sera applicable et la proportion des corpuscules transmises sera vraisemblablement donnée par $e^{-\frac{4\pi}{h}\int_C^D \sqrt{2m(U-E)}dx}$, l'intégrale étant étendue à un intervalle en x qui n'est pas très différent de celui défini par

$U - E > 0$. Ici encore un calcul plus rigoureux confirme en général approximativement cette prévision.

Conditions de passage pour l'onde ψ sur une surface de discontinuité du potentiel. — Un problème classique en optique ondulatoire est le passage d'une onde au travers d'une surface qui sépare deux milieux d'indices différents. L'analogue de ce problème en Mécanique ondulatoire est le passage d'une onde ψ au travers d'une surface de discontinuité pour la fonction potentielle U . D'un côté de la surface, se trouve une région 1 où règne un potentiel U_1 et où, par suite, l'onde ψ obéit à l'équation :

$$(20) \quad \Delta\psi + \frac{8\pi^2m}{h^2} [E - U_1]\psi = 0.$$

De l'autre côté de la surface, se trouve une région 2 où règne un potentiel U_2 qui par hypothèse ne se raccorde pas avec U_1 sur la surface ; dans cette région 2, on a :

$$(21) \quad \Delta\psi + \frac{8\pi^2m}{h^2} [E - U_2]\psi = 0.$$

La question est de savoir comment la solution de (20) doit se raccorder avec la solution de (21) sur la surface de séparation.

Pour répondre à cette question, nous considérerons la surface de séparation comme la limite d'une couche de passage d'épaisseur infiniment petite. Représentons cette couche de passage en désignant par A et B deux points situés sur une même normale aux deux surfaces limites de la couche, supposées parallèles.

De A en B, le potentiel varie très rapidement d'une valeur U_A à une valeur U_B . Si nous prenons la direction AB pour axe des x , les axes y et z étant contenus dans le plan tangent en A à la couche de séparation, nous pouvons écrire :

$$(22) \quad \Delta\psi + \frac{8\pi^2m}{h^2} [E - U]\psi = 0,$$

dans la couche, U variant très rapidement de U_A à U_B le long de l'axe des x de A en B. Les dérivées $\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$ n'ont pas de raison de varier rapidement sur AB mais la dérivée $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$ doit varier très rapide-

ment quand on passe de A en B. La différence des valeurs de $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ en A et en B, qui est $\int_A^B \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} dx$, reste inférieure à $M \cdot \overline{AB}$, M étant la borne supérieure de $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$ le long de AB. Si maintenant nous faisons tendre vers zéro l'épaisseur de la couche de passage, A et B vont se rapprocher indéfiniment tout en restant le premier dans la région 1, le second dans la région 2 ; la dérivée $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$ va donc subir une variation finie pour un déplacement AB tendant vers zéro et à la limite sera discontinue. Mais la différence $\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_B - \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_A$ tendra vers zéro avec AB de sorte que la dérivée $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ restera continue à la limite.

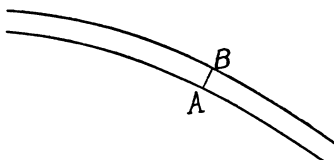


Fig. 6

Il en résulte aussi que $\psi_B - \psi_A = \int_A^B \frac{\partial \psi}{\partial x} dx$ tendra vers zéro avec l'épaisseur de la couche de passage, de sorte que ψ doit rester continue à la limite.

Bref, notre conclusion est la suivante : sur la surface de séparation des régions 1 et 2, la fonction d'onde ψ et sa dérivée normale doivent rester continues.

Nous admettrons désormais la proposition qui précède pour effectuer le raccordement des fonctions ψ sur une surface de discontinuité du potentiel (en supposant, bien entendu, que cette surface de discontinuité ne présente pas de points singuliers).

On a cherché à démontrer la continuité de $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ par une application du théorème de Green, sans considérer la surface de séparation S comme la limite d'une couche de passage, mais cette tentative de démonstra-

tion paraît contenir une pétition de principe, car la formule de Green n'est valable que pour les fonctions continues à dérivées premières continues.

II

Surface de séparation plane

Incidence normale. — Nous allons d'abord envisager le plus simple des problèmes de passage d'ondes ψ d'une région où règne un potentiel dans une région où en règne un autre. Nous allons, en effet, imaginer une surface de séparation plane séparant une région où le potentiel est zéro d'une autre région où il a une valeur constante U .

L'indice de réfraction défini par (10) sera donc égal à 1 d'un côté de la surface et sera constant, mais différent de 1, de l'autre côté. Nous avons donc ici l'analogie en Mécanique ondulatoire du passage d'une onde lumineuse d'un milieu d'indice unité dans un milieu réfringent (ou même absorbant si $U > E$ et par suite n imaginaire).

Nous supposons d'abord l'incidence normale et nous distinguerons trois cas.

1^{er} CAS. $U < 0$, $n > 1$ dans le second milieu.

Prenons l'axe des x perpendiculaire à la surface de séparation et posons :

$$(23) \quad h = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi mv}{h} = \frac{2\pi}{h} \sqrt{2mE},$$

E et v étant l'énergie et la vitesse des corpuscules incidents.

Nous pouvons prendre l'amplitude de l'onde incidente égale à 1 et par suite écrire cette onde sous la forme

$$(24) \quad \psi_{\text{inc.}} = e^{2\pi i v t} \cdot e^{-i k x}.$$

Il y aura, en général, une onde réfléchie et une onde transmise que nous pourrions représenter par :

$$(25) \quad \psi_r = A e^{2\pi i v t} \cdot e^{+i k x}; \quad \psi_t = B e^{2\pi i v t} \cdot e^{-i k' x}$$

avec :

$$(26) \quad k' = \frac{2\pi}{\lambda'} = \frac{2\pi}{h} \sqrt{2m(E - U)} \quad (> k).$$

Nous pouvons laisser de côté le facteur exponentiel en t qui figure partout et écrire les conditions de continuité à la surface de séparation sous la forme :

$$(27) \quad 1 + A = B, \quad k(A - 1) = -k'B,$$

en supposant (ce qui ne restreint pas la généralité) que la surface de séparation correspond à $x = 0$. Les conditions (27) expriment en effet que pour $x = 0$, c'est à-dire sur la surface de séparation, on a :

$$\psi_i + \psi_r = \psi_t \quad \text{et} \quad \frac{\partial \psi_i}{\partial x} + \frac{\partial \psi_r}{\partial x} = \frac{\partial \psi_t}{\partial x}.$$

En résolvant les équations (27) par rapport à A et B, on trouve :

$$(28) \quad A = -\frac{k' - k}{k' + k}, \quad B = \frac{2k}{k' + k},$$

A est donc négatif.

En vertu de (28), on peut écrire :

$$(29) \quad \psi_r = \frac{k' - k}{k' + k} e^{ikx + i\pi}; \quad \psi_t = \frac{2k}{k' + k} e^{-ik'x}$$

en sous-entendant $e^{2\pi i \nu t}$. Nous voyons que dans le cas où l'indice du second milieu est supérieur à celui du premier, l'onde réfléchie présente une différence de phase de π avec l'onde incidente, résultat bien connu en optique.

Si $|U| \gg E$, on a $k' \gg k$ et l'onde transmise est très faible.

La grande discontinuité de potentiel qui se produit sur la surface de séparation réfléchit donc presque complètement l'onde incidente.

Au contraire, si $|U|$ est petit devant E, k' est voisin de k et c'est l'onde réfléchie qui est faible tandis que l'onde transmise a une amplitude voisine de 1.

Bien entendu, si $U = 0$, l'onde réfléchie est nulle (car $k = k'$) : il y a transmission intégrale, car alors il n'y a plus en réalité de surface de discontinuité.

D'après une formule bien connue de la Mécanique ondulatoire, le

flux de corpuscules par unité de temps à travers une surface unité perpendiculaire à l'axe des x est donné par la formule ⁽¹⁾ :

$$(30) \quad f = \frac{h}{4\pi im} \left[\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} \right].$$

Dans le milieu 1, nous devons poser :

$$(31) \quad \psi = \psi_i + \psi_r = e^{-ikx} + Ae^{+ikx}$$

et nous obtenons par (30) et (23) :

$$(32) \quad f = \frac{h}{4\pi im} \cdot 2ik(1 - A^2) = \frac{kh}{2\pi m}(1 - A^2) = v(1 - A^2),$$

C'est bien le résultat que l'on pouvait attendre, car $v \cdot 1$ représente le flux correspondant au faisceau incident (puisque pour celui-ci le $\psi\psi^*$, et par suite le nombre de corpuscules par unité de volume, est supposé égal à l'unité) et vA^2 représente le flux correspondant au faisceau réfléchi, flux qui se retranche du précédent puisqu'il est dirigé en sens inverse. Le flux résultant dans le sens positif de l'axe des x est donc bien $v(1 - A^2)$.

Dans le milieu 2, ψ est égal à ψ_t et nous trouvons par (30) et (26) :

$$(33) \quad f = \frac{h}{4\pi im} 2ik'B^2 = \frac{k'h}{2\pi m} B^2 = v'B^2,$$

v' étant la vitesse $\frac{1}{m} \sqrt{2m(E - U)}$ des corpuscules transmis dans le milieu 2.

La conservation du nombre des corpuscules exige que les expressions (32) et (33) soient égales, c'est-à-dire que l'on ait :

$$(34) \quad \frac{1 - A^2}{B^2} = \frac{v'}{v} = \frac{k'}{k}.$$

A l'aide des valeurs (28), on vérifie immédiatement qu'il en est bien ainsi.

2^e CAS. $0 < U < E$, $n < 1$ dans le second milieu.

Les calculs sont les mêmes que dans le cas précédent et l'on trouve encore

$$(35) \quad A = \frac{k - k'}{k + k'}, \quad B = \frac{2k}{k + k'},$$

(1) Voir par exemple : *Théorie de la Quantification*, p. 22.

mais ici k est supérieur à k' , A est positif et l'onde réfléchie a la même phase que l'onde incidente. Donc, quand l'indice du second milieu est inférieur à celui du premier, l'onde réfléchie est en phase sur la surface de séparation avec l'onde incidente : c'est encore le même résultat qu'en optique.

Il est facile encore de calculer les flux et de vérifier la conservation du nombre des corpuscules.

Quand U croît de 0 à E , k' décroît de k à 0. Pour $U = E$, $k' = 0$ et l'on a $A = 1$ et $B = 2$. La conservation du nombre des corpuscules est néanmoins encore vérifiée parce qu'alors on a $v' = 0$. Nous comprendrons mieux ceci en étudiant le 3^e cas.

3^e CAS. $U > E$, n imaginaire dans le second milieu.

Nous poserons maintenant (pour avoir un k' réel) :

$$(36) \quad k' = \frac{2\pi}{h} \sqrt{2m(U - E)} \quad (> 0).$$

Dans le milieu 2, l'onde ψ devra alors être une combinaison linéaire de $e^{k'x}$ et $e^{-k'x}$. Mais comme nous ne pouvons pas admettre que ψ soit infini pour $x = +\infty$, nous devons supposer que dans le second milieu, ψ varie comme $e^{-k'x}$, c'est-à-dire s'affaiblit exponentiellement.

Nous avons donc ici dans le premier milieu :

$$(37) \quad \psi = \psi_i + \psi_r = e^{-ikx} + Ae^{+ikx}$$

et dans le deuxième :

$$(38) \quad \psi = \psi_t = Be^{-k'x},$$

toujours en sous-entendant partout le facteur $e^{2\pi i vt}$.

Les conditions de passage sur la surface de séparation ($x = 0$) nous donnent :

$$(39) \quad 1 + A = B, \quad ik(A - 1) = -k'B$$

d'où :

$$(40) \quad A = \frac{ik - k'}{ik + k'}, \quad B = \frac{2ik}{ik + k'}.$$

On voit alors que $|A| = 1$. Comme précédemment, on trouve pour le flux de corpuscules dans le premier milieu : $v(1 - |A|^2)$. Il est nul, ce qui signifie que le flux réfléchi est égal au flux incident. Dans le second milieu, le flux est nul aussi (comme l'exige la conservation

du nombre de corpuscules), car dans ce second milieu ψ est réel d'après (38) et par suite le crochet dans l'expression (30) du flux est nul. Mais $|\psi_t|^2$ n'est pas nul à distance finie de la surface de séparation. Ceci signifie, d'après les principes généraux de la nouvelle mécanique, que dans l'état de régime représenté par nos ondes planes monochromatiques, il y a dans le second milieu une densité de corpuscules exponentiellement décroissante, mais non nulle, égale à $|B|^2 e^{-2k'/x}$ à la profondeur x d'après (38). Naturellement, si l'on considérait le début du phénomène, l'onde ψ incidente arriverait sur la surface de séparation avec un front d'onde et il y aurait d'abord un régime transitoire qui n'est pas représenté par nos solutions monochromatiques et pendant lequel un certain nombre de corpuscules pénétreraient dans la seconde région ; ensuite, le régime stationnaire représenté par les solutions monochromatiques s'établirait et alors on aurait une densité permanente de corpuscules sans vitesse dans la région 2 avec réflexion totale des corpuscules incidents. Il est inutile de souligner l'analogie de ce qui précède avec la théorie des ondes évanescences en optique.

Pour $U = E$, on a, comme nous le savions déjà, $k' = 0$, $A = 1$, $B = 2$. Pour U tendant vers l'infini, $\frac{k'}{k}$ tend vers $+\infty$, A tend vers -1 et B vers 0 d'après (40). La pénétration de l'onde dans le second milieu devient de plus en plus petite.

Incidence oblique. — Dans le cas général de l'incidence oblique, nous devons aussi distinguer trois cas.

1^{er} CAS. $U < 0$, $n > 1$ dans le second milieu.

Soient θ l'angle d'incidence et θ' l'angle de réfraction. On peut écrire :

$$(41) \quad \begin{cases} \psi_i = e^{-ik(x \cos \theta + y \sin \theta)}; & \psi_r = A e^{ik(x \cos \theta - y \sin \theta)}; \\ \psi_t = B e^{-ik'(x \cos \theta' + y \sin \theta')}, \end{cases}$$

y étant comptée perpendiculairement à la direction de propagation dans le plan d'incidence (voir ci-dessous, figure 7). On trouve aisément comme conditions de passage :

$$(42) \quad \begin{cases} e^{-iky \sin \theta} + A e^{-iky \sin \theta} = B e^{-ik'y \sin \theta} \\ -ik \cos \theta e^{-iky \sin \theta} + ikA \cos \theta e^{-iky \sin \theta} = -ik'B \cos \theta' e^{-ik'y \sin \theta}. \end{cases}$$

Ces conditions devant être vérifiées sur toute la surface de séparation, c'est-à-dire pour toutes les valeurs de y , il faut avoir :

$$(43) \quad k \sin \theta = k' \sin \theta',$$

ce qui est identique à la loi de DESCARTES, car k et k' sont proportionnels aux indices des 2 milieux. Si (43) est réalisée, on peut supprimer les exponentielles dans les formules (42) et, en résolvant, on trouve aisément :

$$(44) \quad A = \frac{k \cos \theta - k' \cos \theta'}{k \cos \theta + k' \cos \theta'}; \quad B = \frac{2k \cos \theta}{k \cos \theta + k' \cos \theta'}.$$

On trouve encore une différence de phase de π entre le rayon incident et le rayon réfléchi sur la surface de séparation, car ici $k' > k$ et par suite $\cos \theta' > \cos \theta$.

Pour U très grand négatif, ou $k \ll k'$ et approximativement : $A = -1$; $B = 0$.

Pour U décroissant en valeur absolue, A croît et pour $U = 0$, on retrouve bien entendu $\theta' = \theta$, $A = 0$ et $B = 1$, car il n'y a plus de surface de séparation.

La conservation du nombre des corpuscules peut se vérifier ici de la façon suivante. Soit une aire unité sur la surface de séparation :

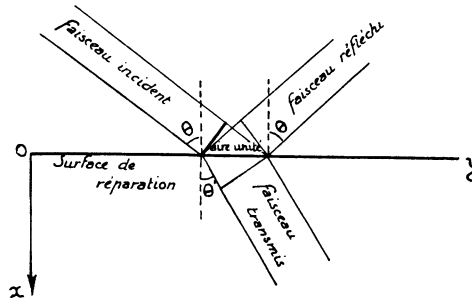


Fig. 7.

Considérons les rayons qui frappent cette aire unité : ils forment un faisceau dont la section droite a pour mesure $\cos \theta$. Il en est de même pour les rayons réfléchis par l'aire-unité tandis que pour les rayons transmis, la section du faisceau a pour mesure $\cos \theta'$. La

conservation du nombre des corpuscules exige évidemment que l'on ait :

$$(45) \quad \cos \theta \cdot v(1 - A^2) = \cos \theta' v' B^2,$$

où v et v' sont les vitesses dans les deux milieux. Comme v et v' sont respectivement proportionnelles à k et à k' , on voit facilement, à l'aide de (44), que (45) est bien vérifiée.

2^e CAS. $0 < U < E$; $n < 1$ dans le second milieu, $k' < k$.

Si l'angle d'incidence θ est assez petit, la formule (43) peut encore être satisfaite et l'on retrouve les formules (44). Mais comme l'on a ici $k' < k$ et $\cos \theta' < \cos \theta$, A est positif et par suite la réflexion s'opère sans changement de phase.

La conservation du nombre des corpuscules se montrerait comme ci-dessus.

Si l'angle d'incidence θ est assez grand, $\frac{k}{k'} \sin \theta$ sera supérieur à l'unité et la relation (23) ne pourra pas être satisfaite. C'est le cas de la réflexion totale bien connue en optique. L'onde ψ dans le deuxième milieu doit alors être de la forme : $\psi_1(x)e^{-iky \sin \theta}$ et comme elle doit satisfaire à l'équation $\Delta\psi + k'^2\psi = 0$, on a pour déterminer ψ_1 la relation :

$$(46) \quad \frac{d^2 \psi_1}{dx^2} + (k'^2 - k^2 \sin^2 \theta) \psi_1 = 0.$$

Par hypothèse, la parenthèse est négative et l'on a :

$$(47) \quad \psi_1(x) = \text{const. } e^{\pm \sqrt{k^2 \sin^2 \theta - k'^2} x},$$

formule où nous devons prendre le signe — pour que ψ reste fini à l'infini. Bref nous avons ici :

$$(48) \quad \psi_t = B e^{-\sqrt{k^2 \sin^2 \theta - k'^2} x} e^{-iky \sin \theta}.$$

Les conditions de passage nous donnent :

$$(49) \quad 1 + A = B, \quad ik \cos \theta (1 - A) = + \sqrt{k^2 \sin^2 \theta - k'^2} B;$$

d'où :

$$(50) \quad A = \frac{ik \cos \theta - \sqrt{k^2 \sin^2 \theta - k'^2}}{ik \cos \theta + \sqrt{k^2 \sin^2 \theta - k'^2}}; \quad B = \frac{2ik \cos \theta}{ik \cos \theta + \sqrt{k^2 \sin^2 \theta - k'^2}}.$$

on a $|A| = 1$ et par suite réflexion totale.

L'onde transmise (48) est évanescente. Elle se propage parallèlement à la surface dans les couches superficielles du deuxième milieu ; il lui correspond une localisation permanente de corpuscules dans le deuxième milieu sans flux de corpuscules dans ce milieu, ceci étant vrai bien entendu seulement quand le régime permanent, représenté par les solutions monochromatiques, est établi.

3^e CAS. $U > E$, indice du 2^e milieu imaginaire.

On pose :

$$(51) \quad k' = \frac{2\pi}{h} \sqrt{2m(U - E)} > 0.$$

L'onde dans le second milieu est de la forme :

$$(52) \quad \psi_t = B e^{-\sqrt{k'^2 \sin^2 \theta + k^2} x} e^{-i k y \sin \theta}.$$

Il y a encore onde évanescente et réflexion totale.

REMARQUE. — La réalisation d'une surface de discontinuité plane pour le potentiel est pratiquement impossible : il y aura toujours une couche de passage entre la région de potentiel zéro et la région de potentiel U . Pour que les calculs précédents soient approximativement valables, il faut que la couche de passage ait une épaisseur faible par rapport à la longueur d'onde. Pour les corpuscules matériels (même lents) la longueur d'onde est si petite que la réalisation artificielle d'une telle couche de passage paraît impossible. Mais à l'échelle atomique, on pourrait rencontrer des cas où les calculs précédents s'appliquent.

III

Barrière de potentiel rectangulaire

Problème analogue à celui des lames minces en optique. — Nous allons considérer des corpuscules d'énergie E arrivant normalement sur une région d'épaisseur constante l où règne un potentiel U .

Ce problème est analogue à un problème de lames minces en

PASSAGE DES CORPUSCULES ÉLECTRISÉS

optique, la région où règne le potentiel U étant analogue à une lame réfringente à faces parallèles.

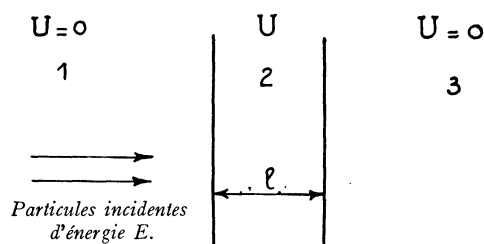


Fig. 8.

Si l'on prend un axe des x perpendiculaire aux surfaces limites de la lame mince, le potentiel est représenté en fonction de x par une des deux courbes ci-dessous :

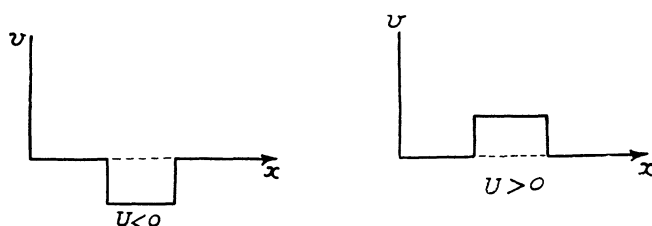


Fig. 9.

Dans le cas de gauche, on a un « trou » de potentiel rectangulaire ; dans le cas de droite une « montagne » de potentiel rectangulaire.

Nous allons avoir à distinguer deux cas, suivant que U est inférieur ou supérieur à E .

1^{er} CAS. $U < E$.

Nous avons ici dans la région 1 pour l'onde incidente et l'onde réfléchi les formes :

$$(53) \quad \psi_i = e^{-ikx} \quad \psi_r = A e^{+ikx}$$

en sous-entendant toujours le facteur $e^{2\pi i v t}$ et en posant :

$$(54) \quad k = \frac{2\pi}{h} m v = \frac{2\pi}{h} \sqrt{2m E}.$$

Dans la région 2, l'équation de propagation admet comme solution les formes $e^{\pm ik'x}$ avec :

$$(55) \quad k' = \frac{2\pi}{h} \sqrt{2m(E - U)} = \frac{2\pi}{h} m v'.$$

et par suite, nous devons y poser :

$$(56) \quad \psi = B_1 e^{-ik'x} + B_2 e^{+ik'x}.$$

Enfin dans la région 3, l'onde transmise est :

$$(57) \quad \psi_t = C e^{-ik'l}.$$

Nous prendrons l'origine des coordonnées sur la surface de séparation 1 — 2, de façon à avoir $x = 0$ sur cette surface et $x = l$ sur la surface de séparation 2 — 3.

Pour $x = 0$, nous avons les conditions de continuité :

$$(58) \quad 1 + A = B_1 + B_2 \quad \frac{k}{k'}(1 - A) = B_1 - B_2$$

et pour $x = l$, nous avons :

$$(59) \quad B_1 e^{-ik'l} + B_2 e^{ik'l} = C e^{-ikl}; \quad ik'(B_2 e^{ik'l} - B_1 e^{-ik'l}) = -ikC e^{-ikl}.$$

De (59), on tire aisément :

$$(60) \quad B_1 = e^{ik'l} C e^{-ikl} \cdot \frac{1 + \frac{k}{k'}}{2}; \quad B_2 = e^{-ik'l} C e^{-ikl} \cdot \frac{1 - \frac{k}{k'}}{2},$$

d'où en portant dans (58) et résolvant :

$$(61) \quad C = \frac{2 e^{ikl}}{2 \cos k'l + i \left[\frac{k}{k'} + \frac{k'}{k} \right] \sin k'l}; \quad A = \frac{\left(\frac{k}{k'} - \frac{k'}{k} \right) i \sin k'l}{2 \cos k'l + i \left[\frac{k}{k'} + \frac{k'}{k} \right] \sin k'l}.$$

La proportion de corpuscules réfléchis est :

$$(62) \quad R = A A^* = \frac{\left(\frac{k}{k'} - \frac{k'}{k} \right)^2 \sin^2 k'l}{4 \cos^2 k'l + \left(\frac{k}{k'} + \frac{k'}{k} \right)^2 \sin^2 k'l}$$

et celle des corpuscules transmises est :

$$(63) \quad T = C C^* = \frac{4}{4 \cos^2 k'l + \left(\frac{k}{k'} + \frac{k'}{k} \right)^2 \sin^2 k'l} = \frac{1}{1 + \left[\frac{1}{4} \left(\frac{k^2 + k'^2}{k k'} \right)^2 - 1 \right] \sin^2 k'l}.$$

On vérifie de suite que l'on a : $R + T = 1$, ce qui donne la conservation du nombre des corpuscules.

Dans la région 2, il y a deux flux de corpuscules : l'un $v' |B_1|^2$ vers la gauche, l'autre $v' |B_2|^2$ vers la droite. A l'aide des formules (60), on vérifie aisément que leur différence est égale à $|C|^2 v$ comme l'exige la conservation du nombre des corpuscules.

En utilisant les définitions (54) et (55), on peut mettre le coefficient de transmission T sous la forme suivante :

$$(64) \quad T = \frac{1}{1 + \left[\frac{1}{4E(E-U)} - 1 \right]^2 \sin^2 kl} = \frac{1}{1 + \frac{U^2}{4E(E-U)} \sin^2 \left[\frac{2\pi}{h} \sqrt{2m(E-U)} l \right]}.$$

Nous voyons donc que si E est très grand par rapport à $|U|$, le coefficient T est égal sensiblement à l'unité et par suite R est presque nul. La barrière a alors un effet négligeable.

Nous voyons aussi sur (64) que si la longueur l de la barrière est égale à un nombre entier de fois la moitié de la longueur d'onde dans la barrière $\lambda' = \frac{h}{\sqrt{2m(E-U)}}$, il y a transmission totale. Au contraire, si l est égale à un multiple impair du quart de λ' , il y a transmission amoindrie. Ceci est l'analogie du phénomène des lames minces en optique. On peut l'expliquer d'une façon élémentaire comme il suit. Il y a réflexion de l'onde sur chacune des deux surfaces de séparation, mais l'une des réflexions a toujours lieu au passage d'un milieu à un autre milieu d'indice supérieur et l'autre réflexion dans les conditions inverses. Les deux ondes réfléchies présentent donc, d'après les résultats du précédent chapitre, une différence de phase de π et sont en opposition de phase si la longueur $2l$, que l'on parcourt (dans la région 2) en plus de l'autre, est égale à un multiple entier de λ' ; donc, si l est un multiple entier de $\frac{\lambda'}{2}$, les ondes réfléchies se détruisent et il y a transmission totale. Si, au contraire, on a $2l = (2n + 1) \frac{\lambda'}{2}$ ou $l = (2n + 1) \frac{\lambda'}{4}$, il y a concordance de phase des deux ondes réfléchies et par suite forte réflexion.

Dans le cas limite où U est égal à E , la formule (64) devient :

$$(65) \quad T_{U=E} = \frac{1}{1 + \frac{2\pi^2 m}{h^2} E l}.$$

2^e CAS. $U > E$.

Dans ce cas, il n'y a plus d'ondes se propageant dans le second milieu, qui est absorbant. Il y a seulement dans ce second milieu une onde évanescence stationnaire de la forme :

$$(66) \quad \psi = B_1 e^{-k'x} + B_2 e^{+k'x},$$

avec :

$$(67) \quad k' = \frac{2\pi}{h} \sqrt{2m(U - E)}.$$

Néanmoins (ceci est très intéressant), il y a tout de même une onde transmise dans la région 3, onde qui est généralement faible.

Les ondes dans la première et la troisième région ayant toujours les expressions (53) et (57) et devant se raccorder (ainsi que les dérivées) avec l'onde (66) sur les surfaces de séparation, nous obtenons les conditions suivantes : en $x = 0$:

$$(68) \quad 1 + A = B_1 + B_2 \quad i \frac{k}{k'} (1 - A) = B_1 - B_2;$$

en $x = l$

$$(69) \quad B_1 e^{-k'l} + B_2 e^{k'l} = C e^{-ikl}; \quad B_2 e^{k'l} - B_1 e^{-k'l} = -\frac{ik}{k'} C e^{-ikl},$$

ce qui donne aisément :

$$(70) \quad B_1 = e^{k'l} \cdot C e^{-ikl} \frac{1 + i \frac{k}{k'}}{2}; \quad B_2 = e^{-k'l} C e^{-ikl} \frac{1 - i \frac{k}{k'}}{2}.$$

puis :

$$(71) \quad C = \frac{2 e^{ikl}}{2ch k'l + i \left[\frac{k}{k'} - \frac{k'}{k} \right] sh k'l}; \quad A = \frac{i \left[\frac{k}{k'} + \frac{k'}{k} \right] sh k'l}{2ch k'l + i \left[\frac{k}{k'} - \frac{k'}{k} \right] sh k'l}.$$

On a donc ici :

$$(72) \quad \begin{cases} R = A A^* = \frac{\left[\frac{k}{k'} + \frac{k'}{k} \right]^2 sh^2 k'l}{4ch^2 k'l + \left[\frac{k}{k'} - \frac{k'}{k} \right]^2 sh^2 k'l} \\ T = C C^* = \frac{4}{4ch^2 k'l + \left[\frac{k}{k'} - \frac{k'}{k} \right]^2 sh^2 k'l} \end{cases}$$

On vérifie aisément la relation : $R + T = 1$, qui exprime la conservation globale des corpuscules. De plus, en appliquant la formule (30) à l'onde (66), on montre facilement que le flux total dans la région 2 est égal à $|C|^2 v$, ce qui est également exigé par la conservation du nombre des corpuscules. En utilisant les définitions (54) et (67), on met l'expression de T sous la forme :

$$(73) \quad T = \frac{1}{1 + \frac{U^2}{4E(U-E)} sh^2 k'l} = \frac{1}{1 + \frac{U^2}{4E(U-E)} sh^2 \left[\frac{2\pi}{h} \sqrt{2m(U-E)} l \right]}.$$

Le coefficient de transmission, pour E et U donnés, décroît donc d'une façon monotone de 1 à 0 quand l croît de 0 à $+\infty$.

Pour le cas limite $U = E$, on retrouve aisément avec (73) la formule (65), comme cela doit être,

Pour l et E donnés, T tend vers 0 pour U augmentant indéfiniment.

Pour $l \gg \lambda'$, l'optique géométrique doit être applicable dans la seconde région et nous savons qu'alors nous devons nous attendre à voir apparaître dans T le facteur $e^{-\frac{4\pi}{h} \sqrt{2m(U-E)} l}$. C'est bien, en effet, ce qui a lieu car dans (73) l'argument du sh étant $2\pi \frac{l}{\lambda'}$ est très grand et $sh k'l$ se réduit sensiblement à $\frac{1}{2} e^{k'l}$, quantité elle-même très grande ; donc T a alors sensiblement la valeur :

$$(74) \quad T = \frac{16E(U-E)}{U^2} e^{-\frac{4\pi}{h} \sqrt{2m(U-E)} l},$$

qui a bien la forme prévue.

Variation de T en fonction de E , pour une barrière donnée. — Supposons une barrière de largeur l donnée et de potentiel U donné et positif. Nous pouvons tracer la courbe qui représentera T en fonction de E .

Pour E compris entre zéro et U , nous avons à utiliser la formule (73) et pour E compris entre U et $+\infty$, nous avons à utiliser la formule (64), les deux formules se raccordant d'ailleurs sur la valeur (65) pour $U = E$.

On trouve la courbe suivante : (voir fig. 10).

Il y a des maxima de T égaux à 1 pour $E = U + \frac{n^2 h^2}{8ml^2}$ (corres-

pondant à $l = n \frac{\lambda'}{2}$). Entre eux, il y a des minima de moins en moins accentués quand l augmente. La courbe s'approche en oscillant de l'horizontale $T = 1$, car pour E tendant vers $+\infty$, T tend évidemment vers 1.

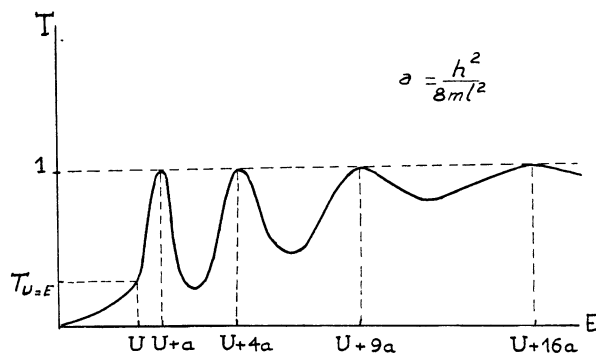


Fig. 10.

REMARQUE. — On pourrait naturellement, ici aussi, étudier le cas de l'incidence oblique. On pourrait aussi supposer que la région 2, au lieu d'être limitée par des plans parallèles, soit limitée par deux plans formant un dièdre : on aurait alors l'analogue d'un prisme en optique. Les formules obtenues seraient tout à fait semblables à celle de l'optique, mais pour les particules matérielles, de semblables cas ne pourraient guère être pratiquement réalisés.

IV

Barrière de potentiel de forme plus générale

Profil quelconque de la barrière de potentiel. — Nous avons jusqu'ici considéré des barrières de potentiel rectangulaires. C'est là une forme très schématique. Généralement, les barrières qui se présenteront réellement dans les applications auront une forme plus générale telle exemple celle de la fig. 11).

Le profil de la montagne de potentiel est ici déterminé par la fonc-

PASSAGE DES CORPUSCULES ÉLECTRISÉS

tion $U(x)$. On prendra comme onde ψ dans la région AB la solution générale de l'équation $\Delta\psi + \frac{8\pi^2m}{h^2}(E - U(x))\psi = 0$ et l'on écrira que cette fonction et sa dérivée se raccordent en A respectivement avec la fonction « onde incidente + onde réfléchie » et avec la dérivée de cette fonction et en B avec la fonction « onde transmise » et avec sa

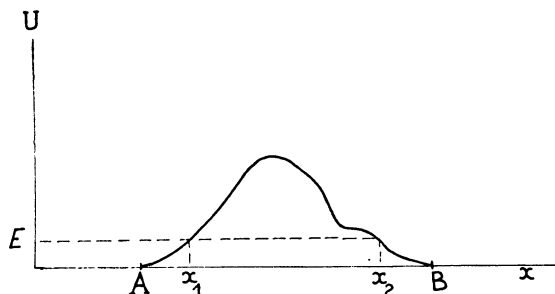


Fig. 11.

dérivée. Le problème sera plus ou moins compliqué suivant la nature analytique de la fonction d'onde entre A et B. Malheureusement, l'on constate que, même pour des formes très simples du profil de la montagne de potentiel, les calculs sont assez compliqués.

Exemple : Extraction des électrons d'un métal par un champ électrique.
— Comme exemple, étudions le passage d'électrons au travers d'une barrière de potentiel de la forme suivante :

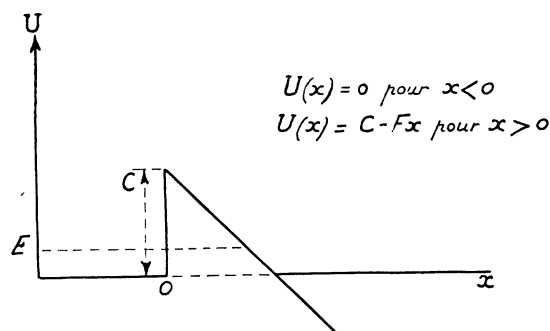


Fig. 12.

On est amené à considérer ce type de variation du potentiel dans le problème suivant (FOWLER et DARWIN) : si l'on crée au voisinage

d'un filament métallique incandescent un fort champ électrique uniforme F , il sort du filament un courant d'électrons qui, si toutefois la température du filament n'est pas trop élevée, croît avec F à peu près comme $e^{-\frac{a}{F}}$ où a est une certaine constante, dépendant de la nature du filament. Il est naturel de représenter dans ce problème le potentiel au voisinage du filament chaud par une courbe du type indiqué dans la figure 12, C mesurant alors la différence de potentiel qui s'oppose à la sortie de l'électron hors du métal.

L'onde dans la barrière est ici une solution de l'équation :

$$(75) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} [E - C + Fx] \psi = 0.$$

On peut ramener l'étude de cette équation à celle d'une équation de BESSEL et montrer que la solution générale de (75) est de la forme :

$$(76) \quad \psi = c_1 \sqrt{y} J_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} \right) + c_2 \sqrt{y} J_{-\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} \right)$$

avec :

$$(77) \quad y = \left(\frac{8\pi^2 m}{h^2} F \right)^{\frac{1}{3}} \left(-\frac{C - E}{F} + x \right),$$

$J_{\frac{1}{3}}$ et $J_{-\frac{1}{3}}$ étant les fonctions de Bessel d'ordre $\frac{1}{3}$ et $-\frac{1}{3}$ de l'argument $\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}}$.

Il faut alors exprimer que cette fonction (76) et sa dérivée se raccorde en A et en B avec les ondes incidentes, réfléchies et transmises et leurs dérivées. Les calculs interviennent les propriétés des fonctions de Bessel d'ordres fractionnaires et sont assez compliqués. FOWLER et NORDHEIM ont développé ces calculs et ils ont trouvé pour le coefficient de transmission :

$$(78) \quad T = \frac{4[E(C - E)]^{\frac{1}{2}}}{C} e^{-\frac{8\pi\sqrt{2m}(C-E)^{\frac{3}{2}}}{3Fh}}.$$

Dans cette expression, l'exponentielle est prédominante et sa présence permet de retrouver la loi expérimentale énoncée plus haut.

Calcul approché. — La barrière de potentiel représentée par la figure 12 est probablement la plus simple qu'on puisse imaginer après les barrières rectangulaires (puisque la fonction $U(x)$ y est linéaire) et néanmoins les calculs sont déjà ici assez complexes. Pour les éviter on peut tenter d'appliquer à cette barrière de potentiel les approximations de l'optique géométrique et en particulier la formule (14).

En faisant cette tentative, on commet évidemment une faute de logique puisque, comme nous l'avons vu, la formule (14) ne peut sûrement pas s'appliquer quand U est voisin de E , c'est-à-dire pour les points d'abscisses voisines de x_1 et de x_2 . Néanmoins, on peut vérifier, ici comme dans de nombreux autres cas, que le coefficient de trans-

mission est en gros proportionnel à $e^{-\frac{4\pi}{h} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m(U-E)} dx}$, comme cela aurait nécessairement lieu si la formule (14) était valable et la largeur de la barrière assez grande.

En effet, dans le cas de la figure 12, on a : $x_1 = 0$ et $x_2 = \frac{C-E}{F}$. On a donc :

$$(79) \quad \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m(U-E)} dx = \sqrt{2m(C-E)} \int_0^{\frac{C-E}{F}} \sqrt{1 - \frac{Fx}{C-E}} dx$$

et en posant : $u = \frac{F}{C-E} \cdot x$, il vient

$$(80) \quad \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m(U-E)} dx = \sqrt{2m} \frac{(C-E)^{\frac{3}{2}}}{F} \int_0^1 \sqrt{1-u} du = \frac{2}{3} \sqrt{2m} \frac{(C-E)^{\frac{3}{2}}}{F}.$$

L'exponentielle qui, dans notre raisonnement peu rigoureux fondé sur la formule (14) doit figurer dans le coefficient de transmission, est donc :

$$e^{-\frac{8\pi}{h} \sqrt{2m} \frac{(C-E)^{\frac{3}{2}}}{3F}}$$

et c'est précisément bien celle qui forme le terme essentiel de l'expression rigoureuse (78) de T , calculée par FOWLER et NORDHEIM.

On voit donc que l'exponentielle suggérée par la méthode approximative de l'optique géométrique représente le gros du phénomène. Il en est ainsi dans beaucoup d'autres cas : toutefois il est toujours bon de vérifier l'exactitude du résultat obtenu par la formule (14) en faisant, si cela est possible, le calcul rigoureux.

Quantification de l'oscillateur linéaire harmonique

Equation d'onde de l'oscillateur linéaire harmonique. — Nous nous proposons d'étudier dans le prochain chapitre le passage d'un corpuscule à travers un oscillateur linéaire harmonique limité. L'étude de cette question est, nous le verrons, très intéressante, mais elle exige que nous consacrons d'abord un chapitre à rappeler un certain nombre de résultats relatifs à l'oscillateur linéaire harmonique illimité.

L'oscillateur linéaire harmonique est constitué par définition par un corpuscule de masse m , assujéti à se mouvoir suivant une droite, en étant rappelé vers un point de cette droite par une force proportionnelle à l'élongation. Si la coordonnée x repère la position du corpuscule sur la droite du mouvement, l'origine étant prise au centre d'attraction, on a ici :

$$(81) \quad U(x) = \frac{Kx^2}{2}.$$

En Mécanique classique, le corpuscule exécuterait une oscillation harmonique autour de l'origine avec la fréquence :

$$(82) \quad \omega = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{m}}.$$

En Mécanique ondulatoire, nous devons partir de l'équation de propagation :

$$(83) \quad \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2m}{h^2} \left[E - \frac{Kx^2}{2} \right] \psi = 0$$

qui va servir à définir les valeurs propres de l'énergie, c'est-à-dire les états stationnaires de l'oscillateur linéaire.

Introduisons les notations :

$$(84) \quad A = \frac{8\pi^2m}{h^2}; \quad B = \frac{4\pi mK}{h^2} = \frac{16\pi^4m^2\omega^2}{h^2}.$$

Nous pourrions écrire (83) sous la forme :

$$(85) \quad \frac{d^2\psi}{dx^2} + (AE - Bx^2)\psi = 0.$$

Posons encore :

$$(86) \quad q = x\sqrt{B} \quad \lambda = \frac{AE}{\sqrt{B}};$$

il vient :

$$(87) \quad \frac{d^2\psi}{dq^2} + (\lambda - q^2)\psi = 0.$$

Nous avons à rechercher pour quelles valeurs de λ (valeurs propres), l'équation admet des solutions partout finies et continues, même à l'infini. Il est évident que cela ne peut avoir lieu pour aucune valeur négative de λ car si l'on a $\lambda < 0$, $\frac{d^2\psi}{dq^2}$ dans (87) a le même signe que ψ et la fonction ψ partant par exemple de 0 pour $q = -\infty$, varierait toujours dans le même sens et ne pourrait revenir à zéro pour $q = +\infty$. Parmi les valeurs positives de λ , nous allons avoir à distinguer 2 cas suivant que λ est égal à un entier impair ($\lambda = 2n + 1$), ou que λ n'est pas égal à un entier impair ($\lambda \neq 2n + 1$). En étudiant les solutions de (87) dans ces deux cas, nous verrons que seules les valeurs $\lambda = 2n + 1$ sont valeurs propres.

Etude des solutions de (87) pour $\lambda \neq 2n + 1$. — Posons :

$$(88) \quad \psi(q) = u(q)e^{-\frac{q^2}{2}}$$

L'équation (87) devient :

$$(89) \quad \frac{d^2u}{dq^2} - 2q \frac{du}{dq} + (\lambda - 1)u = 0.$$

Pour résoudre (89), nous allons employer la méthode d'intégration de LAPLACE, c'est-à-dire chercher une solution de la forme

$$(90) \quad u(q) = \int_c e^{qz} Z(z) dz,$$

c étant un certain contour dans le plan de la variable complexe z . En substituant (90) dans (89), nous trouvons :

$$(91) \quad \int_c e^{qz} Z(z) [z^2 - 2qz + \lambda - 1] dz = 0.$$

Or, l'on a :

$$(92) \quad -2 \int_c e^{qz} Z(z) qz dz = -2Z(z) \cdot ze^{qz} |_c + 2 \int_c e^{qz} \frac{d(zZ)}{dz} dz.$$

Si donc nous choisissons le contour c de façon que $Z(z)ze^{qz}$ s'annule à ses limites, l'équation (91) se réduira à :

$$(93) \quad \begin{cases} 0 = \int_c e^{qz} [Z(z)(z^2 + \lambda - 1) + 2 \frac{d}{dz}(zZ)] dz \\ = \int_c e^{qz} [Z(z^2 + \lambda + 1) + 2z \frac{dZ}{dz}] dz. \end{cases}$$

Pour que ceci soit sûrement vérifié, il suffit de prendre pour $Z(z)$ une fonction qui annule le crochet dans le dernier membre de (93), ce qui conduit à poser :

$$(94) \quad Z(z) = Ce^{-\frac{z^2}{4}z - \frac{\lambda+1}{2}}.$$

Comme avec ce choix de Z , la fonction de Zze^{qz} est visiblement nulle pour $z = -\infty$, nous sommes finalement conduits à prendre pour $u(q)$:

$$(95) \quad u(q) = C \int_{-\infty}^{(0+)} z^{-\frac{\lambda+1}{2}} e^{-\frac{z^2}{4}} e^{qz} dz$$

l'intégrale étant prise le long du contour ci-dessous indiqué qui part de $z = -\infty$ avec $\arg z = -\pi$, suit l'axe réel de $-\infty$ à 0, tourne une fois dans le sens positif autour de l'origine et revient à $z = -\infty$ le long de l'axe réel.

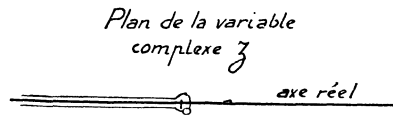


Fig. 13.

La solution (95) n'est pas identiquement nulle car, λ étant par hypothèse différent de $2n + 1$, le point $z = 0$ est un point de branchement pour la fonction sous le signe somme.

Comme la constante C est arbitraire, nous la prendrons égale à $\frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}{2\pi i}$, quantité qui est finie puisque λ est positif. Nous avons alors d'après (95) et (88) la solution en ψ :

$$(96) \quad \psi_1(q) = e^{-\frac{q^2}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} z^{-\frac{\lambda+1}{2}} e^{-\frac{z^2}{4}} e^{qz} dz.$$

Pour obtenir une deuxième solution $\psi_2(q)$ de l'équation d'onde (87), nous pouvons prendre $\psi_2(q) = \psi_1(-q)$, car il est évident que l'équation (87) reste satisfaite si l'on change q en $-q$. Nous trouvons ainsi :

$$(97) \quad \psi_2(q) = e^{-\frac{q^2}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} z^{-\frac{\lambda+1}{2}} e^{-\frac{z^2}{4}} e^{-qz} dz.$$

Nous allons voir plus loin que cette deuxième solution est indépendante de la première, c'est-à-dire que ψ_2 n'est pas égale au produit de ψ_1 par une constante. L'équation (87) étant du second ordre, toute solution de cette équation doit être de la forme $c_1\psi_1(q) + c_2\psi_2(q)$.

Maintenant, comme l'équation (87) n'a pas de points critiques à distance finie, ses solutions sont continues et finies pour toute valeur finie de q . La recherche des valeurs propres consistera donc à rechercher s'il existe une solution qui reste finie à la fois pour $q = -\infty$ et pour $q = +\infty$. Nous sommes ainsi conduits à chercher les valeurs asymptotiques de ψ_1 et de ψ_2 pour q infiniment grand positif ou négatif.

a) Recherche de la valeur asymptotique de ψ_1 pour $q \rightarrow +\infty$.

En posant $t = qz$, on peut écrire ψ_1 sous la forme

$$(98) \quad \left\{ \begin{aligned} \psi_1(q) &= \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}{2\pi i} e^{-\frac{q^2}{2}} \int_{-\infty}^{(0+)} e^{qt}^{-\frac{\lambda+1}{2}} q^{\frac{\lambda+1}{2}} e^{-\frac{t^2}{4q^2}} \frac{dt}{q} \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}{2\pi i} e^{-\frac{q^2}{2}} q^{\frac{\lambda-1}{2}} \int_{-\infty}^{(0+)} e^{qt}^{-\frac{\lambda+1}{2}} e^{-\frac{t^2}{4q^2}} dt, \end{aligned} \right.$$

le contour dans le plan complexe t étant le même que dans la figure 13, puisque q est positif. Quand q croît indéfiniment, on peut dans la der-

nière intégrale, remplacer $e^{-\frac{t^2}{4q^2}}$ par l'unité. Or une formule connue d'Analyse donne (1)

$$(99) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} e^t t^{-\frac{\lambda+1}{2}} dt = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}.$$

On a donc la forme asymptotique pour q très grand positif

$$(100) \quad \psi_1(q) = e^{-\frac{q^2}{2}} q^{\frac{\lambda-1}{2}} \quad (q \rightarrow \infty),$$

et l'on voit que $\psi_1(q)$ est nul pour $q = +\infty$.

b) Recherche de la valeur asymptotique de ψ_1 pour $q \rightarrow -\infty$.
La formule (96) peut être écrite :

$$(101) \quad \psi_1(q) = \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}{2\pi i} e^{\frac{q^2}{2}} \int_{-\infty}^{(0+)} z^{-\frac{\lambda+1}{2}} e^{-\left(\frac{z}{2}-q\right)^2} dz.$$

Posons :

$$(102) \quad z = 2(t + q).$$

Il vient :

$$(103) \quad \psi_1(q) = \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}{2\pi i} e^{\frac{q^2}{2}} q^{-\frac{\lambda-1}{2}} \int_{-\infty}^{(-q+)} \left(1 + \frac{t}{q}\right)^{-\frac{\lambda+1}{2}} e^{-t^2} dt,$$

l'intégrale étant prise dans le plan de la variable complexe t le long du contour ci-dessous (q étant ici négatif).

Plan de la variable
complexe t $q < 0$



Fig. 14.

Pour q tendant vers $-\infty$, l'intégrale sur le petit cercle qui entoure le point $t = -q$ tend vers zéro et il ne reste que les intégrales le long de

(1) WHITTAKER et WATSON, *Modern Analysis*, 4^e édition, p. 245.

l'axe réel. Pour q très grand négatif, nous avons donc la forme asymptotique :

$$(104) \quad \left\{ \begin{aligned} \psi_1(q) &= \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}{2\pi i} e^{\frac{q^2}{2}} \frac{\lambda-1}{2} q^{-\frac{\lambda+1}{2}} \left(e^{\frac{\lambda+1}{2}i\pi} - e^{-\frac{\lambda+1}{2}i\pi} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt \\ &= \Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right) \frac{\sin \frac{\lambda+1}{2}\pi}{\sqrt{\pi}} \frac{\lambda-1}{2} q^{-\frac{\lambda+1}{2}} \frac{q^2}{e^{\frac{q^2}{2}}} \quad (q \rightarrow -\infty). \end{aligned} \right.$$

Donc pour $q = -\infty$, $\psi_1(q)$ est infinie.

c) Valeurs asymptotiques de $\psi_2(q)$.

Puisque $\psi_2(q) = \psi_1(-q)$, les formules (100) et (104) nous donnent immédiatement les formes asymptotiques de $\psi_2(q)$. Comme $\psi_2(-\infty) = \psi_1(+\infty)$ et que $\psi_2(+\infty) = \psi_1(-\infty)$, on voit que pour $q = +\infty$, ψ_1 est infiniment petit et ψ_2 infiniment grand et que c'est l'inverse pour $q = -\infty$. Il en résulte tout de suite que les solutions ψ_1 et ψ_2 sont indépendantes comme nous l'avons annoncé.

Nous arrivons maintenant à la conclusion. Toute solution de (87) étant de la forme $c_1\psi_1 + c_2\psi_2$ est nécessairement infinie au moins pour l'une des deux limites $q = -\infty$ et $q = +\infty$. Donc aucune valeur de λ différente d'un nombre entier impair ne peut être valeur propre.

Etude des solutions de (87) pour $\lambda = 2n + 1$. — Si $\lambda = 2n + 1$ avec $n = 0, 1, \dots$, la fonction $\psi_1(q)$ définie par (96) est encore solution de l'équation d'onde, mais comme maintenant $\frac{\lambda+1}{2} = n + 1$ est un entier positif, le point $z = 0$ est un pôle, et non plus un point de branchement, pour la fonction à intégrer. Les intégrales le long de l'axe réel se détruisent et la solution ψ_1 se réduit à :

$$(105) \quad \psi_1(q) = \frac{\Gamma(n+1)}{2\pi i} e^{-\frac{q^2}{2}} \int_{(0+)} z^{-(n+1)} e^{-\frac{z^2}{4}} e^{qz} dz,$$

l'intégrale étant prise dans le sens positif sur un petit cercle entourant l'origine. Nous pouvons encore écrire :

$$(106) \quad \psi_1(q) = \frac{n!}{2\pi i} e^{\frac{q^2}{2}} \int_{(0+)} \frac{e^{-\left(\frac{z}{2}-q\right)^2}}{z^{n+1}} dz.$$

En posant : $t = q - \frac{z}{2}$, on obtient :

$$(107) \quad \psi_1(q) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{n!}{2\pi i} e^{\frac{q^2}{2}} \int_{(q+)} \frac{e^{-t^2} dt}{(t-q)^{n+1}},$$

l'intégrale étant prise dans le plan complexe t autour du point $t = q$. En appliquant un théorème bien connu de Cauchy, on transforme encore l'expression précédente en :

$$(108) \quad \psi_1(q) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n e^{\frac{q^2}{2}} \frac{d^n}{dq^n} (e^{-q^2}).$$

Par définition, on appelle « polynôme d'Hermite d'ordre n » la fonction :

$$(109) \quad H_n(q) = (-1)^n e^{q^2} \frac{d^n (e^{-q^2})}{dq^n},$$

qui est visiblement un polynôme de degré n . On peut donc écrire :

$$(110) \quad \psi_1(q) = \frac{1}{2^n} e^{-\frac{q^2}{2}} H_n(q)$$

et nous voyons que ψ_1 est nulle pour $q = \pm \infty$. $\psi_1(q)$ étant partout finie, la valeur $\lambda = 2n + 1$ est une valeur propre.

Que devient ici (pour $\lambda = 2n + 1$) notre ancienne solution $\psi_2(q) = \psi_1(-q)$? Comme l'on a visiblement $H_n(-q) = (-1)^n H_n(q)$, ψ_2 n'est pas distincte ici de ψ_1 . Il va nous falloir chercher une autre solution indépendante de ψ_1 pour pouvoir écrire l'intégrale générale de (87). Mais avant de le faire, remarquons encore que la forme asymptotique de $H_n(q)$ pour q très grand positif ou négatif étant $(2q)^n$, celle de ψ_1 sera :

$$(111) \quad \psi_1(q) = q^n e^{-\frac{q^2}{2}} \quad (q \rightarrow \pm \infty).$$

Cherchons maintenant une solution de (87) pour $\lambda = 2n + 1$ qui soit indépendante de la solution ψ_1 de la formule (110). Une nouvelle application de la méthode de Laplace, que nous ne développerons pas en détail, permet de trouver une telle solution que nous représenterons encore par $\psi_2(q)$ et qui s'écrit :

$$(112) \quad \psi_2(q) = e^{\frac{q^2}{2}} \int_0^{+\infty} z^n e^{-iqz} e^{-\frac{z^2}{4}} dz,$$

l'intégrale étant prise dans le plan z le long de l'axe réel de 0 à $+\infty$.

On peut démontrer que cette fonction ψ_2 admet, pour q très grand positif, l'expression asymptotique :

$$(113) \quad \psi_2(q) = n! e^{(n+1)i\frac{\pi}{2}q} - (n+1) \frac{q^2}{e^{\frac{q^2}{2}}} \quad (q \rightarrow +\infty)$$

et pour q très grand négatif, l'expression asymptotique :

$$(114) \quad \psi_2(q) = n! e^{-(n+1)i\frac{\pi}{2}q} - (n+1) \frac{q^2}{e^{\frac{q^2}{2}}} \quad (q \rightarrow -\infty).$$

ψ_2 tend donc vers l'infini pour q croissant indéfiniment en valeur absolue. Ceci suffit pour nous montrer que $\psi_1(q)$ est la seule fonction propre correspondant à la valeur propre $\lambda = 2n + 1$, car toute autre solution de (87) indépendante de ψ_1 est nécessairement de la forme $c_1\psi_1 + c_2\psi_2$ avec $c_2 \neq 0$ et par suite est infinie pour q infini.

Valeurs quantifiées pour l'oscillateur linéaire harmonique. — Les valeurs propres de l'équation (87) étant les valeurs

$$(115) \quad \lambda = 2n + 1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

il résulte des principes généraux de la Mécanique ondulatoire que les valeurs quantifiées de l'énergie correspondant aux états stationnaires de l'oscillateur sont celles qui correspondent aux valeurs (115) de λ . Or, on a par (84) et (86) :

$$(116) \quad \lambda = \frac{AE}{\sqrt{B}} = \frac{2}{\hbar\omega} E.$$

Les valeurs quantifiées de l'énergie sont donc :

$$(117) \quad E_n = (2n + 1) \frac{\hbar\omega}{2} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega.$$

C'est la loi dite des « demi-quanta » qui caractérise l'oscillateur linéaire harmonique ondulatoire et qui diffère de la loi :

$$(118) \quad E_n = n\hbar\omega,$$

prévue par l'ancienne théorie des quanta.

VI

**Passage d'un corpuscule
à travers un oscillateur linéaire harmonique limité**

Passage d'un corpuscule à travers un oscillateur linéaire harmonique limité. Position du problème. — Ayant étudié l'oscillateur linéaire harmonique illimité, nous allons pouvoir traiter maintenant du passage d'un corpuscule à travers un oscillateur linéaire harmonique limité.

Nous définirons l'oscillateur « limité » en supposant que le potentiel est égal à $\frac{Kx^2}{2}$ pour $-l < x < +l$ et nul en dehors de cet intervalle. Nous obtenons ainsi une montagne de potentiel ayant la forme d'une cuvette à profil parabolique.

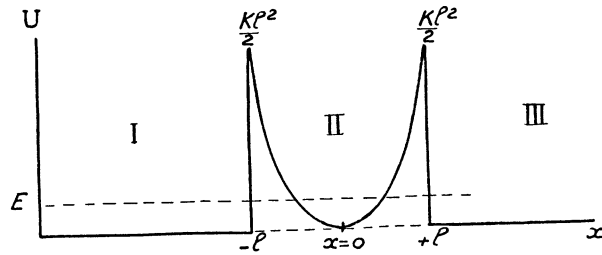


Fig. 15.

Sur cette montagne de potentiel arrivent, venant de la gauche, des corpuscules d'énergie E ; nous supposons cette énergie E beaucoup plus petite que les sommets $\frac{Kl^2}{2}$ de la montagne de potentiel.

Nous supposons que l est assez grand pour que les expressions asymptotiques des fonctions d'onde obtenues au dernier chapitre soient valables aux points $x = \pm l$. On pourrait vérifier que cette condition est équivalente à la suivante : la longueur l est supposée beaucoup plus grande que l'abscisse des points de rebroussement dans le mouvement prévu par la Mécanique classique pour l'énergie $\frac{h\omega}{2} \cdot (\omega = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{m}}$ étant la fréquence du mouvement classique).

PASSAGE DES CORPUSCULES ÉLECTRISÉS

Dans la région I ($x < -l$), nous avons superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie et nous devons poser :

$$(119) \quad \psi_I = e^{-ikx} + Ae^{+ikx}$$

avec :

$$(120) \quad k = \frac{2\pi}{h} \sqrt{2mE}.$$

Dans la région III ($x > l$), nous avons seulement l'onde transmise :

$$(121) \quad \psi_{III} = Ce^{-ikx}.$$

Le point essentiel est maintenant de déterminer l'onde dans la région II et d'écrire les conditions de passage en $x = \pm l$. Les calculs et les résultats vont être tout à fait différents, suivant que l'énergie E coïncide ou ne coïncide pas avec l'énergie d'un des états stables de l'oscillateur.

1^{er} cas : $E \neq \left(n + \frac{1}{2}\right)h\omega$ ou $\lambda = \frac{2E}{h\omega} \neq 2n + 1$. — Dans ce cas, nous avons trouvé pour l'équation d'onde de l'oscillateur linéaire harmonique deux solutions linéairement indépendantes ψ_1 et ψ_2 dont nous connaissons les expressions asymptotiques. En écrivant ces expressions asymptotiques en fonction de x (au lieu de les écrire en fonction de la variable auxiliaire q , comme dans le précédent chapitre), on trouve :

$$(122) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \psi_1(x) = e^{-\frac{2\pi^2 m \omega}{h} x^2} |x|^{\frac{\lambda-1}{2}} & (x \rightarrow +\infty) \\ \psi_1(x) = \alpha e^{\frac{2\pi^2 m \omega}{h} x^2} |x|^{-\frac{\lambda+1}{2}} & (x \rightarrow -\infty) \\ \psi_2(x) = \alpha e^{\frac{2\pi^2 m \omega}{h} x^2} |x|^{-\frac{\lambda+1}{2}} & (x \rightarrow +\infty) \\ \psi_2(x) = e^{-\frac{2\pi^2 m \omega}{h} x^2} |x|^{\frac{\lambda-1}{2}} & (x \rightarrow -\infty), \end{array} \right.$$

α étant une certaine constante, sans intérêt ici.

Dans la région II, nous devons poser :

$$(123) \quad \psi_{II} = B_1 \psi_1(x) + B_2 \psi_2(x)$$

Puisque, par hypothèse, les expressions asymptotiques sont valables pour $x = \pm l$, nous avons en posant pour simplifier : $\gamma = \frac{2\pi^2 m \omega}{h}$:

$$(124) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi_{II}(-l) = B_1 \alpha e^{\gamma l^2} l^{-\frac{\lambda+1}{2}} + B_2 e^{-\gamma l^2} l^{\frac{\lambda-1}{2}} \\ \psi_{II}(+l) = B_1 e^{-\gamma l^2} l^{\frac{\lambda-1}{2}} + B_2 \alpha e^{\gamma l^2} l^{-\frac{\lambda+1}{2}} \end{array} \right.$$

Il résulte des hypothèses que γl^2 est très grand devant l'unité et par suite les dérivées de ψ_{II} aux points $x = \pm l$ peuvent s'obtenir en tenant compte seulement de la variation des exponentielles. On a donc :

$$(I25) \quad \begin{cases} \psi'_{II}(-l) = 2\gamma l \left[B_2 e^{-\gamma l^2} l^{\frac{\lambda-1}{2}} - B_1 \alpha e^{\gamma l^2} l^{-\frac{\lambda+1}{2}} \right] \\ \psi'_{II}(+l) = 2\gamma l \left[B_2 \alpha e^{\gamma l^2} l^{-\frac{\lambda+1}{2}} - B_1 e^{-\gamma l^2} l^{\frac{\lambda-1}{2}} \right]. \end{cases}$$

Les conditions de continuité en $x = -l$ sont les suivantes :

$$(I26) \quad \begin{cases} e^{ikl} + A e^{-ikl} = B_1 \alpha e^{\gamma l^2} l^{-\frac{\lambda+1}{2}} + B_2 e^{-\gamma l^2} l^{\frac{\lambda-1}{2}} \\ \frac{i\hbar}{2\gamma l} [e^{ikl} - A e^{-ikl}] = B_1 \alpha e^{\gamma l^2} l^{-\frac{\lambda+1}{2}} - B_2 e^{-\gamma l^2} l^{\frac{\lambda-1}{2}}. \end{cases}$$

Posons encore :

$$(I27) \quad \mu = \frac{\hbar}{2\gamma l} = \frac{\hbar h}{4\pi^2 m \omega l},$$

et résolvons (I26) par rapport à B_1 et B_2 . Il vient :

$$(I28) \quad \begin{cases} B_1 = \frac{e^{-\gamma l^2}}{2\alpha} l^{\frac{\lambda+1}{2}} [e^{ikl} (1 + i\mu) + A e^{-ikl} (1 - i\mu)] \\ B_2 = \frac{e^{\gamma l^2}}{2} l^{-\frac{\lambda-1}{2}} [e^{ikl} (1 - i\mu) + A e^{-ikl} (1 + i\mu)]. \end{cases}$$

D'autre part, les conditions de continuité en $x = +l$ nous donnent :

$$(I29) \quad \begin{cases} C e^{-ikl} = B_1 e^{-\gamma l^2} l^{\frac{\lambda-1}{2}} + B_2 \alpha e^{\gamma l^2} l^{-\frac{\lambda+1}{2}} \\ i\mu C e^{-ikl} = B_1 e^{-\gamma l^2} l^{\frac{\lambda-1}{2}} + B_2 \alpha e^{\gamma l^2} l^{-\frac{\lambda+1}{2}}, \end{cases}$$

d'où l'on tire :

$$(I30) \quad \begin{cases} B_1 = \frac{e^{\gamma l^2}}{2} l^{-\frac{\lambda-1}{2}} [1 + i\mu] C e^{-ikl} \\ B_2 = \frac{e^{-\gamma l^2}}{2} l^{\frac{\lambda+1}{2}} [1 - i\mu] C e^{-ikl}. \end{cases}$$

En égalant les valeurs (I28) et (I30) de B_1 et B_2 , on trouve :

$$(I31) \quad \begin{cases} e^{ikl} (1 + i\mu) + A e^{-ikl} (1 - i\mu) = \alpha l^{-\lambda} e^{2\gamma l^2} (1 + i\mu) C e^{-ikl} \\ e^{ikl} (1 - i\mu) + A e^{-ikl} (1 + i\mu) = \frac{l^\lambda}{\alpha} e^{-2\gamma l^2} (1 - i\mu) C e^{-ikl} \end{cases}$$

PASSAGE DES CORPUSCULES ÉLECTRISÉS

Éliminons A et remarquons que $e^{2\gamma l^2}$ est beaucoup plus grand que $e^{-2\gamma l^2}$. Il nous reste finalement :

$$(132) \quad C = \frac{4i\mu e^{2ikl}}{\alpha l^{-\lambda} (1 + i\mu)^2 e^{2\gamma l^2}}.$$

Nous avons donc pour le coefficient de transmission des corpuscules à travers l'oscillateur limité :

$$(133) \quad T = |C|^2 = \frac{16\mu^2}{\alpha^2(1 + \mu^2)^2} l^{2\lambda} e^{-4\gamma l^2}.$$

A cause du facteur exponentiel, ce coefficient est très faible : la réflexion sur l'oscillateur est donc presque totale.

Si nous formons le rapport $\left| \frac{B_1}{B_2} \right|$, nous voyons qu'il contient le facteur très grand $e^{2\gamma l^2}$. C'est donc le terme en ψ_1 qui prédomine de beaucoup dans l'expression de ψ_{II} . Or, la fonction $\psi_1(x)$ va en diminuant depuis $x = -l$, où elle est très grande jusqu'en $x = +l$, où elle est sensiblement nulle. La courbe donnant le module de ψ en fonction de x a donc l'allure suivante :

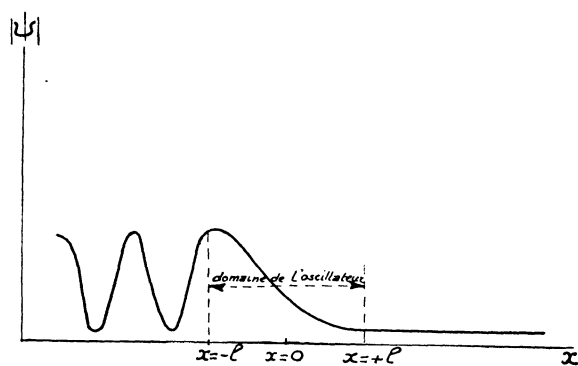


Fig. 16.

L'onde incidente se réfléchit presque totalement sur l'oscillateur, ce qui donne lieu à des ondes stationnaires très marquées à gauche de l'oscillateur.

2^e Cas : $E = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega$; $\lambda = 2n + 1$. — Bien différents vont être les résultats quand l'onde incidente est en résonance sur l'oscillateur limité.

Nous avons ici dans la région II deux solutions de l'équation des ondes linéairement indépendantes ψ_1 et ψ_2 dont les expressions asymptotiques sont les suivantes :

$$(I34) \quad \begin{cases} \psi_1(x) = x^n e^{-\gamma x^2} & (x \rightarrow \pm \infty) \\ \psi_2(x) = x^{-(n+1)} e^{\gamma x^2} & (x \rightarrow \pm \infty), \end{cases}$$

où γ a toujours la même valeur que dans le cas I.

ψ_1 est donc ici très petit pour $x = \pm l$, tandis que ψ_2 y est très grand en valeur absolue. Si l'oscillateur était illimité, ψ_1 serait la fonction propre correspondant à l'énergie $E = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega$, fonction propre qui s'exprime par un polynôme d'Hermite. Remarquons que si ψ_1 est une fonction paire de x , ψ_2 est une fonction impaire et inversement, suivant la parité du nombre entier n .

Posons toujours :

$$(I35) \quad \psi_{II}(x) = B_1 \psi_1(x) + B_2 \psi_2(x).$$

Nous avons :

$$(I36) \quad \begin{cases} \psi_{II}(\pm l) = B_1(\pm l)^n e^{-\gamma l^2} + B_2(\pm l)^{-(n+1)} e^{\gamma l^2} \\ \psi'_{II}(\pm l) = 2\gamma(\pm l)[B_2(\pm l)^{-(n+1)} e^{\gamma l^2} - B_1(\pm l)^n e^{-\gamma l^2}]. \end{cases}$$

Les conditions de continuité en $x = -l$ sont donc :

$$(I37) \quad \begin{cases} e^{ikl} + A e^{-ikl} = B_1(-l)^n e^{-\gamma l^2} + B_2(-l)^{-(n+1)} e^{\gamma l^2} \\ i\mu[e^{ikl} - A e^{-ikl}] = B_2(-l)^{-(n+1)} e^{\gamma l^2} - B_1(-l)^n e^{-\gamma l^2}, \end{cases}$$

avec la même définition de μ qu'au paragraphe précédent. De (I37), on tire

$$(I38) \quad \begin{cases} B_1 = \frac{(-l)^{-n} e^{\gamma l^2}}{2} [e^{ikl}(\mathbf{I} - i\mu) + A e^{-ikl}(\mathbf{I} + i\mu)] \\ B_2 = \frac{(-l)^{n+1} e^{-\gamma l^2}}{2} [e^{ikl}(\mathbf{I} + i\mu) + A e^{-ikl}(\mathbf{I} - i\mu)]. \end{cases}$$

D'autre part, les conditions de continuité en $x = +l$ sont :

$$(I39) \quad \begin{cases} i\mu C e^{-ikl} = B_1 l^n e^{-\gamma l^2} - B_2 l^{-(n+1)} e^{\gamma l^2} \\ C e^{-ikl} = B_1 l^n e^{-\gamma l^2} + B_2 l^{-(n+1)} e^{\gamma l^2}, \end{cases}$$

d'où l'on tire :

$$(140) \quad \begin{cases} B_1 = \frac{l^{-n} e^{\gamma l^2}}{2} C e^{-ikl(1 + i\mu)} \\ B_2 = \frac{l^{n+1} e^{-\gamma l^2}}{2} C e^{-ikl(1 - i\mu)}. \end{cases}$$

Par comparaison de (138) et (140), on trouve :

$$(141) \quad \begin{cases} C e^{-ikl(1 + i\mu)} = (-1)^{-n} [e^{ikl(1 - i\mu)} + A e^{-ikl(1 + i\mu)}] \\ C e^{-ikl(1 - i\mu)} = (-1)^{n+1} [e^{ikl(1 + i\mu)} + A e^{-ikl(1 - i\mu)}]. \end{cases}$$

En éliminant A, on trouve alors :

$$(142) \quad C = (-1)^{n+1} e^{2ikl} \frac{2i\mu}{1 + \mu^2},$$

d'où :

$$(143) \quad T = CC^* = \frac{4\mu^2}{(1 + \mu^2)^2}.$$

Si l'on explicite la valeur de μ et si l'on désigne par U_m le maximum égal à $\frac{Kl^2}{2}$ du potentiel, on trouve aussi :

$$(144) \quad T = \frac{4 \frac{E}{U_m}}{\left(1 + \frac{E}{U_m}\right)^2}.$$

La variation de T en fonction de E, pour l donnée, est représentée par le tableau suivant :

$$\begin{array}{c|c} E & 0 \longrightarrow U_m \longrightarrow +\infty \\ T & 0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 0. \end{array}$$

Mais tous nos raisonnements supposent que E est petit devant U_m . Le coefficient T sera donc petit, mais néanmoins en général il sera beaucoup moins petit que dans le cas I, car son expression ne contient pas l'exponentielle $e^{-4\gamma l^2}$ de la formule (133). Comme ici encore, le rapport $\left|\frac{B_1}{B_2}\right|$ est très grand de l'ordre de $e^{2\gamma l^2}$, l'onde ψ_2 prédomine au centre de la région II ; près des extrémités de l'oscillateur il n'en est plus de même, parce que là ψ_2 est extrêmement grand. Or, la fonction ψ_1 a une grande amplitude dans la partie centrale de l'oscillateur et y présente des maxima et des minima. On a donc une sorte d'exalta-

tion de l'onde à l'intérieur de la barrière de potentiel avec une réflexion moins marquée que dans le cas 1. La figure 17 représente le module de ψ en fonction de x .

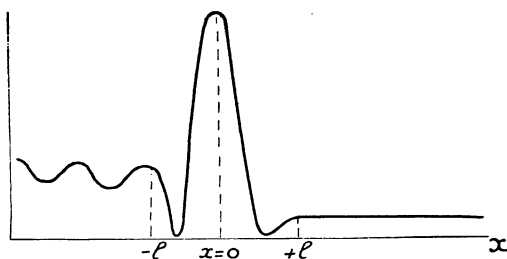


Fig. 17.

La paradoxe de l'oscillateur. — Les calculs qui viennent d'être exposés permettent de lever un paradoxe apparent qui se présente dans l'étude des valeurs propres de l'oscillateur linéaire illimité. Si la loi de potentiel $U = \frac{Kx^2}{2}$ est valable pour toutes les valeurs de x (oscillateur illimité), les seules valeurs de l'énergie E pour lesquelles il y ait une solution de l'équation d'ondes partout finie et continue, sont, comme nous l'avons vu, les valeurs $E = \left(n + \frac{1}{2}\right) h\omega$ avec $n = 0, 1, 2, \dots$. Mais si l'on a $U(x) = \frac{Kx^2}{2} e^{-\kappa x^2}$, κ étant une constante positive, on peut montrer que, pour toute valeur positive de E , il y a une solution finie et continue, c'est-à-dire que toutes les valeurs de E sont valeurs propres. Or, ceci est vrai quelque petit que soit κ : là est le paradoxe annoncé. Il paraît, en effet, paradoxal que l'on ait un spectre continu pour κ aussi petit que l'on veut, puisque pour $\kappa = 0$, on a l'oscillateur harmonique avec son spectre discontinu.

Plus généralement, si nous prenons pour $U(x)$ une fonction qui se confonde avec $\frac{Kx^2}{2}$ pour les valeurs par trop grandes de x mais qui tende vers zéro quand $|x|$ tend vers l'infini, on a un spectre continu formé de toutes les valeurs positives de E . L'oscillateur limité que nous venons d'étudier est un cas particulier de ce genre et en étudiant ce qui se passe dans ce cas quand la longueur 2ℓ croît indéfiniment, nous allons parvenir à comprendre comment on passe d'un spectre

continu à un spectre discontinu : la même explication serait valable dans le cas général d'une fonction $U(x)$ se confondant avec $\frac{Kx^2}{2}$ pour x pas trop grand et tendant vers zéro pour $|x|$ tendant vers l'infini.

Considérons donc un oscillateur limité de longueur $2l$. Pour toute valeur de E positive, nous avons une solution finie et continue, mais suivant que E est ou n'est pas de la forme $(n + \frac{1}{2}) h\omega$, cette solution sera représentée par la courbe 17 ou par la courbe 16. Dans le premier cas, l'onde aura une forte amplitude dans l'oscillateur ; dans le second cas, elle en aura une faible. Si nous faisons croître l indéfiniment, le module de la fonction ψ dans l'oscillateur deviendra de plus en plus faible si $E \neq (n + \frac{1}{2}) h\omega$ et à la limite pour $l = \infty$, ce module sera nul. Donc pour l'oscillateur illimité et pour $E \neq (n + \frac{1}{2}) h\omega$, la solution finie et continue se réduira identiquement à zéro : ce ne sera plus une vraie fonction propre et les valeurs de E différentes de $(n + \frac{1}{2}) h\omega$ ne sont plus des valeurs propres pour l'oscillateur illimité. Au contraire, les valeurs $E = (n + \frac{1}{2}) h\omega$ restent valeurs propres et les fonctions propres correspondantes sont celles que nous avons exprimées à l'aide des polynômes d'Hermite.

Calcul approché par la formule (14). — Voyons maintenant ce que nous donnerait dans le problème actuel l'application de l'approximation de l'optique géométrique, c'est-à-dire de la formule (14). Bien entendu, cette application est en principe illégitime puisque la formule (14) ne peut être appliquée dans les régions où le potentiel $U(x)$ est voisin de E (voir figure 15). Néanmoins nous voulons voir où elle nous conduit.

A l'approximation de la formule (14), nous devons nous attendre à trouver pour les coefficients de transmission une expression de la forme :

$$(145) \quad T = f(K, l, E) e^{\pm \frac{4\pi}{k} \int \sqrt{2m(U-E)} dx}$$

l'intégrale en exposant étant prise dans la partie de la montagne de

potentiel où l'indice est imaginaire, c'est-à-dire d'abord de $-l$ à $-\sqrt{\frac{2E}{K}}$, puis de $+\sqrt{\frac{2E}{K}}$ à $+l$. On a donc

$$(146) \quad T = f(K, l, E) e^{\frac{4\pi\sqrt{2m}}{h} \left[\pm \int_{-l}^{-\sqrt{\frac{2E}{K}}} \sqrt{\frac{Kx^2}{2} - E} dx \pm \int_{\sqrt{\frac{2E}{K}}}^l \sqrt{\frac{Kx^2}{2} - E} dx \right]}$$

L'approximation de l'optique géométrique ne peut d'ailleurs déterminer ni la fonction $f(K, l, E)$, ni les signes à prendre dans l'exposant. Comme $U(x)$ est ici paire, les deux intégrales dans (146) sont égales et il nous suffit de calculer la seconde. Pour cela, on peut faire le changement de variables :

$$(146) \quad \frac{Kx^2}{2E} = ch^2y$$

qui donne :

$$(147) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_{\sqrt{\frac{2E}{K}}}^l \sqrt{\frac{Kx^2}{2} - E} dx &= \sqrt{\frac{2}{K}} E \int_0^{\text{arc } ch \sqrt{\frac{Kl^2}{2E}}} sh^2y dy \\ &= \frac{E}{\sqrt{8K}} \left| \frac{e^{2y} - e^{-2y}}{2} - 2y \right|_0^{\text{arc } ch \sqrt{\frac{Kl^2}{2E}}} \end{aligned} \right.$$

Comme $\frac{Kl^2}{2E}$ est par hypothèse très grand, c'est le terme en $e^{2 \text{arc } ch \sqrt{\frac{Kl^2}{2E}}}$ qui est prédominant dans l'expression (147). D'autre part, on voit facilement que pour u très grand, on peut confondre $\text{arc } ch u$ avec $\log 2u$. Il en résulte qu'on peut écrire très approximativement

$$(148) \quad \int_{\sqrt{\frac{2E}{K}}}^l \sqrt{\frac{Kx^2}{2} - E} dx = \frac{E}{\sqrt{8K}} \cdot \frac{1}{2} \left(2 \sqrt{\frac{Kl^2}{2E}} \right)^2 = \sqrt{\frac{K}{8}} l^2,$$

d'où en portant dans (146) :

$$(149) \quad T = f(K, l, E) e^{\pm \frac{2\pi\sqrt{Km}}{h} l^2 \pm \frac{2\pi\sqrt{Km}}{h} l^2}.$$

Mais, en se reportant à la définition de ω , on voit aisément que le coefficient de l^2 dans les exposants est ce que nous avons précédemment appelé 2γ . Donc :

$$(150) \quad T = f(K, l, E) e^{\pm 2\gamma l^2 \pm 2\gamma l^2}.$$

Mais comment choisir les signes ? Evidemment nous ne pouvons pas prendre deux fois le signe $+$ car alors nous aurions T extrêmement grand comme $e^{4\gamma l^2}$, ce qui est impossible puisque, par sa nature même, T doit toujours être inférieur à 1. Restent deux possibilités : prendre 2 fois le signe $-$ ou prendre une fois $+$, une fois $-$.

Nous arrivons ainsi à la conclusion suivante : « ou bien T est de la forme :

$$(151) \quad T = f(K, l, E) e^{-4\gamma l^2}$$

et est extrêmement petit ; ou bien T est de la forme :

$$(152) \quad T = f(K, l, E)$$

et n'est plus nécessairement extrêmement petit. »

La tentative d'appliquer l'approximation de l'optique géométrique ne permet pas d'aller plus loin. Au contraire, nos calculs plus rigoureux, fondés sur la forme asymptotique des solutions de l'équation des ondes dans l'oscillateur linéaire harmonique, nous ont montré que la formule (151) convient quand on a $E \neq \left(n + \frac{1}{2}\right)h\omega$ et la formule (152) quand $E = \left(n + \frac{1}{2}\right)h\omega$. De plus, ils nous ont fourni l'expression complète de la fonction $f(K, l, E)$ dans chaque cas.

En somme, seul le calcul rigoureux peut nous dire comment les solutions qui entre $x = -l$ et $x = -\sqrt{\frac{2E}{K}}$ ont pour facteur dominant $e^{\gamma x^2}$ et $e^{-\gamma x^2}$ se raccordent, au travers de la région où l'optique géométrique n'est pas applicable, aux solutions qui ont entre $x = +\sqrt{\frac{2E}{K}}$ et $x = +l$ les facteurs dominants $e^{\gamma x^2}$ et $e^{-\gamma x^2}$. En fait, ils nous montrent que ce raccordement se fait comme suit :

$$\begin{array}{ccc}
 \text{1er cas : } E \neq \left(n + \frac{1}{2}\right)h\omega & & \text{2e cas : } E = \left(n + \frac{1}{2}\right)h\omega \\
 \begin{array}{c}
 e^{\gamma x^2} \xrightarrow{\Psi_1} e^{\gamma x^2} \\
 e^{-\gamma x^2} \xrightarrow{\Psi_2} e^{-\gamma x^2}
 \end{array} & & \begin{array}{c}
 e^{\gamma x^2} \xrightarrow{\Psi_1} e^{\gamma x^2} \\
 e^{-\gamma x^2} \xrightarrow{\Psi_1 \text{ fonction propre}} e^{-\gamma x^2}
 \end{array} \\
 \begin{array}{c}
 | \quad | \quad | \\
 x = -l \quad x = 0 \quad x = +l
 \end{array} & & \begin{array}{c}
 | \quad | \quad | \\
 x = -l \quad x = 0 \quad x = +l
 \end{array}
 \end{array}$$

VII

Diffusion des corpuscules par une sphère de potentiel constant

Position du problème. — Nous allons étudier maintenant la diffusion d'un faisceau de corpuscules monocinétiques par une région sphérique où règne un potentiel U constant.

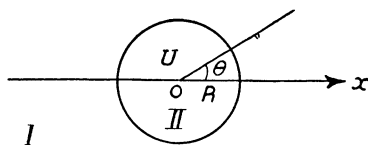


Fig. 18.

Nous prenons l'axe des x parallèle à la direction du mouvement des corpuscules incidents et passant par le centre de la sphère. Nous prendrons un système de coordonnées polaires dont cet axe des x soit l'axe polaire. Tout le phénomène est évidemment de révolution autour de cet axe polaire. De cette symétrie résulte que toute fonction intervenant dans notre problème devra être développable en série de polynômes de Legendre avec des coefficients dépendant du rayon vecteur.

L'onde ψ associée aux corpuscules incidents va être ici encore de la forme :

$$(153) \quad \psi_i = e^{-ikr}$$

avec :

$$(154) \quad k = \frac{2\pi}{h} \sqrt{2mE},$$

le facteur $e^{\frac{2\pi i}{h}Et}$ étant toujours sous-entendu.

La première question qui se pose alors est de développer cette onde plane en série de polynômes de Legendre sous la forme :

$$(155) \quad e^{-ikx} = e^{-ikr \cos \theta} = \sum_n^{\infty} f_n(r) P_n(\cos \theta).$$

Puis nous aurons de même à développer l'onde à l'intérieur de la sphère de potentiel et l'onde diffusée à l'extérieur en séries de polynômes de Legendre. Il ne nous restera plus ensuite qu'à écrire les conditions de continuité aux limites de la sphère de potentiel pour pouvoir résoudre le problème. Pour calculer les coefficients des développements en séries de polynômes de Legendre que nous avons à effectuer, nous aurons toujours à nous appuyer sur le fait que la fonction à développer est solution d'une équation d'ondes. Nous devons donc commencer par examiner quelle est la forme générale du développement en série de polynômes de Legendre pour une solution à symétrie cylindrique d'une équation de la forme $\Delta\psi + a^2\psi = 0$.

Intervention des fonctions de Bessel. — Considérons donc d'une façon générale une fonction ψ dépendant des coordonnées r et θ , mais non de l'azimut φ et supposons que cette fonction soit solution de l'équation :

$$(156) \quad \Delta\psi + a^2\psi = 0 \quad (a = \text{cte}).$$

Puisque ψ ne dépend pas de φ , (156) peut s'écrire :

$$(157) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right] + a^2 \psi = 0.$$

Si nous posons :

$$(158) \quad \psi = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(r) P_n(\cos \theta),$$

nous aurons

$$(159) \quad \sum_n \left\{ P_n \left[\frac{d^2 f_n}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{df_n}{dr} + a^2 f_n \right] + \frac{f_n}{r^2} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial P_n}{\partial \theta} \right) \right\} = 0.$$

Or, le n^e polynôme de Legendre $P_n(\cos \theta)$ satisfait à l'équation :

$$(160) \quad \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial P_n}{\partial \theta} \right) = -n(n+1)P_n.$$

En portant cette valeur dans (159), on obtient au premier membre de (159) une série de termes dont chacun est le produit d'un polynôme de Legendre par une quantité qui est fonction de r seulement. Pour que la somme de cette série de termes soit nulle pour toute valeur de $\cos \theta$, il faut que les coefficients de tous les P_n soient nuls. Il faut

donc avoir pour toute valeur de n :

$$(161) \quad \frac{d^2 f_n}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{df_n}{dr} + \left(a^2 - \frac{n(n+1)}{r^2} \right) f_n = 0.$$

Si maintenant nous posons :

$$(162) \quad \rho = ar; \quad f_n(r) = \rho^{-\frac{1}{2}} \varphi_{n+\frac{1}{2}}(\rho)$$

l'équation (161) se transforme aisément en la suivante :

$$(163) \quad \frac{d^2 \varphi_{n+\frac{1}{2}}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\varphi_{n+\frac{1}{2}}}{d\rho} + \left[1 - \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2}{\rho^2} \right] \varphi_{n+\frac{1}{2}} = 0;$$

c'est l'équation de Bessel d'ordre $n + \frac{1}{2}$.

Donc la fonction ψ en question est développable en série de la forme :

$$(164) \quad \psi(r, \theta) = \sum_0^\infty \frac{c_n}{\sqrt{ar}} \varphi_{n+\frac{1}{2}}(ar) P_n(\cos \theta).$$

où $\varphi_{n+\frac{1}{2}}$ est une solution de Bessel d'ordre $n + \frac{1}{2}$, solution qui doit être choisie de façon que ψ satisfasse aux conditions d'uniformité et de continuité et aux conditions aux limites qui sont imposées par la nature du problème.

Nous voici donc amenés à rappeler les propriétés générales de l'équation de Bessel d'ordre p :

$$(165) \quad \frac{d^2 \varphi}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\varphi}{d\rho} + \left(1 - \frac{p^2}{\rho^2} \right) \varphi = 0.$$

Tout d'abord cette équation est une équation linéaire qui peut posséder deux solutions régulières autour du point $\rho = 0$ (car $\rho = 0$ est un pôle d'ordre 1 pour le coefficient de $\frac{d\varphi}{d\rho}$ et un pôle d'ordre 2 pour celui de φ). L'équation déterminante qui donne la plus petite puissance ν de ρ dans le développement de ces deux solutions est $\nu(\nu - 1) + \nu - p^2 = 0$, d'où $\nu = \pm p$. Il y a donc une seule solution qui soit régulière et finie en $\rho = 0$: c'est la solution de la forme $\rho^p(a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + \dots)$. Cette solution est nommée la fonction de Bessel d'ordre p et désignée par $J_p(\rho)$.

On démontre que (avec un certain choix de la constante multiplicative arbitraire) la fonction $J_p(\rho)$ peut se définir par le développement :

$$(166) \quad J_p(\rho) = \left(\frac{\rho}{2}\right)^p \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2n} \frac{1}{\Gamma(n+p+1)}.$$

On démontre aussi que la valeur asymptotique de $J_p(\rho)$ est :

$$(167) \quad J_p(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} \cos\left(\rho - \frac{p\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad (\rho \rightarrow \infty).$$

Il existe d'ailleurs une autre solution de l'équation de Bessel d'ordre p , la fonction de Neumann d'ordre p : $N_p(\rho)$, solution qui, elle, n'est pas régulière pour $\rho = 0$ mais qui a pour valeur asymptotique

$$(168) \quad N_p(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} \sin\left(\rho - \frac{p\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (\rho \rightarrow \infty).$$

La fonction $N_p(\rho)$ est linéairement indépendante de $J_p(\rho)$ de sorte que toute solution de l'équation de Bessel d'ordre p est une combinaison linéaire de J_p et de N_p .

Mais au lieu de prendre comme solutions fondamentales permettant d'exprimer toutes les autres les fonctions J_p et N_p , on pourrait aussi bien prendre les fonctions :

$$(169) \quad H_p^{(1)}(\rho) = J_p(\rho) + iN_p(\rho); \quad H_p^{(2)}(\rho) = J_p(\rho) - iN_p(\rho).$$

Ce sont la première et la deuxième fonction de Hankel d'ordre p . Aucune des deux n'est régulière à l'origine, mais leur importance vient surtout de leurs valeurs asymptotiques qui sont :

$$(170) \quad H_p^{(1)}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} e^{i\left(\rho - \frac{p\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}; \quad H_p^{(2)}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} e^{-i\left(\rho - \frac{p\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}.$$

Nous voyons en comparant (170) avec (167) et (168) que les deux fonctions de Hankel sont par rapport à J_p et à N_p ce que sont les exponentielles e^{ix} et e^{-ix} par rapport au sinus et au cosinus.

Pour ce qui suit, il est particulièrement intéressant d'examiner le cas où $p = \frac{1}{2}$. Dans ce cas, le développement (166) se transforme aisément en tenant compte des propriétés des fonctions Γ

$$\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right) = \left(n + \frac{1}{2}\right)\left(n - \frac{1}{2}\right) \dots \frac{3}{2} \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \left(n + \frac{1}{2}\right)\left(n - \frac{1}{2}\right) \dots \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$$

et donne :

$$(171) \quad J_{\frac{1}{2}}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \rho^{2n+1} = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} \sin \rho = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} \cos \left(\rho - \frac{\pi}{2} \right).$$

Telle est la valeur de $J_{\frac{1}{2}}(\rho)$. Comme pour $p = \frac{1}{2}$ l'expression asymptotique (167) devient égale à $\sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} \sin \rho$, on voit que, contrairement à ce qui se passe pour les autres J_p , $J_{\frac{1}{2}}$ est égale partout à sa valeur asymptotique. Il en est du reste de même pour $N_{\frac{1}{2}}(\rho)$, $H_{\frac{1}{2}}^{(1)}(\rho)$ et $H_{\frac{1}{2}}^{(2)}(\rho)$ qui sont égales, pour toutes les valeurs de ρ , à :

$$(172) \quad N_{\frac{1}{2}}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} \sin \left(\rho - \frac{\pi}{2} \right); \quad H_{\frac{1}{2}}^{(1)}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} e^{i \left(\rho - \frac{\pi}{2} \right)};$$

$$H_{\frac{1}{2}}^{(2)}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} e^{-i \left(\rho - \frac{\pi}{2} \right)}.$$

Notons encore que l'on a :

$$(173) \quad J_{\frac{1}{2}}(i\rho) = \sqrt{\frac{2}{i\pi\rho}} \sin(i\rho) = \sqrt{\frac{2i}{\pi\rho}} sh(\rho).$$

Développement de l'onde plane en polynômes de Legendre (lord Rayleigh). — Nous allons maintenant pouvoir préciser les coefficients du développement (155). Posons, pour simplifier l'écriture, $\mu = \cos \vartheta$. Comme l'onde plane est solution de l'équation (156) avec $a = k$, la formule (164) nous donne :

$$(174) \quad e^{-ikr\mu} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{\varphi_{n+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{kr}} P_n(\mu).$$

Les fonctions $\varphi_{n+\frac{1}{2}}(kr)$ doivent rester finies pour $r = 0$ et régulière autour de l'origine ; nous devons prendre $\varphi_{n+\frac{1}{2}}(kr)$ égale à la fonction

de Bessel $J_{n+\frac{1}{2}}(kr)$. Le développement (174) est donc de la forme :

$$(175) \quad e^{-ikr} = \sum_n c_n \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{kr}} P_n(\mu)$$

et il reste encore à calculer les c_n .

Nous savons que le n^e polynôme de Legendre $P_n(\mu)$ est un polynôme de degré n que l'on peut définir par la formule :

$$(176) \quad P_n(\mu) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\mu^n} (\mu^2 - 1)^n.$$

L'on a donc :

$$(177) \quad \frac{d^n P_n}{d\mu^n} = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^{2n}}{d\mu^{2n}} (\mu^2 - 1)^n = \frac{(2n)!}{2^n n!} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n - 1).$$

En dérivant m fois par rapport à μ la formule (175), les m premiers termes obtenus au second membres seront nuls et l'on obtiendra en divisant par $(kr)^m$:

$$(178) \quad (-i)^m e^{-ikr} = c_m \frac{J_{m+\frac{1}{2}}(kr)}{(kr)^{m+\frac{1}{2}}} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m - 1) + \dots$$

tous les termes non écrits contenant le quotient d'une fonction de Bessel d'indice supérieur à $m + \frac{1}{2}$ par $(kr)^{m+\frac{1}{2}}$. Faisons dans (178) $r = 0$. Le développement (166) permet de voir aussitôt que tous les

termes non écrits donneront zéro et que le terme $\frac{J_{m+\frac{1}{2}}(kr)}{(kr)^{m+\frac{1}{2}}}$ donnera

$\left(\frac{1}{2}\right)^{m+\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\Gamma\left(m + \frac{3}{2}\right)}$. On a donc :

$$(179) \quad (-i)^m = c_m \frac{1}{2^{m+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{\Gamma\left(m + \frac{3}{2}\right)} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m - 1)$$

Or :

$$(180) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)}{2^{m+\frac{1}{2}} \Gamma\left(m+\frac{3}{2}\right)} &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)}{2^{m+\frac{1}{2}} \cdot \left(m+\frac{1}{2}\right) \left(m-\frac{1}{2}\right) \cdots \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi}} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{2m+1} \end{aligned} \right.$$

d'où :

$$(181) \quad c_m = (-i)^m \sqrt{\frac{\pi}{2}} (2m+1)$$

et l'on tire enfin le développement cherché :

$$(182) \quad e^{-ikr \cos \theta} = \sum_0^{\infty} (-i)^n \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} (2n+1) J_{n+\frac{1}{2}}(kr) P_n(\cos \theta).$$

C'est la formule célèbre de lord Rayleigh.

Diffusion des ondes ψ par la sphère de potentiel. — Nous voici en mesure de traiter le problème que nous avons en vue. Nous distinguerons deux cas suivant que l'énergie E des corpuscules incidents est supérieur ou inférieur à U .

1^{er} CAS. $E > U$

Nous pouvons avoir soit $U < 0$ (trou sphérique de potentiel), soit $U > 0$, mais $< E$ (montagne sphérique de potentiel). Nous posons

$$(183) \quad k = \frac{2\pi}{h} \sqrt{2mE} \quad k' = \frac{2\pi}{h} \sqrt{2m(E-U)}.$$

L'onde incidente est représentée par la formule (182).

L'onde diffusée doit, elle aussi, être solution de l'équation $\Delta\psi + k^2\psi = 0$. Par suite, elle doit se développer suivant les polynômes de LEGENDRE sous la forme :

$$(184) \quad \psi_d = \sum_0^{\infty} c_n \frac{\varphi_{n+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{kr}} P_n(\cos \theta),$$

où $\varphi_{n+\frac{1}{2}}$ est une solution de l'équation de BESSEL d'ordre $n+\frac{1}{2}$.

Mais ici, la condition qui détermine le choix de $\varphi_{n+\frac{1}{2}}$ n'est pas qu'elle

soit finie à l'origine, car l'origine est dans la sphère et l'onde diffusée n'existe qu'à l'extérieur de la sphère ; la condition qui doit déterminer φ , c'est qu'à l'infini l'onde (184) ait la forme d'une onde sphérique divergente. Cette condition sera remplie si nous prenons pour $\varphi_{n+\frac{1}{2}}(kr)$

la deuxième fonction de Hankel $H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(kr)$.

En effet d'après la valeur asymptotique (170), $H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}$ représente à l'infini une onde divergente. Aucune autre solution de l'équation de Bessel d'ordre $n + \frac{1}{2}$ ne saurait d'ailleurs être prise pour $\varphi_{n+\frac{1}{2}}$ car toute autre solution de cette équation est de la forme

$$AH_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(kr) + BH_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(kr) \quad \text{avec} \quad A \neq 0,$$

et représente à l'infini, d'après (170), la superposition d'une onde divergente et d'une onde convergente.

Nous pouvons donc (en modifiant les constantes du développement (184)), écrire l'expression de l'onde diffusée sous la forme :

$$(185) \quad \psi_d = \sum_0^{\infty} (-i)^n \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} (2n+1) c_n H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(kr) P_n(\cos \theta).$$

Le calcul des c_n est l'objet de notre problème.

A l'intérieur de la sphère de potentiel, l'onde obéit à l'équation $\Delta\psi + k'^2\psi = 0$ et en raison de la symétrie cylindrique, elle peut se développer sous la forme générale (164) avec $a = k'$. Comme cette onde intérieure doit être régulière et finie au centre de la sphère, il faut prendre $\varphi_{n+\frac{1}{2}}(k'r)$ égale à $J_{n+\frac{1}{2}}(k'r)$.

Bref à l'extérieur de la sphère, nous avons :

$$(186) \quad \left\{ \begin{aligned} \psi_I &= \psi_i + \psi_d \\ &= \sum_0^{\infty} (-i)^n \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} (2n+1) \left[J_{n+\frac{1}{2}}(kr) + c_n H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(kr) \right] P_n(\cos \theta). \end{aligned} \right.$$

et à l'intérieur de la sphère, nous avons :

$$(187) \quad \psi_{II} = \sum_n^{\infty} (n-i)^n \sqrt{\frac{\pi}{2k'r}} (2n+1) c_n' J_{n+\frac{1}{2}}(k'r) P_n(\cos \theta).$$

Les coefficients c_n et c_n' vont être déterminés en écrivant qu'à la surface de la sphère ($r = R$), on a $\psi_I = \psi_{II}$ et $\left(\frac{\partial \psi_I}{\partial r}\right)_R = \left(\frac{\partial \psi_{II}}{\partial r}\right)_R$.

La première de ces deux conditions nous donne :

$$(188) \quad \left\{ \begin{aligned} & \sum_n^{\infty} (-i)^n \sqrt{\frac{\pi}{2k'R}} (2n+1) [J_{n+\frac{1}{2}}(kR) + c_n H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(kR)] P_n(\cos \theta) \\ & = \sum_n^{\infty} (-i)^n \sqrt{\frac{\pi}{2k'R}} (2n+1) J_{n+\frac{1}{2}}(k'R) P_n(\cos \theta). \end{aligned} \right.$$

Comme ceci doit être vrai pour toutes les valeurs de $\cos \theta$, on doit avoir pour toutes les valeurs de n :

$$(189) \quad \frac{1}{\sqrt{k}} [J_{n+\frac{1}{2}}(kR) + c_n H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(kR)] = \frac{1}{\sqrt{k'}} c_n' J_{n+\frac{1}{2}}(k'R).$$

En écrivant la continuité des dérivées radiales et en tenant de (189), on trouve :

$$(190) \quad \frac{1}{\sqrt{k}} \left[\frac{\partial}{\partial r} (J_{n+\frac{1}{2}}(kr) + c_n H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(kr)) \right]_{r=R} = \frac{c_n'}{\sqrt{k'}} \left[\frac{\partial}{\partial r} J_{n+\frac{1}{2}}(k'r) \right]_{r=R}.$$

Posons :

$$(191) \quad \left[\frac{\partial}{\partial r} (J_{n+\frac{1}{2}}(kr)) \right]_{r=R} = J'_{n+\frac{1}{2}}(kR), \text{ etc...}$$

nous trouvons en éliminant c_n' entre (189) et (191) :

$$(192) \quad c_n = \frac{J'_{n+\frac{1}{2}}(kR) J_{n+\frac{1}{2}}(k'R) - J_{n+\frac{1}{2}}(k'R) J'_{n+\frac{1}{2}}(kR)}{J'_{n+\frac{1}{2}}(k'R) H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(kR) - H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)'}(kR) J_{n+\frac{1}{2}}(k'R)},$$

formule qui permet en principe le calcul des divers coefficients c_n , c'est-à-dire la détermination complète de l'onde diffusée (185).

Nous nous contenterons ici de calculer le coefficient c_0 en remarquant que, si la longueur d'onde λ est très grande par rapport à R , les autres coefficients sont négligeables devant celui-là. En effet, kR étant alors très petit, on voit aisément que le numérateur de (192) est de l'ordre de $(kR)^{n-\frac{1}{2}}$ tandis que le dénominateur est de l'ordre de $(kR)^{-(n+\frac{3}{2})}$ c_n est donc de l'ordre de $(kR)^{2n+1}$ et $c_1, c_2, \dots$ sont négligeables devant c_0 .

En faisant $n = 0$ dans (192) et en remplaçant J et $H^{(2)}$ d'indices $\frac{1}{2}$ par leurs expressions (171) et (172), on trouve :

$$(193) \quad c_0 = \frac{k \sin k'R \cos kR - k' \sin kR \cos k'R}{ik' \cos k'R - k \sin kR} \cdot e^{ikR}.$$

Le carré du module de c_0 est donc :

$$(194) \quad |c_0|^2 = \frac{[k \sin k'R \cos kR - k' \sin kR \cos k'R]^2}{k^2 \sin^2 kR + k'^2 \cos^2 k'R}.$$

Telle est l'intensité de la diffusion d'ordre zéro (qu'on nomme parfois aussi réflexion) par la sphère de potentiel. Elle est seule notable si $\lambda \gg R$. Cette diffusion est nulle si :

$$(195) \quad \frac{1}{k} \operatorname{tg} kR = \frac{1}{k'} \operatorname{tg} k'R.$$

Comme nous supposons kR très petit, on peut confondre $\operatorname{tg} kR$ avec kR et la condition (195) s'écrit

$$(196) \quad \operatorname{tg} k'R = k'R.$$

Elle exprime que l'onde intérieure (qui se réduit ici à son premier terme $\sqrt{\frac{\pi}{2k'r}} c_0' J_{\frac{1}{2}}(k'r)$ ou $c_0' \frac{\sin(k'r)}{k'r}$) a un maximum ou un minimum à la surface de la sphère.

L'équation (196) admet des solutions en k' de la forme :

$$(197) \quad k_n'R = (2n + 1)\frac{\pi}{2} - \varepsilon_n,$$

ε_n étant un nombre qui tend vers zéro quand n augmente. Ceci peut s'écrire aussi :

$$(198) \quad R = (2n + 1)\frac{\lambda'}{4} - r_n.$$

Cette conclusion est en accord de forme avec celles que nous avons rencontrées dans l'étude des barrières rectangulaires, mais il ne faut pas oublier que la condition (198) ne correspond à une réflexion nulle que si kR est très petit.

2^e Cas. $U > E$.

Dans la sphère, il y a une onde ψ stationnaire sans propagation. Nous poserons :

$$(199) \quad k' = \frac{2\pi}{h} \sqrt{2m(U - E)}.$$

L'équation des ondes dans la sphère est :

$$(200) \quad \Delta\psi - k'^2\psi = \Delta\psi + (ik')^2\psi = 0.$$

Nous pouvons appliquer la théorie du deuxième paragraphe en posant $a = ik'$. L'onde ψ_{II} dans la sphère aura donc la forme :

$$(201) \quad \psi_{II}(r, \theta) = \sum_n c_n \frac{P_n(\cos \theta)}{\sqrt{ik'r}}.$$

Comme ψ_{II} doit être régulière et finie à l'origine, nous sommes amenés à poser (en changeant le sens des constantes c').

$$(202) \quad \psi_{II}(r, \theta) = \sum_n c'_n (-i)^n \sqrt{\frac{\pi}{2ik'r}} (2n+1) J_{n+\frac{1}{2}}(ik'r) P_n(\cos \theta).$$

L'onde ψ_I est toujours représentée par la formule (186). Les mêmes formules que précédemment conduisent à la formule :

$$(203) \quad c_n = \frac{J'_{n+\frac{1}{2}}(kR) J_{n+\frac{1}{2}}(ik'R) - J_{n+\frac{1}{2}}(kR) J'_{n+\frac{1}{2}}(ik'R)}{J'_{n+\frac{1}{2}}(ik'R) H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(kR) - H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(kR) J'_{n+\frac{1}{2}}(ik'R)}.$$

Comme précédemment aussi, en faisant dans (203) $n = 0$ et en tenant compte de (171) et (173), on trouve :

$$(204) \quad c_0 = \frac{k \operatorname{sh} k'R \cos kR - k' \sin kR \operatorname{ch} k'R}{ik' \operatorname{ch} k'R - k \operatorname{sh} k'R} e^{ikh}.$$

et

$$(205) \quad |c_0|^2 = \frac{[k \operatorname{sh} k'R \cos kR - k' \sin kR \operatorname{ch} k'R]^2}{k'^2 \operatorname{ch}^2 k'R + k^2 \operatorname{sh}^2 k'R}.$$

La condition de réflexion nulle est donc ici :

$$(206) \quad \frac{1}{k'} \operatorname{tgh} k'R = \frac{1}{k} \operatorname{tg} kR.$$

VIII

Diffusion des corpuscules par une sphère où règne un champ radial

Solution théorique du problème. — Nous allons reprendre le problème traité au chapitre précédent, mais en supposant maintenant qu'à l'intérieur de la sphère diffusante, le potentiel n'est plus une constante mais varie comme une certaine fonction $U(r)$ de la distance au centre. A la limite de la sphère ($r = R$), le potentiel passe brusquement de la valeur $U(r)$ à la valeur zéro.

L'équation de propagation de l'onde ψ_{Π} dans la sphère est ici :

$$(207) \quad \Delta \psi_{\Pi} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} [E - U(r)] \psi_{\Pi} = 0.$$

Dans les problèmes réels auxquels le problème examiné ici est comparable, la sphère diffusante sera souvent un atome formé d'un noyau qu'entoure une atmosphère d'électrons. La fonction $U(r)$ varie alors comme $\frac{1}{r}$ au voisinage de $r = 0$. Nous sommes ainsi amené à faire l'hypothèse suivante : nous supposons que la fonction $U(r)$ présente un pôle simple à l'origine.

La symétrie cylindrique du problème autour de la parallèle à la direction des corpuscules incidents mené par le centre de la sphère permet encore de poser :

$$(208) \quad \psi_{\Pi} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(r) P_n(\cos \theta),$$

mais ici naturellement $f_n(r)$ n'est plus de la forme $\frac{r^{n+\frac{1}{2}}(r)}{\sqrt{r}}$.

En substituant (208) dans (207), on trouve aisément :

$$(209) \quad \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) \left[\frac{d^2 f_n}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{df_n}{dr} - \frac{n(n+1)}{r^2} f_n + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E - U) f_n \right] = 0.$$

Comme ceci doit être vrai pour toutes les valeurs de $\cos \theta$, le crochet doit être nul et nous avons pour toute valeur de n :

$$(210) \quad \frac{d^2 f_n}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{df_n}{dr} + \left[\frac{8\pi^2 m}{h^2} (E - U) - \frac{n(n+1)}{r^2} \right] f_n = 0,$$

C'est une équation linéaire dans laquelle le coefficient de $\frac{df_n}{dr}$ a un pôle d'ordre 1 à l'origine et (en vertu de l'hypothèse faite sur U) le coefficient de f_n a une pôle d'ordre 2 à l'origine. Donc, cette équation ne peut avoir que deux solutions régulières à l'origine de la forme $r^\gamma (a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \dots)$. Les valeurs de γ sont données par l'équation déterminante :

$$(211) \quad \gamma(\gamma - 1) + 2\gamma - n(n+1) = 0$$

dont les solutions sont $\gamma = n$ et $\gamma = -(n+1)$. L'équation (210) a donc une seule solution régulière et finie en $r = 0$, solution qui se comporte comme r^n au voisinage de l'origine. C'est cette solution que nous désignerons désormais par $f_n(r)$. Remarquons d'ailleurs que si $f_n(r)P_n(\cos \theta)$ est une solution de l'équation (207), ce n'est en général pas une « fonction propre » de cette équation pour le domaine intérieur à la sphère de rayon R. Pour qu'elle le soit, il faudrait qu'elle fût nulle à la surface de cette sphère. Or, ceci ne peut avoir lieu que pour certaines valeurs de la constante E, les valeurs propres de (207) et dans notre problème actuel, E est l'énergie cinétique des corpuscules incidents, énergie cinétique qui est une donnée du problème et ne coïncide pas en général avec une des valeurs propres de (207).

Comme $f_n(r)$ n'est déterminée qu'à un facteur constant près, nous pouvons poser :

$$(212) \quad \psi_{II} = \sum_n^{\infty} (-i)^n \sqrt{\frac{\pi}{2}} (2n+1) c_n' f_n(r) P_n(\cos \theta).$$

tandis que l'onde à l'extérieur de la sphère sera, comme au chapitre précédent, représentée par :

$$(213) \quad \psi_I = \sum_n^{\infty} (-i)^n \sqrt{\frac{\pi}{2}} (2n+1) \frac{1}{\sqrt{kr}} \left[J_{n+\frac{1}{2}}(kr) + c_n H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(kr) \right] P_n(\cos \theta).$$

En écrivant les équations qui expriment la continuité de l'onde et de

sa dérivée radiale sur la sphère de rayon R et en égalant séparément les coefficients de chaque P_n dans ces équations, on trouve :

$$(214) \quad \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{kR}} \left[J_{n+\frac{1}{2}}(kR) + c_n H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(kR) \right] = c_n' f_n(R) \\ \frac{1}{\sqrt{kR}} \left[J'_{n+\frac{1}{2}}(kR) + c_n H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)'}(kR) \right] \\ - \frac{1}{2R\sqrt{kR}} \left[J_{n+\frac{1}{2}}(kR) + c_n H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(kR) \right] = c_n' f_n'(R), \end{cases} .$$

où les accents désignent les dérivées par rapport à r . En éliminant c_n' , on trouve ensuite :

$$(215) \quad c_n = \frac{J'_{n+\frac{1}{2}}(kR)f_n(R) - J_{n+\frac{1}{2}}(kR)f_n'(R) - \frac{1}{2R}J_{n+\frac{1}{2}}(kR)f_n(R)}{H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(kR)f_n'(R) - f_n(R)H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)'}(kR) + \frac{1}{2R}H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(kR)f_n(R)}.$$

Pour $n = 0$, on peut expliciter la valeur de c_0 en se servant des formules (171) et (172). L'on obtient ainsi :

$$(216) \quad c_0 = \frac{kR \cos kR f_0(R) - \sin kR \cdot f_0(R) - R \sin kR \cdot f_0'(R)}{iR f_0'(R) - kR f_0(R) + i f_0(R)} e^{ikR},$$

d'où :

$$(217) \quad |c_0|^2 = \frac{[f_0(R)(kR \cos kR - \sin kR) - R \sin kR f_0'(R)]^2}{f_0^2(R)[1 + k^2 R^2] + R^2 f_0'^2(R) + 2R f_0(R) f_0'(R)}.$$

Cette formule donne l'intensité de la diffusion d'ordre zéro (réflexion).

On reconnaît aisément que $c_1, c_2, \dots$ sont négligeables devant c_0 si l'on a $\lambda \gg R$ ou $kR \ll 1$. On a alors la formule approximative :

$$(218) \quad |c_0|^2 = \frac{[kR^2 f_0'(R)]^2}{f_0^2(R) + R^2 f_0'^2(R) + 2R f_0(R) f_0'(R)}$$

L'on voit ainsi que (pour $\lambda \gg R$) la réflexion est nulle, si $f_0'(R)$ est nulle, c'est-à-dire si la surface de la sphère correspond à un maximum ou à un minimum de l'onde ψ_n . Nous retrouvons comme cas particulier le résultat obtenu précédemment pour la sphère de potentiel constant.

Les sections efficaces de la sphère diffusante. — Finalement l'onde diffusée est donnée par :

$$(219) \quad \psi_d = \sum_0^{\infty} n (-i)^n \sqrt{\frac{\pi}{2}} (2n + 1) \frac{c_n}{\sqrt{kr}} H_{n + \frac{1}{2}}^{(2)}(kr) P_n(\cos \theta),$$

avec les valeurs (215) des c_n .

Si l'on veut calculer le flux diffusé à travers une sphère de rayon ρ très grand, on a à calculer l'intégrale

$$\int_0^{\pi} |\psi_d|_{r=\rho}^2 2\pi \rho^2 \sin \theta d\theta$$

et à multiplier cette expression par la vitesse $v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$.

En formant $|\psi_d|_{r=\rho}^2$ à l'aide de (219), on trouve des carrés de polynômes P_n et des produits $P_n P_m$. Lorsqu'on intègre en θ , les produits disparaissent à cause de l'orthogonalité des polynômes de LEGENDRE et l'on obtient en tenant compte de l'expression asymptotique (170) de $H_{2n+1}^{(2)}$:

$$(220) \quad \int_0^{\pi} |\psi_d|_{r=\rho}^2 2\pi \rho^2 \sin \theta d\theta = \sum_0^{\infty} Q_n$$

avec :

$$(221) \quad \begin{cases} Q_n = \int_0^{\pi} |c_n|^2 (2n + 1)^2 \frac{1}{(k\rho)^2} P_n^2(\cos \theta) 2\pi \rho^2 \sin \theta d\theta \\ = \frac{4\pi}{k^2} (2n + 1) |c_n|^2 \end{cases}$$

car

$$\int_0^{\pi} P_n^2(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \int_{-1}^{+1} P_n^2(u) du = \frac{2}{2n + 1}.$$

Le nombre des corpuscules diffusés liés à l'onde diffusée d'ordre n est donc égal à vQ_n par seconde ; il est donc égal au nombre de corpuscules incidents qui sont reçus par seconde par une surface d'aire Q_n normale à la direction d'incidence. Nous dirons donc que Q_n est la section efficace de la sphère diffusante pour la diffusion d'ordre n . Il est commode de poser :

$$(222) \quad q_n = \frac{Q_n}{4\pi R^2} = \frac{2n + 1}{k^2 R^2} |c_n|^2.$$

Comme il est facile de voir sur (215), le développement de c_n suivant les puissances croissantes de kR commence par un terme en $(kR)^{2n+1}$, celui de $|c_n|^2$ commence par un terme en $(kR)^{4n+2}$ et, par suite, celui de q_n par $(kR)^{4n}$. On a par exemple :

$$(223) \quad q_0 = a_0 + a_1(kR)^2 + \dots; \quad q_1 = b_1(kR)^4 + \dots; \quad q_2 = c_2(kR)^8 + \dots$$

On voit bien ainsi que, pour kR très petit, les diffusions d'ordres supérieurs sont négligeables et les développements de q_0, q_1 etc. sont d'autant plus rapidement convergents que kR est plus petit, c'est-à-dire que la longueur d'onde incidente λ est plus grande. La diffusion du premier ordre définie par q_1 varie, pour R donné, comme $\frac{1}{\lambda^4}$, ce qui rappelle la loi bien connue de RAYLEIGH.

Application à la théorie de l'effet Ramsauer. — Les considérations qui précèdent ont été employées par divers auteurs, notamment MM. FAXÉN ET HOLTSMARK, ALLIS ET MORSE, etc., pour la prévision de la diffusion d'un faisceau monocinétique d'électrons par un atome. Ce phénomène présente une particularité qui a été mise en évidence par les travaux de M. RAMSAUER et d'autres expérimentateurs et que l'on nomme « l'effet Ramsauer ». Si l'on étudie la diffusion d'un faisceau d'électrons par un gaz en fonction de l'énergie des électrons incidents, on trouve que pour des énergies décroissantes, la diffusion augmente d'abord quel que soit le corps diffusant, mais que pour certains corps, en particulier pour les gaz rares Ne, Ar, X, Kr, cette croissance s'arrête pour une certaine valeur de l'énergie incidente, puis fait place à une décroissance, de telle sorte qu'il existe un minimum presque nul de la diffusion pour une valeur de l'énergie incidente correspondante à un potentiel accélérateur un peu inférieur à 1 volt. Voici l'allure de la courbe diffusion-énergie : (voir fig. 19).

Il y a donc une transparence imprévue des atomes des gaz rares pour les électrons de faible vitesse. Je dis imprévue parce que, avec les conceptions classiques, l'atome étant équivalent à un champ de force qui dévie le mouvement de l'électron, la déviation devrait être d'autant plus grande que l'énergie et l'impulsion de l'électron sont plus faibles.

La théorie ondulatoire que nous venons d'exposer permet de concevoir l'origine de cet effet Ramsauer. L'atome d'un gaz rare est en effet

formé d'un noyau central positif entouré d'électrons formant des « couches complètes » au sens de la théorie de BOHR et la Mécanique ondulatoire qui considère seulement la répartition moyenne des corpuscules, assimile cet ensemble d'électrons à une atmosphère d'électricité négative ayant une répartition isotrope autour du noyau. Assimilons donc l'atome du gaz à une sphère de rayon R (R étant de l'ordre de l'Ångström) ayant un noyau positif en son centre, le reste de la sphère étant occupé par une distribution isotrope d'électricité négative. Le potentiel U dans la sphère sera une fonction de la distance r au centre seulement ; la fonction $U(r)$ croîtra comme $\frac{1}{r}$ en s'appro-

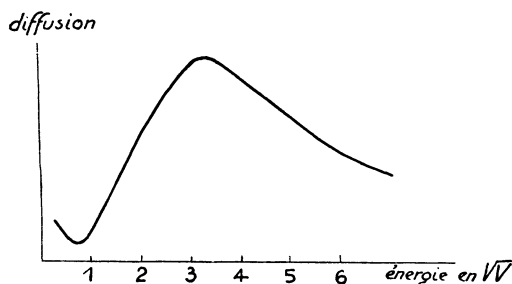


Fig. 19.

chant tout près de l'origine et décroîtra plus rapidement que $\frac{1}{r}$ en s'éloignant vers la périphérie de la sphère, pour s'annuler quand $r = R$.

Supposons que sur cette sphère, représentation schématique d'un atome de gaz rare, tombe un faisceau d'électrons ayant tous une même énergie de l'ordre du volt. La longueur d'onde de l'onde associée sera de l'ordre de 10Å , soit 10 fois plus grande que R . Bien que $\hbar R$ ne soit pas très petit, c'est la diffusion d'ordre zéro qui sera la plus importante. Si l'onde ψ_{II} intérieure à la sphère (c'est-à-dire la seule solution de l'équation des ondes dans cette région qui reste finie pour $r = 0$) se trouve présenter un maximum d'amplitude pour $r = R$, la diffusion d'ordre zéro sera nulle et par suite l'ensemble de la diffusion sera faible. On conçoit donc que pour certaines valeurs de l'énergie incidente, l'intensité de la diffusion soit anormalement faible et ceci fournit une interprétation qualitative de l'effet Ramsauer.

PASSAGE DES CORPUSCULES ÉLECTRISÉS

MM. FAXÉN et HOLTSMARK ⁽¹⁾ ont précisé cette théorie en faisant des hypothèses simples sur la forme de la fonction $U(r)$. HOLTSMARK ⁽²⁾ a fait ensuite des calculs plus complets en déterminant $U(r)$ par la méthode du « self consistent field » de HARTREE. Il a ainsi trouvé pour l'Argon un minimum accentué de la diffusion ; l'allure de la courbe diffusion-énergie est bien ainsi retrouvée, mais le minimum prévu théoriquement correspond à une valeur de l'énergie plus petite que la valeur expérimentale.

Les calculs les plus complets faits sur ce sujet paraissent être ceux de MM. ALLIS et MORSE ⁽³⁾. Ils ont adopté un modèle schématique d'atome diffuseur en considérant l'atome de numéro atomique Z comme formé d'un noyau de charge $+Ze$ entouré de Z électrons dont

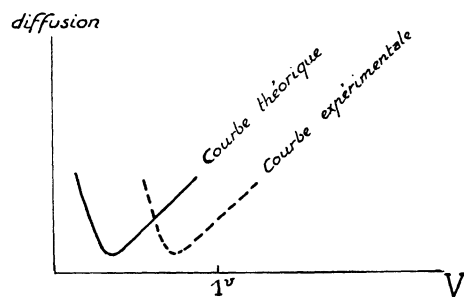


Fig. 20.

on suppose par raison de simplicité la charge totale $-Ze$ répartie sur une sphère de rayon R . Le potentiel est alors représenté par la fonction :

$$(224) \quad U(r) = Ze \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right)$$

à l'intérieur de la couche sphérique de rayon R et est nul à l'extérieur.

Il est alors assez aisé de calculer la forme de l'onde ψ_n dans la sphère et de déterminer les coefficients q_0, q_1 , etc. Si on se donne Z et R , on peut alors construire la courbe diffusion-énergie. ALLIS et MORSE n'ont pas choisi pour chaque atome la constante Z égale au nombre atomique comme il eût paru naturel de le faire : ils ont cherché à déter-

(1) *Zeitsch. f. Phys.*, 45 (1927), p. 307.

(2) *Zeitsch. f. Phys.*, 48 (1928), p. 231.

(3) *Zeitsch. f. Phys.*, 70 (1931), p. 567.

miner Z de façon à compenser l'erreur que l'on commet en supposant tous les électrons disposés sur une seule couche. Ils ont aussi choisi R par tâtonnements en cherchant à obtenir la meilleure courbe. De cette manière, ils ont pu construire des courbes diffusion-énergie qui représentent convenablement les faits expérimentaux pour un certain nombre de corps et montrent l'existence de l'effet Ramsauer pour le Néon et l'Argon. De plus, les calculs d'ALLIS et MORSE expliquent pourquoi la courbe diffusion-énergie est analogue pour tous les éléments d'une même famille chimique et donnent exactement la répartition des électrons diffusés, du moins entre 15 et 40 volts.

Le point faible de cette théorie de l'effet Ramsauer, c'est la nécessité de faire des hypothèses simplificatrices sur la forme de la fonction $V(r)$ afin de pouvoir effectuer les calculs. Malgré le caractère assez arbitraire de ces hypothèses et l'incertitude qui en résultent dans les conclusions, il semble bien établi que l'effet Ramsauer est une transposition dans le domaine atomique et pour les ondes électroniques de phénomènes de réflexion sélective d'un genre bien connu en optique.

Remarque sur la diffusion des particules α . — Les méthodes que nous avons exposées permettent d'étudier rigoureusement dans la nouvelle Mécanique certains problèmes importants tel que la diffusion d'une particule électrisée (particule α par exemple) par un centre de force.

On démontre aisément à l'aide de la Mécanique classique que si un faisceau de particules électrisées de même énergie passent au voisinage d'un centre électrisé (qui les attire ou les repousse suivant la loi de Coulomb), le nombre des particules qui subissent une déviation comprise entre θ_1 et θ_2 est proportionnel à $\cot^2 \frac{\theta_1}{2} - \cot^2 \frac{\theta_2}{2}$. C'est la loi de RUTHERFORD qui paraît bien vérifiée par l'expérience dans de larges limites.

M. G. WENTZEL a montré par un calcul approximatif que la nouvelle Mécanique conduit aussi à la loi de RUTHERFORD. Mais M. GORDON est parvenu au même résultat en employant une méthode tout à fait rigoureuse, qui n'est que le cas limite, pour R tendant vers l'infini, de celle que nous avons exposé dans le présent chapitre. Nous nous bornerons ici à renvoyer au mémoire de M. GORDON ⁽¹⁾.

(1) *Zeits. f. Phys.*, 48 (1928), p. 180.

IX

Evasion des corpuscules contenus dans une cuvette de potentiel

Cuvette linéaire de potentiel. — Nous allons commencer l'examen d'un problème qui est intimement relié à la nouvelle théorie de l'émission des rayons α par les corps radioactifs.

Nous contentant d'abord du problème à une dimension, nous considérons une cuvette de potentiel à bords rectangulaires telle que celle-ci :

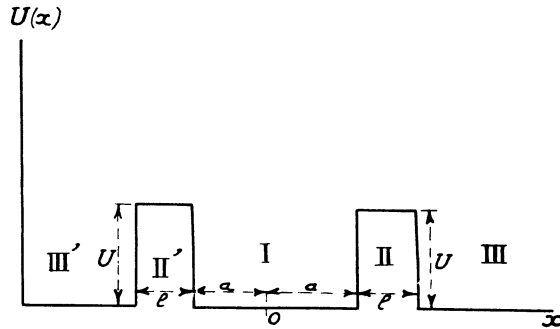


Fig. 21.

Cette cuvette est donc limitée par 2 murs de potentiels parallèles de hauteur U et d'épaisseur l . Supposons que nous sachions qu'à un certain instant origine, un corpuscule se trouve dans l'intérieur de cette cuvette. Si l'énergie cinétique E de ce corpuscule était supérieure au bord rectangulaire de la cuvette ($E > U$), le corpuscule n'aurait au point de vue classique aucune difficulté à s'en échapper. Mais si E est inférieur à U , alors avec la Mécanique classique, nous devons dire que le corpuscule ne peut absolument pas s'échapper de la cuvette : il se déplacera dans la région I en allant alternativement se heurter à chacun des murs qui limitent sa prison. Mais nous savons qu'avec la Mécanique ondulatoire les choses vont être très différentes : si petit que soit le rapport $\frac{E}{U}$, il y aura toujours une certaine probabilité pour que le corpuscule traverse la barrière et s'évade.

Avec l'image ondulatoire, ceci s'exprimera en disant que l'onde ψ du corpuscule filtre peu à peu à travers les deux barrières de potentiel, très peu il est vrai si le rapport $\frac{E}{U}$ est petit, mais toujours. L'onde ψ sera donc amortie en fonction du temps, cet amortissement correspondant à la fuite progressive de la probabilité de présence à travers les parois de la cuvette. Si l'on préfère substituer le langage statistique au langage probabiliste, on considérera un ensemble de corpuscules identiques enfermés dans la cuvette : on devra alors admettre en Mécanique ondulatoire qu'une fraction de l'ensemble de corpuscules s'évade par unité de temps et l'amortissement de l'onde ψ traduit l'appauvrissement en corpuscules du contenu de la cuvette.

Pour étudier analytiquement ce problème, nous supposons que $\frac{E}{U}$ est très petit et que tout le phénomène est symétrique par rapport au centre de la cuvette, $x = 0$. Nous remarquerons que l'onde ψ_1 dans la cuvette, étant amortie, ne doit pas être solution de l'équation $\Delta\psi + \frac{8\pi^2m}{h^2}E\psi = 0$ qui ne convient que pour les ondes monochromatiques non amorties, mais bien de l'équation générale :

$$(225) \quad \Delta\psi = \frac{4\pi im}{h} \frac{\partial\psi}{\partial t}.$$

Posons donc :

$$(226) \quad \psi_1 = a_1(x) e^{\frac{2\pi i}{h}Et} e^{-\frac{\lambda}{2}t},$$

en désignant par $\frac{\lambda}{2}$ la constante d'amortissement. En substituant dans (225), nous trouvons l'équation :

$$(227) \quad \frac{d^2a_1}{dx^2} + k^2a_1 + \frac{4\pi im}{h} \cdot \frac{\lambda}{2}a_1 = 0$$

avec, comme de coutume :

$$(228) \quad k = \frac{2\pi}{h} \sqrt{2mE}.$$

Si nous essayons la solution $a_1 = e^{ixx}$, nous trouvons :

$$(229) \quad x^2 = k^2 + \frac{2\pi im}{h} \lambda.$$

PASSAGE DES CORPUSCULES ÉLECTRISÉS

Comme $\frac{E}{U}$ est très petit par hypothèse, λ doit aussi être très petit et nous avons approximativement :

$$(230) \quad z = \pm [k + \frac{\pi i m}{\hbar k} \lambda] = \pm (k + i\mu)$$

avec encore la définition :

$$(231) \quad \mu = \frac{\pi m}{\hbar k} \lambda = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{2E}} \lambda.$$

On trouve donc la solution générale

$$(232) \quad a_1(x) = A_1 e^{ikx} e^{-\mu x} + A_2 e^{-ikx} e^{+\mu x}.$$

Mais, comme le phénomène doit être symétrique par rapport à $x = 0$, nous devons prendre $A_1 = A_2$ et finalement nous avons :

$$(233) \quad \psi_I = A(e^{ikx} e^{-\mu x} + e^{-ikx} e^{+\mu x}) e^{\frac{2\pi i}{\hbar} E t} e^{-\frac{\lambda}{2} t}.$$

Il est alors évident que $|\psi_I|^2$ sera égal à une fonction de x multipliée par le facteur $e^{-\lambda t}$ et par suite, en employant le langage statistique, nous en concluons que le nombre des corpuscules contenus dans la cuvette, nombre proportionnel à $\int_{-a}^{+a} |\psi_I|^2 dx$ décroît avec le temps comme $e^{-\lambda t}$.

La constante A peut être considérée comme donnée, car elle est déterminée par la connaissance de la probabilité de présence dans la cuvette à un instant donné. Nous pouvons, sans nuire à la généralité, poser $A = 1$ et écrire :

$$(234) \quad \psi_I = [e^{-ixx} + e^{ixx}] e^{\left(\frac{2\pi i}{\hbar} E - \frac{\lambda}{2}\right)t}$$

en prenant le signe $+$ dans la définition (230).

Dans la région II, nous devons poser :

$$(235) \quad \psi_{II} = a_{II}(x) e^{\left(\frac{2\pi i}{\hbar} E - \frac{\lambda}{2}\right)t}$$

car les facteurs en t doivent être les mêmes dans ψ_I et ψ_{II} pour que les conditions de passage puissent être vérifiées en permanence. L'onde ψ_{II} doit vérifier l'équation :

$$(236) \quad \frac{d^2 a_{II}}{dx^2} - \frac{8\pi^2 m}{\hbar^2} U \psi_{II} = \frac{4\pi i m}{\hbar} \frac{\partial \psi_{II}}{\partial t}.$$

Posons alors :

$$(237) \quad k' = \frac{2\pi}{h} \sqrt{2m(U - E)} \quad k' \gg k.$$

On trouve en substituant (235) dans (236) :

$$(238) \quad \frac{d^2 a_{II}}{dx^2} = \kappa'^2 a_{II}$$

ou :

$$(239) \quad \kappa'^2 = k'^2 - \frac{2\pi i m}{h} \lambda.$$

La petitesse de λ nous permet d'écrire approximativement :

$$(240) \quad \kappa' = \pm [k' - \frac{i\pi m}{h k'} \lambda] = \pm (k' - i\mu'),$$

avec :

$$(241) \quad \mu' = \frac{m\pi}{h k'} \lambda = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{2(U - E)}} \lambda,$$

μ' étant très petit comme λ . Si alors nous adoptons le signe + dans la définition (240), nous avons :

$$(242) \quad \psi_{II} = [B_1 e^{-\kappa' x} + B_2 e^{+\kappa' x}] e^{\left(\frac{2\pi i}{h} E - \frac{\lambda}{2}\right)t}.$$

Pour qu'il y ait symétrie, on devra poser dans la région II' :

$$(243) \quad \psi_{II'} = [B_2 e^{-\kappa' x} + B_1 e^{+\kappa' x}] e^{\left(\frac{2\pi i}{h} E - \frac{\lambda}{2}\right)t}.$$

Enfin, en III, hors de la cuvette, on a l'onde divergente :

$$(244) \quad \psi_{III} = C e^{-i\kappa x} e^{\left(\frac{2\pi i}{h} E - \frac{\lambda}{2}\right)t}$$

et par symétrie en III' :

$$(245) \quad \psi_{III'} = C e^{+i\kappa x} e^{\left(\frac{2\pi i}{h} E - \frac{\lambda}{2}\right)t}.$$

La forme des diverses ondes ψ étant trouvée, il nous faut écrire les conditions de continuité en $x = a$ et $x = l + a$. Les conditions de continuité en $x = -a$ et $x = -(l + a)$ seront alors automatiquement réalisées, par symétrie.

En $x = a$, les conditions sont :

$$(246) \quad \begin{cases} e^{-ixa} + e^{ixa} = B_1 e^{-x'a} + B_2 e^{x'a} ; \\ ix(e^{ixa} - e^{-ixa}) = x'[B_2 e^{x'a} - B_1 e^{-x'a}], \end{cases}$$

d'où l'on tire tout de suite :

$$(247) \quad \begin{cases} B_1 = \frac{e^{x'a}}{2} \left[e^{ixa} \left(1 - i \frac{x}{x'} \right) + e^{-ixa} \left(1 + i \frac{x}{x'} \right) \right] \\ B_2 = \frac{e^{-x'a}}{2} \left[e^{ixa} \left(1 + i \frac{x}{x'} \right) + e^{-ixa} \left(1 - i \frac{x}{x'} \right) \right]. \end{cases}$$

En $x = l + a$, les conditions de continuité sont :

$$(248) \quad \begin{cases} B_1 e^{-x'(a+l)} + B_2 e^{x'(a+l)} = C e^{-ix(a+l)} ; \\ x'[B_2 e^{x'(a+l)} - B_1 e^{-x'(a+l)}] = -ix C e^{-ix(a+l)}, \end{cases}$$

d'où l'on tire :

$$(249) \quad \begin{cases} B_1 = \frac{e^{x'(a+l)}}{2} C e^{-ix(a+l)} \left(1 + \frac{ix}{x'} \right) \\ B_2 = \frac{e^{-x'(a+l)}}{2} C e^{-ix(a+l)} \left(1 - \frac{ix}{x'} \right). \end{cases}$$

En égalant les deux valeurs trouvées pour B_1 et B_2 , on a :

$$(250) \quad \begin{cases} e^{ixa} \left(1 - \frac{ix}{x'} \right) + e^{-ixa} \left(1 + \frac{ix}{x'} \right) = e^{x'l} C e^{-ix(a+l)} \left(1 + \frac{ix}{x'} \right) \\ e^{ixa} \left(1 + \frac{ix}{x'} \right) + e^{-ixa} \left(1 - \frac{ix}{x'} \right) = e^{-x'l} C e^{-ix(a+l)} \left(1 - \frac{ix}{x'} \right). \end{cases}$$

D'où, par élimination de C :

$$(251) \quad \begin{cases} e^{ixa} \left(1 + \frac{ix}{x'} \right)^2 + e^{-ixa} \left(1 + \frac{x^2}{x'^2} \right) \\ = e^{-2x'l} \left[e^{ixa} \left(1 - \frac{ix}{x'} \right)^2 + e^{-ixa} \left(1 + \frac{x^2}{x'^2} \right) \right]. \end{cases}$$

Comme x et x' s'expriment à l'aide de E et de λ , nous avons une relation complexe, c'est-à-dire deux relations réelles, entre les constantes réelles E et λ pour une cuvette de potentiel donnée. Ces constantes sont donc déterminées et E , en particulier, ne peut être arbitraire. Ce résultat est essentiellement différent de ceux que nous avons

rencontrés dans les problèmes antérieurs et il importe de se rendre compte d'où vient la différence.

Si nous avions supposé la paroi de la cuvette de potentiel imperméable aux ondes ψ (ce qui revient à faire U infini), nous aurions eu une onde limitée à l'intérieur de la cuvette et nulle sur les parois, donc un problème d'ondes stationnaires.

En désignant ici par Λ la longueur d'onde $\frac{2\pi}{k}$ dans la cuvette (pour éviter toute confusion avec la constante d'amortissement), les longueurs d'onde des ondes stationnaires symétriques par rapport à l'origine aurait alors été données par :

$$(252) \quad 2a = (2n + 1)\frac{\Lambda}{2} \quad \text{ou} \quad k = (2n + 1)\frac{\pi}{2a}.$$

Mais dans notre problème actuel, les parois ne sont pas complètement imperméables aux ondes ψ . Comme cependant elles sont *presque* imperméables ($U \gg E$), nous devons nous attendre à trouver pour k des valeurs discrètes voisines des valeurs (252) qui correspondent à l'imperméabilité totale. On s'explique donc pourquoi, au lieu de pouvoir se donner arbitrairement k (ou E) comme dans les problèmes précédents, nous devons ici *calculer* les valeurs possibles de k (ou de E). Quant à la constante d'amortissement λ , il est tout naturel que l'on puisse la calculer à partir de la forme de la cuvette, puisque cette forme fixe la perméabilité des parois pour l'onde ψ , c'est-à-dire la probabilité d'évasion d'un corpuscule.

En somme, on peut dire que la cuvette est un système capable d'états *presque* stationnaires comportant une faible probabilité d'évasion pour le corpuscule.

Revenons au calcul de E et de λ à l'aide de la formule (251).

Dans la résolution de cette équation complexe, on a à tenir compte de l'ordre de grandeur admis pour les différents coefficients qui y figurent. Cette discussion des ordres de grandeur est assez délicate ; le résultat en est le suivant : l'équation (251) est approximativement vérifiée si l'on a :

$$(253) \quad \cotg ka = \frac{k}{k'}; \quad \mu a = 4 \frac{k^2}{k'^2} e^{-2k'l}.$$

Comme $\frac{k}{k'}$ est très petit (de l'ordre de $\sqrt{\frac{E}{U}}$), on voit que ka est un

peu plus petit que $(2n + 1)\frac{\pi}{2}$. On a donc approximativement (par excès) :

$$(254) \quad k \simeq (2n + 1)\frac{\pi}{2a}.$$

C'est bien le résultat que nous attendions. D'après l'expression de k , on en tire :

$$(255) \quad E \simeq (2n + 1)^2 \frac{h^2}{32ma^2}.$$

Pour que le problème soit possible dans les conditions que nous avons admises ($U \gg E$), il faut avoir $\frac{h^2}{32ma^2} \ll U$ et même alors on ne peut pas dans (255) prendre des valeurs trop élevées de n .

La deuxième formule (253) nous donne en remplaçant k et k' par leurs valeurs :

$$(256) \quad \mu = \frac{4}{a} \cdot \frac{E}{U - E} e^{-\frac{4\pi}{h}\sqrt{2m(U-E)}l}$$

ou d'après (231) :

$$(257) \quad \lambda = \frac{4kh}{\pi ma} \frac{E}{U - E} e^{-\frac{4\pi}{h}\sqrt{2m(U-E)}l} = \frac{v}{2a} \frac{16E}{U - E} e^{-\frac{4\pi}{h}\sqrt{2m(U-E)}l}$$

puisque h est égal à $\frac{2\pi}{h}mv$, v étant la vitesse du corpuscule dans la cuvette.

Or, $\tau = \frac{2a}{v}$ est, dans la conception classique, le temps mis par le corpuscule prisonnier pour parcourir la longueur de la cuvette. D'autre part, le coefficient de transmission T des corpuscules d'énergie E à travers une barrière de potentiel de hauteur U et de largeur l , est donné par la formule (74) et, comme ici $U \gg E$, nous pouvons confondre $\frac{E(U - E)}{U^2}$ et $\frac{E}{U - E}$. Nous pouvons donc écrire à la place de (257) :

$$(258) \quad \lambda = \frac{T}{\tau},$$

τ étant le temps mis par le corpuscule pour parcourir la cuvette et T étant la transparence d'une des parois de cette cuvette. La formule (258) est un cas particulier d'un théorème de M. VON LAUE sur lequel nous reviendrons.

Remarques sur la précédente théorie. — Esquissée par M. GAMOW, la théorie précédente a été développée dans ses grandes lignes par M. KUDAR (1). Elle comporte une conséquence dont nous devons nous occuper. D'après la formule (244), l'onde ψ_{in} à l'extérieur de la cuvette est proportionnelle à $e^{-ixx} = e^{-ikx} e^{ixx}$; elle est donc infinie à l'infini. Il est facile de voir d'où provient cette circonstance étrange. Si à un instant initial t_0 , on savait que le corpuscule est sûrement dans la cuvette, l'onde ψ_{in} serait nulle ; à partir de cet instant, une onde ψ_{in} serait émise par la cuvette vers l'extérieur représentant la probabilité d'évasion du corpuscule après l'instant t_0 . L'onde ψ_{in} aurait donc forcément un « front d'onde » et elle ne serait pas infinie à l'infini. Mais nous avons traité le problème en admettant la validité rigoureuse pour toutes les valeurs de t de la variation de l'onde ψ_{in}

comme $e^{-\frac{\lambda}{2}t}$. Ce faisant, nous avons implicitement admis qu'à des époques très anciennes ($t \rightarrow -\infty$), le module de l'onde ψ_{in} était infiniment grand, ce qui est d'ailleurs physiquement inadmissible. Si à des époques très anciennes, $|\psi|$ était infiniment grand, l'onde transmise alors à travers les parois de la cuvette devait aussi être infiniment grande et comme à l'époque actuelle on retrouve à une très grande distance de la cuvette ces portions d'ondes émises à une époque très ancienne et qui se sont depuis propagées pendant un temps très long, on s'explique pourquoi, dans notre traitement, ψ_{in} se trouve infinie à l'infini. Le calcul qui a été fait n'est donc qu'approximatif et n'est valable ni pour les époques très anciennes, ni pour les distances très grandes : physiquement, l'onde ψ_{in} doit avoir un front.

Faisons encore une autre remarque. Si l'on écrit l'équation des ondes dans la cuvette sous la forme :

$$(259) \quad H(\psi) = C\psi$$

H étant l'opérateur Hamiltonien, la méthode que nous venons d'exposer consiste à chercher des valeurs *complexes* possibles pour la constante C , valeurs de la forme $E - \frac{\hbar}{4\pi i} \lambda$. On considère donc des valeurs propres imaginaires pour l'opérateur Hamiltonien et la nécessité de considérer ces valeurs propres imaginaires provient du fait que l'onde

(1) *Zeits. f. Phys.*, 53 (1929), p. 95.

ψ_1 n'est pas tout à fait nulle sur les parois de la cuvette. On a donc ici des circonstances assez différentes de celles qu'on rencontre habituellement dans les problèmes de quantification de la nouvelle Mécanique et les principes généraux de la nouvelle Mécanique paraissent s'appliquer assez mal à un cas comme celui-ci.

Certains auteurs, M. VON LAUE par exemple, y voient une objection à la théorie qui précède et ont été amenés à proposer d'autres méthodes pour traiter le problème. Nous ne pensons pas cependant que la considération des ondes amorties soit interdite par la Mécanique ondulatoire et les calculs que nous avons exposés ne nous paraissent pas en principe incorrects. D'ailleurs, nous verrons que les méthodes qu'on a proposées pour les éviter ont aussi leurs points faibles.

Une conséquence très importante de la formule (258), c'est qu'elle établit une relation, pour une forme donnée de la cuvette, entre la constante d'évasion λ et la vitesse v (ou l'énergie E) du corpuscule prisonnier. La constante λ est égale à l'inverse de la durée moyenne $\overline{D}$ d'emprisonnement du corpuscule car on a :

$$(260) \quad \overline{D} = \frac{\int_0^{+\infty} t e^{-\lambda t} dt}{\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt} = \frac{1}{\lambda}$$

Donc il existe une relation entre la durée moyenne d'emprisonnement du corpuscule (ou vie moyenne du corpuscule dans la cuvette) et son énergie. Nous verrons l'importance de cette relation dans la théorie de l'émission des rayons α par les corps radioactifs (théorie de Gamow).

Même problème pour une cuvette sphérique. — Nous avons traité le problème de l'évasion hors d'une cuvette linéaire. Nous allons reprendre le même problème pour une cuvette sphérique. Dans la cuvette sphérique, le potentiel est nul à l'intérieur d'une sphère de rayon a , possède une valeur U constante dans une couche sphérique limitée par les sphères de rayon a et $a + l$ et est de nouveau nul à l'extérieur de la seconde sphère. La variation du potentiel le long d'une diamètre est donc représentée par la figure 21.

Nous nous bornerons aux solutions à symétrie sphérique. L'équation des ondes à l'intérieur de la sphère de rayon a sera donc :

$$(261) \quad \frac{\partial^2 \psi_I}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi_I}{\partial r} = \frac{4\pi i m}{h} \frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

Nous emploierons toujours la méthode qui utilise les ondes amorties ; cette méthode appelle ici les mêmes remarques et soulève les mêmes difficultés que dans le cas linéaire. Nous chercherons donc une fonction ψ_I de la forme : $a(r)e^{\left(\frac{2\pi i}{h}E - \frac{\lambda}{2}\right)t}$, ce qui nous conduit à la solution :

$$(262) \quad \psi_I(r, t) = \frac{e^{\pm i\kappa r}}{r} e^{\left(\frac{2\pi i}{h}E - \frac{\lambda}{2}\right)t}$$

avec :

$$(263) \quad k = \frac{2\pi}{h} \sqrt{2mE}; \quad \mu = \frac{\pi m}{h k} \lambda; \quad \kappa = k + i\mu.$$

Comme ψ_I doit être finie pour $r = 0$, nous devons poser :

$$(264) \quad \psi_I(r, t) = \frac{e^{i\kappa r} - e^{-i\kappa r}}{r} e^{\left(\frac{2\pi i}{h}E - \frac{\lambda}{2}\right)t}$$

Dans la couche sphérique où règne le potentiel $U(a \leq r \leq a + l)$, on aura :

$$(265) \quad \psi_{II}(r, t) = B_1 \frac{e^{-\kappa' r}}{r} + B_2 \frac{e^{\kappa' r}}{r},$$

avec :

$$(266) \quad k' = \frac{2\pi}{h} \sqrt{2m(U - E)}; \quad \mu' = \frac{\pi m}{h k'} \lambda; \quad \kappa' = k' - i\mu'.$$

Enfin en dehors de la sphère de rayon $a + l$, on a l'onde sphérique divergente :

$$(267) \quad \psi_{III}(r, t) = C e^{-i\kappa r}.$$

Nous avons maintenant à écrire les conditions de continuité. En $r = a$, nous avons ⁽¹⁾ :

$$(268) \quad e^{i\kappa a} - e^{-i\kappa a} = B_1 e^{-\kappa' a} + B_2 e^{\kappa' a}; \quad i\kappa(e^{i\kappa a} + e^{-i\kappa a}) = \kappa'(B_2 e^{\kappa' a} - B_1 e^{-\kappa' a}),$$

(1) Les termes provenant dans la seconde équation de la dérivation de $\frac{1}{r}$ s'annulent en vertu de la première équation.

PASSAGE DES CORPUSCULES ÉLECTRISÉS

d'où l'on tire :

$$(269) \quad \begin{cases} B_1 = \frac{e^{x'a}}{2} \left[e^{ixa} \left(1 - i \frac{x}{x'} \right) - e^{-ixa} \left(1 + i \frac{x}{x'} \right) \right] \\ B_2 = \frac{e^{-x'a}}{2} \left[e^{ixa} \left(1 + i \frac{x}{x'} \right) - e^{-ixa} \left(1 - i \frac{x}{x'} \right) \right]. \end{cases}$$

En $r = a + l$, on trouve ⁽¹⁾ :

$$(270) \quad B_1 e^{-x'(a+l)} + B_2 e^{x'(a+l)} = C e^{-ix(a+l)};$$

$$x' [B_2 e^{x'(a+l)} - B_1 e^{-x'(a+l)}] = -ix C e^{-ix(a+l)},$$

d'où :

$$(271) \quad \begin{cases} B_1 = \frac{e^{x'(a+l)}}{2} C e^{-ix(a+l)} \left(1 + i \frac{x}{x'} \right) \\ B_2 = \frac{e^{-x'(a+l)}}{2} C e^{-ix(a+l)} \left(1 - i \frac{x}{x'} \right). \end{cases}$$

En éliminant B_1 , B_2 et C entre les 4 équations (271) et (272), on trouve la condition (analogue à (251)) :

$$(272) \quad e^{ixa} \left(1 + i \frac{x}{x'} \right)^2 - e^{-ixa} \left(1 + \frac{x^2}{x'^2} \right) = e^{-2x'l} \left[e^{ixa} \left(1 - i \frac{x}{x'} \right)^2 - e^{-ixa} \left(1 + \frac{x^2}{x'^2} \right) \right],$$

équation complexe qui permet le calcul des deux constantes réelles E et λ .

Nous pourrions prévoir de suite la valeur approximative de k en remarquant que, si la sphère de potentiel était imperméable aux ondes $\left(\frac{U}{E} = \infty \right)$, on aurait dans la sphère de rayon a l'onde stationnaire (finie à l'origine) $\frac{\sin kr}{r}$ qui devrait s'annuler pour $r = a$; ceci nous donnerait ⁽²⁾ :

$$(273) \quad ka = n\pi \quad \Lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2a}{n}.$$

La barrière n'étant pas tout à fait imperméable, mais presque, on doit s'attendre à trouver des valeurs de k voisines de $\frac{n\pi}{a}$.

(1) Même remarque que pour (268).

(2) Dans le cas linéaire, nous avons trouvé $\Lambda = \frac{2a}{n + \frac{1}{2}}$. La différence provient de ce qu'ici il y a un passage des ondes par un foyer (phénomène de Gouy).

LOUIS DE BROGLIE

En résolvant approximativement l'équation (272) comme nous avons résolu précédemment (251), nous trouvons ici :

$$(274) \quad \operatorname{tg} ka = -\frac{k}{k'}; \quad \mu a = 4 \frac{k^2}{k'^2} e^{-2kl}.$$

De la première équation, il résulte que ka doit avoir des valeurs peu inférieures à $n\pi$ (car $\frac{k}{k'}$ est très petit) comme cela était prévu. Quant à la deuxième équation (274), elle nous donne :

$$(275) \quad \mu = \frac{4}{a} \frac{E}{U-E} e^{-\frac{4\pi}{h} \sqrt{2m(U-E)} l}$$

d'où par (263)

$$(276) \quad \lambda = \frac{v}{2a} \cdot \frac{16E}{U-E} e^{-\frac{4\pi}{h} \sqrt{2m(U-E)} l}.$$

Le premier facteur est l'inverse du temps τ mis par le corpuscule prisonnier pour traverser diamétralement la cuvette sphérique. Le second facteur est le coefficient de transparence T de la paroi de la cuvette. On a donc, ici aussi :

$$(277) \quad \lambda = \frac{T}{\tau}.$$

On peut faire dans le cas sphérique les mêmes remarques que dans le cas linéaire.

X

Application à la Radioactivité. Théorie de Gamow

Evasion d'une particule α hors d'un noyau radioactif. — MM. CONDON et GURNEY ⁽¹⁾ d'une part, M. GAMOW ⁽²⁾ d'autre part ont eu presque simultanément l'idée d'interpréter l'émission des particules α par le noyau des corps radioactifs en l'assimilant à l'évasion d'un corpuscule hors d'une cuvette de potentiel.

(1) *Physical Review*, 33 (1929), p. 127.

(2) *Zeit. f. Phys.*, 51 (1928), p. 204.

PASSAGE DES CORPUSCULES ÉLECTRISÉS

Le champ créé par le noyau d'un atome dans son voisinage est un champ de Coulomb qui doit exercer une répulsion sur une particule α . Mais comme les particules positives contenues dans les noyaux atomiques paraissent (abstraction faite de la désintégration radioactive qui est exceptionnelle) y être retenues par des forces d'une nature d'ailleurs inconnue, il semble naturel d'admettre que la fonction V pour une particule α doit avoir à la périphérie du noyau une forme telle que la suivante :

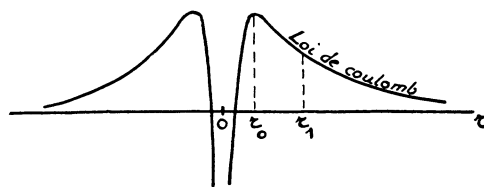


Fig. 22.

La forme de la branche interne est inconnue, mais la branche externe est en $\frac{C}{r}$ et correspond à la loi de Coulomb. Cette forme de courbe de potentiel est d'ailleurs en accord avec les expériences de diffusion des particules α faites par RUTHERFORD et CHADWICK. Ces expériences conduisent en particulier pour l'uranium à attribuer à la distance r_0 du maximum de la courbe au centre du noyau une valeur inférieure à $3,5 \cdot 10^{-12}$ cm car, pour cette dernière distance, la loi de Coulomb paraît toujours valable. Mais ce qui est fort curieux et impossible à expliquer par la Mécanique classique, c'est que les particules α émises par l'uranium ont une énergie cinétique égale à l'énergie potentielle qu'elles doivent avoir dans le champ Coulombien à une distance $r_1 = 6,5 \cdot 10^{-12}$ cm ($> r_0$). En d'autres termes, l'énergie des particules α émises paraît beaucoup plus petite que la valeur de l'énergie correspondant au sommet de la montagne de potentiel. En Mécanique classique, il est impossible de comprendre comment la particule α qui a dû d'abord être prisonnière dans la cuvette interne de potentiel peut arriver à traverser la barrière. Nous savons qu'au contraire, en Mécanique ondulatoire, la chose n'a rien d'impossible.

On est donc amené avec M. GAMOW à considérer la particule α avant son expulsion radioactive comme enfermée dans une cuvette de potentiel. Les calculs faits dans le dernier chapitre sur l'évasion d'un corpus-

cule hors de certaines cuvettes de potentiel (qui, il est vrai, avait une forme schématique plus simple que celle à laquelle il nous faut assimiler le noyau) nous ont montré que le corpuscule avait une certaine probabilité de s'évader par unité de temps et que par suite la probabilité de trouver le corpuscule dans la cuvette diminuait exponentiellement avec le temps. Ceci veut dire que si l'on a un grand nombre N_0 de cuvettes identiques renfermant chacune au début un corpuscule, le nombre des cuvettes encore munies de leur corpuscule au temps t sera :

$$(280) \quad N = N_0 e^{-\lambda t}$$

En transposant ceci, suivant l'idée de M. GAMOW, au cas d'un ensemble de N_0 atomes radioactifs de même espèce, on voit que le nombre de ces N_0 atomes qui ne seront pas désintégrés au bout d'un temps t sera donné par (280). On retrouve donc la loi de désintégration radioactive, λ apparaissant ici comme la constante de désintégration.

Mais le grand succès de la théorie de M. GAMOW, c'est qu'elle rend compte aussi d'une autre grande loi de la Radioactivité : la loi de Geiger-Nuttall.

La loi de Geiger-Nuttall. — Nous avons montré dans les cas simples étudiés ci-dessus que le coefficient d'évasion λ s'exprime en fonction : 1° des paramètres qui déterminent la forme de la cuvette de potentiel ; 2° de l'énergie E du corpuscule. La théorie de Gamow doit donc nous amener à prévoir une relation entre le coefficient de désintégration radioactive λ et l'énergie E des corpuscules α expulsés pendant la désintégration. On sait depuis longtemps qu'une telle relation existe en fait ; elle s'exprime sous une forme approximative par la « loi de Geiger et Nuttall ».

Voici comment on peut énoncer cette loi en adoptant la forme proposée par Swinne (v = vitesse des rayons α émis) :

$$(281) \quad \log_{10} \lambda = a + bv$$

Le coefficient b est sensiblement égal à $42,5 \cdot 10^{-9}$ pour tous les corps radioactifs, v étant exprimée en centimètres par seconde. Le coefficient a varie un peu d'une famille de corps radioactifs à une autre ; il est sensiblement égal à $-79,5$ pour la famille de l'Uranium, à $-80,7$ pour la famille du Thorium et à $-82,7$ pour la famille de l'Actinium.

PASSAGE DES CORPUSCULES ÉLECTRISÉS

Nous pouvons transformer la formule de Swinne, en exprimant la vitesse v en fonction de l'énergie E . Comme, de plus, les énergies des rayons α sont assez voisines, on pourra poser $E = E_0 + \Delta E$, E_0 étant par exemple la valeur minimum de E dans la famille considérée et ΔE étant très inférieur à E_0 . Il vient ainsi :

$$(282) \quad \log_{10} \lambda = a + b \sqrt{\frac{2E}{m}} = a + b \sqrt{\frac{2E_0}{m}} \left(1 + \frac{\Delta E}{2E_0} \right),$$

ce que l'on peut encore écrire :

$$(283) \quad \log_{10} \lambda = a' + b' \Delta E \quad \text{avec} \quad a' = a + b \sqrt{\frac{2E_0}{m}}; \quad b' = \frac{b}{\sqrt{2mE_0}} = \frac{b}{mv_0},$$

m étant ici masse la de la particule α ($6,6 \cdot 10^{-24}$ grammes).

Par la famille de l'Uranium, la petite vitesse v_0 des particules α est égale à $1,37 \cdot 10^9$ cm. sec. On trouve alors pour b' la valeur $4,76 \cdot 10^6$ et l'on obtient finalement (pour cette famille) :

$$(284) \quad \log_e \lambda = 2,302 \log_{10} \lambda = \text{const.} + 1,09 \cdot 10^7 \Delta E.$$

Interprétation théorique de la loi de Geiger-Nuttall. — Voyons comment on peut vérifier que l'idée de MM. GAMOW, CONDON et GURNEY conduit à rendre compte de la loi de Geiger-Nuttall.

Nous ne pouvons pas adopter comme barrière de potentiel entourant le noyau, le type de la figure 21, qui serait vraiment trop schématique, mais pour nous rapprocher de la courbe de la figure 22 nous pouvons essayer d'adopter le type de barrière suivant (1) :

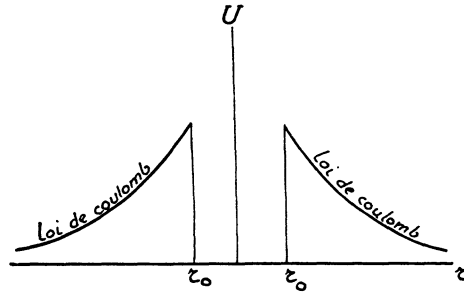


Fig. 23.

(1) On peut d'ailleurs se rendre compte que le profil de la partie interne de la barrière de la figure 22 influe peu sur le résultat, ce qui justifie le choix de la barrière schématique 23.

Le potentiel U, nul pour $r < r_0$, varie pour $r > r_0$ comme $\frac{2Z^*e^2}{r}$, Z^* étant la charge du centre du noyau ⁽¹⁾ et $2e$ celle de la particule α .

Si nous calculons la transparence des parois de la cuvette à l'aide de la formule (14) (nous savons que cette méthode approximative donne souvent de bons résultats) et si nous admettons, en accord avec (277), que le coefficient λ est proportionnel à cette transparence, nous obtenons :

$$(285) \quad \lambda = \text{const. } e^{-\frac{4\pi}{h} \int_{r_0}^{\frac{2Z^*e^2}{E}} \sqrt{2m\left(\frac{2Z^*e^2}{r} - E\right)} dr}$$

l'intégrale étant ainsi prise dans toute la partie de la barrière où il y a absorption de l'onde $\psi(U > E)$. L'on a donc :

$$(286) \quad \log_e \lambda = \text{const.} - \frac{4\pi}{h} \int_{r_0}^{\frac{2Z^*e^2}{E}} \sqrt{2m\left(\frac{2Z^*e^2}{r} - E\right)} dr$$

Posons $E = E_0 + \Delta E$, E_0 étant l'énergie minimum d'émission des particules α dans la famille considérée et admettons que r_0 ait, du moins dans chaque famille radioactive, une valeur constante d'un corps radioactif à l'autre. On a alors :

$$(287) \quad \left\{ \begin{aligned} \log_e \lambda &= \text{const.} - \frac{4\pi}{h} \sqrt{2m} \left[\int_{r_0}^{\frac{2Z^*e^2}{E_0}} \sqrt{\frac{2Z^*e^2}{r} - E} dr \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{d}{dE} \int_{r_0}^{\frac{2Z^*e^2}{E}} \sqrt{\frac{2Z^*e^2}{r} - E} dr \right)_{E=E_0} \Delta E \right] \\ &= \text{const.}(r_0, E_0) + \frac{4\pi}{h} \sqrt{2m} \int_{r_0}^{\frac{2Z^*e^2}{E_0}} \frac{1}{2\sqrt{\frac{2Z^*e^2}{r} - E_0}} dr \cdot \Delta E. \end{aligned} \right.$$

Or, E_0 est beaucoup plus petit que le sommet $\frac{2Z^*e^2}{r_0}$ de la montagne de potentiel et l'on changera très peu l'intégrale en prenant 0 comme

(1) Il est aisé de voir que, si Z est le nombre atomique du corps radioactif considéré, on doit poser $Z^* = Z - 2$.

limite inférieure au lieu de r_0 . L'intégrale figurant dans $\log \lambda$ est donc sensiblement égale à :

$$(288) \quad \int_0^{\frac{2Z^*e^2}{E_0}} \frac{dr}{2\sqrt{\frac{2Z^*e^2}{r} - E_0}} = \frac{2Z^*e^2}{E_0^{\frac{3}{2}}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \alpha d\alpha = \frac{\pi Z^*e^2}{2E_0^{\frac{3}{2}}},$$

en posant $\cos^2 \alpha = \frac{E_0 r}{2Z^*e^2}$. D'où

$$(289) \quad \log_e \lambda = C^{\text{te}}(r_0, E_0) + \frac{2\pi^2 Z^*e^2 \sqrt{2m}}{hE_0^{\frac{3}{2}}} \Delta E = C^{\text{te}}(r_0, E_0) + \frac{8\pi^2 Z^*e^2}{hmv_0^3} \Delta E,$$

v_0 étant la vitesse minimum des particules α dans la famille radioactive considérée.

La formule (289) a la même forme que la loi expérimentale. Cependant, le coefficient de ΔE varie légèrement ici avec le membre de la famille considérée car il dépend de Z^* . Pour l'Uranium, on doit poser $v_0 = 1,37 \cdot 10^9$ et en prenant pour la valeur moyenne de Z^* dans la famille $Z^* = 86$, on trouve :

$$(290) \quad \log_e \lambda = C(r_0, E_0) + 1,4 \cdot 10^7 \Delta E.$$

Le coefficient de ΔE est un peu trop fort, mais il a bien l'ordre de grandeur voulu. Ce résultat est donc encourageant et pousse à développer les calculs un peu plus. MM. GAMOW et HOUTERMANS ⁽¹⁾ ont fait des calculs plus complets (dont la base théorique ne paraît pas parfaite) et obtenu de bonnes concordances.

Formule plus approchée. — Il est aisé de calculer l'expression (285) plus rigoureusement que nous ne venons de le faire. Posons, comme plus haut

$$(291) \quad \cos \alpha = \sqrt{\frac{E_0 r}{2Z^*e^2}}.$$

On trouve alors aisément pour l'intégrale de (285)

$$(292) \quad \frac{4Z^*e^2}{\sqrt{E}} \int_0^{\alpha_0} \sin^2 \alpha d\alpha = \frac{Z^*e^2}{\sqrt{E}} (2\alpha_0 - \sin 2\alpha_0).$$

(1) *Zeits. f. Phys.*, 52 (1928), p. 496.

avec :

$$(293) \quad \alpha_0 = \arccos \sqrt{\frac{Er_0}{2Z^*e^2}}.$$

On a donc :

$$(294) \quad \begin{cases} \lambda = C(E, r_0) e^{-\frac{8\pi m Z^* e^2}{h\sqrt{2mE}}(2\alpha_0 - \sin 2\alpha_0)} \\ \lambda = C(E, r_0) e^{-\frac{8\pi Z^* e^2}{hv}(2\alpha_0 - \sin 2\alpha_0)}. \end{cases}$$

L'approximation de l'optique géométrique sur laquelle repose la formule (285) ne permet pas d'évaluer $C(E, r_0)$, mais ce coefficient varie certainement bien moins avec E que l'exponentielle. Une méthode que nous étudierons, due à M. SEXL, donne la valeur du facteur $C(E, r_0)$ et nous pourrons ainsi comparer la formule complète avec l'expérience. Nous constaterons alors que toute formule du type (294), où C est une constante ou une fonction lentement variable de E , permet de trouver un accord convenable avec l'expérience, en donnant à C des valeurs voisines de 10^{21} . Le calcul exact de C est donc plutôt secondaire ; la chose essentielle, c'est la forme de l'exponentielle et nous voyons ici, comme nous l'avons déjà vu dans d'autres cas, que l'approximation de l'optique géométrique (formule 14) fournit la forme exacte du facteur le plus important.

En remarquant que α_0 est voisin de $\frac{\pi}{2}$, on retrouve aisément, en partant de la formule (294), l'expression approchée (289).

XI

Théorie de M. von Laue. Calculs de M. Sexl

Formule de M. VON LAUE. — Nous avons traité le problème de l'évasion d'un corpuscule hors d'une cuvette de potentiel en considérant des ondes associées amorties. C'est la méthode employée par MM. GAMOW et KUDAR. Nous l'avons dit, cette méthode a été critiquée parce qu'en faisant intervenir des ondes ψ amorties, elle s'écarte des procédés usuels de la nouvelle Mécanique. D'autre part, dans le dernier

PASSAGE DES CORPUSCULES ÉLECTRISÉS

chapitre, nous avons tenté d'évaluer, avec les conceptions de GAMOW, la relation entre la constante de désintégration d'un corps radioactif et l'énergie des particules α qu'il émet, en admettant que la constante de désintégration λ est proportionnelle au coefficient de transmission T , des ondes ou des associées à la particule α , à travers les parois de la cuvette de potentiel. M. VON LAUE ⁽¹⁾ a développé une théorie qui permet à la fois d'éviter l'emploi des ondes amorties et justifie d'une autre façon la proportionnalité entre λ et T . Nous allons exposer son raisonnement.

Considérons une cuvette de potentiel symétrique telle que celle-ci par exemple :

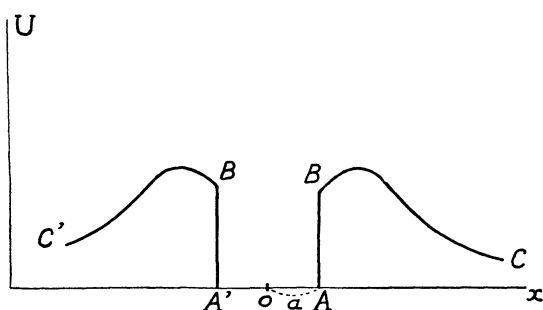


Fig. 24.

Les courbes BC et B' C' qui déterminent la forme des bords de la cuvette dépendent de la loi de potentiel et peuvent être quelconques, sous réserve de la symétrie.

Supposons qu'à l'instant origine, nous ayons dans la cuvette un train d'ondes se propageant par exemple de gauche à droite. Ce train d'ondes viendra frapper la montagne de potentiel de droite et sera en partie réfléchi vers la gauche. L'intensité du train d'ondes étant I_0 , l'intensité transmise à travers la paroi de droite sera TI_0 et nous la supposons très petite comme nous l'avons toujours fait. L'intensité réfléchie sera donc $(1 - T)I_0$ et différera très peu de I_0 . Le train d'ondes réfléchi se propagera dans la cuvette de droite à gauche et viendra frapper la montagne de potentiel de gauche. Comme celle-ci est identique à celle de droite, une onde d'intensité $T(1 - T)I_0$ s'échappera vers la gauche tandis qu'un train d'ondes d'intensité $(1 - T)^2 I_0$ sera rejeté

(1) *Zeits. f. Phys.*, 52 (1928), p. 726.

dans la cuvette et, se propageant de gauche à droite, viendra se réfléchir sur la paroi de droite etc. Au bout de n réflexions, le train d'ondes interne aura donc l'intensité $I_n = (1 - T)^n I_0$.

Soit maintenant τ le temps mis par le train d'ondes pour parcourir entre deux réflexions la longueur de la cuvette. Si nous supposons que le train d'ondes est presque monochromatique, il se déplacera avec la « vitesse de groupe » U , bien connue depuis lord Rayleigh, et un théorème fondamental de la Mécanique ondulatoire nous apprend que cette vitesse de groupe des ondes ψ est égale à la vitesse du corpuscule associé. Si donc v désigne la vitesse du corpuscule dans la cuvette, le temps de parcours de cette cuvette sera :

$$(295) \quad \tau = \frac{2a}{U} = \frac{2a}{v}$$

et l'intensité de l'onde interne entre les époques $n\tau$ et $(n + 1)\tau$, sera :

$$(296) \quad I_n = (1 - T)^n I_0 = I_0 e^{n \log (1 - T)}.$$

Comme, dans tous les problèmes de cette espèce, τ est très petit devant l'unité de temps employée, on peut considérer l'intervalle de temps τ comme infinitésimal et écrire en posant $t = n\tau$:

$$(297) \quad I(t) = I_0 e^{-\lambda t}$$

avec

$$(298) \quad \lambda = - \frac{\log (1 - T)}{\tau}.$$

Mais, par hypothèse, nous supposons que l'énergie du corpuscule prisonnier est beaucoup plus petite que le sommet de la barrière de potentiel limitant la cuvette. T est donc très petit et $\log (1 - T)$ est sensiblement égal à $-T$. On a donc :

$$(299) \quad \lambda = \frac{T}{\tau}.$$

La proportionnalité entre λ et T est ainsi justifiée et, dans le cas particulier où les bords de la cuvette sont rectangulaires, nous retrouvons la formule (258).

M. GAMOW a critiqué la méthode de M. VON LAUE ⁽¹⁾. Il a remarqué, avec raison, que cette méthode ne s'applique rigoureusement qu'à une

(1) *Zeitsch. für Phys.*, 53 (1929), p. 601.

cuvette dont les dimensions sont grandes par rapport à la longueur d'onde de l'onde interne. Si cette condition n'est pas remplie (et elle ne l'est pas en général dans les cas usuels), il est en effet impossible de considérer un train d'ondes se déplaçant en bloc dans la cuvette avec la vitesse de groupe. La méthode de M. VON LAUE évite de considérer simultanément l'existence des deux limites de la cuvette et les résonances de l'onde sur ses dimensions : mais, en général, elle constitue une approximation non justifiée et la méthode des ondes amorties est à ce point de vue plus rigoureuse.

De plus, la méthode de M. VON LAUE que nous avons exposée dans le cas d'une cuvette linéaire, ne paraît pas se transposer aisément dans le cas d'une cuvette sphérique où il y a une condition de régularité à remplir par la fonction ψ au centre de la sphère.

En tout cas, comme la formule (299) se retrouve à la fois par la méthode de M. VON LAUE et par celle des ondes amorties quand elle est applicable, on peut penser qu'elle est générale et l'appliquer sans beaucoup de crainte.

Calculs de M. SEXL. — M. SEXL a fait un calcul complet de la constante de désintégration par la méthode de LAUE ⁽¹⁾. Comme, avec cette méthode, il paraît difficile de tenir compte d'une symétrie sphérique, il a assimilé le noyau de l'atome à une « cuvette linéaire » de la forme (23), le profil extérieur des bords de la cuvette étant fixé par la loi de Coulomb ($U(x) = \frac{2Z^*e^2}{x}$). Nous désignerons x_0 la distance appelée r_0 sur la figure 23.

M. SEXL est ainsi amené à poser :

$$(300) \quad \begin{cases} \text{pour } x < x_0 & \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2m}{h^2}E\psi = 0 \\ \text{pour } x > x_0 & \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2m}{h^2}\left[E - \frac{2Z^*e^2}{x}\right]\psi = 0, \end{cases}$$

puis il introduit une variable auxiliaire, que j'appellerai u , telle que :

$$(301) \quad u = \frac{2\pi}{h}\sqrt{2mE} \cdot x.$$

(1) *Zeits. f. Phys.*, 56 (1929), p. 62.

et il pose ⁽¹⁾ :

$$(302) \quad k = \frac{8\pi Z^* e^2}{h\nu}.$$

Si alors u_0 désigne la valeur de x qui correspond à $x = x_0$, on a :

$$(303) \quad \begin{cases} \text{pour } u < u_0 : & \frac{d^2\psi_i}{du^2} + \psi_i = 0 \\ \text{pour } u > u_0 : & \frac{d^2\psi_e}{du^2} + \left(1 - \frac{k}{u^2}\right)\psi_e = 0. \end{cases}$$

M. SEXL, suivant la méthode de Laue, considère une onde qui tombe sur la paroi ($u = u_0$) venant de l'intérieur de la cuvette. Cette onde étant partiellement réfléchie, l'onde ψ_i dans la cuvette doit alors être la superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie et peut s'écrire :

$$(304) \quad \psi_i = A_1 e^{i(u-u_0)} + A_2 e^{-i(u-u_0)}.$$

L'onde ψ_e à l'extérieur de la cuvette doit être solution de la deuxième équation (303) et se confondre asymptotiquement pour $u \rightarrow \infty$ avec e^{-iu} . Les conditions de continuité en $u = u_0$ sont :

$$(305) \quad A_1 + A_2 = \psi_e(u_0); \quad i(A_1 - A_2) = \psi_e'(u_0)$$

d'où :

$$(306) \quad A_1 = \frac{1}{2} [\psi_e(u_0) - i\psi_e'(u_0)]; \quad A_2 = \frac{1}{2} [\psi_e(u_0) + i\psi_e'(u_0)].$$

Or, le flux de corpuscules à l'infini (dans l'onde divergente) est égale à la vitesse $\sqrt{\frac{2E}{m}}$ des corpuscules multipliés par la densité

$$|\psi_e(\infty)|^2 = |e^{-iu}|^2 = 1$$

et le flux à travers la limite abrupte de la barrière de potentiel en $u = u_0$ est égal au produit de la vitesse $\sqrt{\frac{2E}{m}}$ par la différence $|A_2|^2 - |A_1|^2$ des densités dans l'onde incidente et dans l'onde réfléchie. La conservation du nombre des corpuscules imposant aux deux flux évalués ci-dessus la condition d'être égaux, on voit que $|A_2|^2 - |A_1|^2$ doit être égale à l'unité, ce qui donne, grâce à (306) :

$$(307) \quad |A_2|^2 - |A_1|^2 = -\frac{i}{2} [\psi_e \psi_e'^* - \psi_e^* \psi_e']_{u=u_0} = 1.$$

(1) La constante k n'a plus ici la même valeur que dans les problèmes antérieurs.

On peut encore écrire :

$$(308) \quad \frac{1}{|A_2|^2} = 1 - \frac{|A_1|^2}{|A_2|^2}.$$

Le terme $\frac{1}{|A_2|^2}$ est le coefficient de transmission T à travers la paroi de la cuvette tandis que le rapport $\frac{|A_1|^2}{|A_2|^2}$ est le coefficient de réflexion de l'onde incidente interne sur cette paroi. L'équation (308) exprime que T est égal à $1 - R$, ce qui devait être. Finalement, on a par (306) et (307) :

$$(309) \quad \left\{ \begin{aligned} T &= \frac{1}{|A_2|^2} = \frac{1}{\frac{1}{4} |\psi_e(u_0)|^2 + \frac{1}{4} |\psi_e'(u_0)|^2 - \frac{i}{4} (\psi_e \psi_e^* - \psi_e^* \psi_e')_{u=u_0}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{4} |\psi_e(u_0)|^2 + \frac{1}{4} |\psi_e'(u_0)|^2 + \frac{1}{2}}. \end{aligned} \right.$$

Le point délicat est maintenant de trouver l'expression valable au voisinage de $u = u_0$ pour la solution $\psi_e(u)$ de la seconde équation (303) qui tend asymptotiquement vers e^{-iu} pour $u \rightarrow \infty$. Pour cela, M. SEXL a étudié les solutions de l'équation en question par la méthode de Laplace et déterminé celle de ces solutions qui se comporte à l'infini comme e^{-iu} . Puis, employant une méthode qui sert en Analyse sous le nom de « méthode du col », à déterminer les développements asymptotiques, il a montré qu'au voisinage de $u = u_0$, on pouvait poser :

$$(310) \quad \psi_e(u) = \frac{c}{\sqrt{\text{tg. } \alpha}} e^{k(x - \sin \alpha \cos \alpha)}$$

avec :

$$(311) \quad \alpha = \arccos \sqrt{\frac{u}{k}} = \arccos \sqrt{\frac{Ex}{2Z^*e^2}},$$

c étant un nombre complexe de module unité. Si α_0 désigne alors la valeur de α qui correspond à $u = u_0$, $x = x_0$, on a :

$$(312) \quad |\psi_e'(u_0)|^2 = \frac{1}{\text{tg. } \alpha_0} e^{k(2x_0 - \sin 2\alpha_0)}.$$

De même, M. SEXL a montré que l'on a approximativement :

$$(313) \quad \left\{ \begin{array}{l} |\psi'_e(u_0)|^2 = \frac{1}{\text{tg } \alpha_0} e^{k(2x_0 - \sin 2x_0)} \\ \left[1 + \left(\frac{1}{2 \cos^4 \alpha_0} - \frac{1}{\cos^2 \alpha_0} \right) (1 - \cos(2x_0 - \sin 2x_0)) \right] \end{array} \right.$$

On peut voir sur des exemples numériques que $|\psi_e(u_0)|^2$ et $|\psi'_e(u_0)|^2$ sont très supérieurs à 1, en général. On peut donc, en vertu de (309), (312) et (313), écrire pour T la valeur approchée :

$$(314) \quad T = \frac{2 \text{tg. } \alpha_0 e^{-k(2x_0 - \sin 2x_0)}}{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2 \cos^4 \alpha_0} - \frac{1}{\cos^2 \alpha_0} \right) (1 - \cos(2x_0 - \sin 2x_0))}.$$

Le facteur exponentiel, égal à $e^{\frac{8\pi Z^* e^2}{\hbar v} (2x_0 - \sin 2x_0)}$, est celui que la méthode de l'optique géométrique fournit correctement, bien qu'elle soit inexacte en principe. D'après la formule (299) de M. VON LAUE, il faut multiplier T par $\frac{1}{v} = \frac{v}{2x_0}$ pour obtenir λ . Donc :

$$(315) \quad \lambda = \frac{v}{2x_0} \cdot \frac{2 \text{tg. } \alpha_0 e^{-k(2x_0 - \sin 2x_0)}}{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2 \cos^4 \alpha_0} - \frac{1}{\cos^2 \alpha_0} \right) (1 - \cos(2x_0 - \sin 2x_0))}.$$

M. SEXL a montré que cette formule rend compte convenablement de la variation très rapide de λ avec v pour les trois familles radioactives à condition de prendre pour chacune de ces trois familles des valeurs légèrement différentes pour x_0 , savoir :

pour la famille de l'Uranium

$$x_0 = 9,7 \cdot 10^{-13} \text{ cm},$$

pour la famille de Thorium

$$x_0 = 9,4 \cdot 10^{-13} \text{ cm},$$

pour la famille de l'Actinium

$$x_0 = 8,65 \cdot 10^{-13} \text{ cm}.$$

Quand on examine les vérifications numériques de la formule (315) on s'aperçoit que le facteur $\frac{1}{v}$ est toujours de l'ordre de 10^{21} (par

exemple $0,75 \cdot 10^{21}$ pour Th et $0,92 \cdot 10^{21}$ pour Tn) tandis que le facteur T est de la forme :

$$(316) \quad T = Ce^{-\frac{8\pi Z^* e^2}{\hbar v}(2\alpha_0 - \sin 2\alpha_0)},$$

avec C de l'ordre de l'unité (0,65 pour Th ; 1,46 pour Tn). Il en résulte que λ est de la forme

$$(317) \quad \lambda = Ae^{-\frac{8\pi^2 Z^* e^2}{\hbar v}(2\alpha_0 - \sin 2\alpha_0)}$$

où A est de l'ordre de 10^{21} et peu variable d'un corps radioactif à un autre. L'énorme variation de λ avec v (pour le Thorium, on a $v = 1,41 \cdot 10^9$ cm/sec et $\lambda = 1,2 \cdot 10^{-18}$; pour Tn, on a $v = 1,74 \cdot 10^9$ cm/sec et $\lambda = 1,27 \cdot 10^{-2}$) est représentée dans (317) presque uniquement par le facteur exponentiel. C'est la raison pour laquelle la méthode de l'optique géométrique qui donne l'exponentielle, suffit, bien qu'elle soit théoriquement insuffisante, pour rendre compte de la loi de GEIGER et NUTTALL.

Pour bien mettre en évidence la prépondérance du terme exponentiel, écrivons :

$$(318) \quad \log_{10} \lambda = \log_{10} A + \log_{10} \left(e^{-\frac{8\pi^2 Z^* e^2}{\hbar v}(2\alpha_0 - \sin 2\alpha_0)} \right).$$

Avec la valeur de A fourni par le calcul de SEXL, le terme $\log_{10} A$ varie seulement de 20,7 à 21,13 quand on passe de Th au Tn tandis que le $\log_{10}$ de l'exponentielle varie alors de — 36,5 à — 23.

Remarquons que les calculs de SEXL sont rigoureux en ce qui concerne la détermination du coefficient de transmission à travers la barrière de potentiel schématique adoptée par cet auteur, mais l'application de la relation (299) fournie par le raisonnement de M. VON LAUE est sujette, nous l'avons vu, à des objections.

REMARQUES. — On a cherché à soumettre au calcul par des méthodes analogues à celles que nous avons développées dans les derniers chapitres, un certain nombre de phénomènes de la physique du noyau. M. GAMOW a ainsi étudié l'entrée d'une particule α dans un noyau, problème en quelque sorte inverse de celui qui vient d'être traité (1).

(1) *Zeits. f. Phys.*, 52 (1928), p. 510.

On a tenté aussi des théories de la désintégration artificielle (GUIDO BECK ⁽¹⁾) et de l'expulsion des électrons (rayons β) par les corps radioactifs (KUDAR ⁽²⁾). Toutes ces théories paraissent encore assez incertaines ; certains des faits qu'elles cherchent à expliquer semblent d'ailleurs encore douteux au point de vue expérimental. De plus, il y a des difficultés de principe dans l'application de la Mécanique ondulatoire aux électrons dans le noyau. Nous n'insisterons pas sur toutes ces questions dont l'exposé serait encore un peu prématuré.

Nous avons étudié l'évasion des corpuscules hors des cuvettes de potentiel par deux méthodes différentes : celle des ondes amorties (chap. IX) et celle de M. VON LAUE. Nous avons vu qu'elles prêtent chacune à certaines critiques. Pour éviter ces critiques, M. BORN a développé une troisième méthode très élégante dont il a pu faire une belle application à la théorie de l'adsorption. Au point de vue de la rigueur mathématique, la théorie de M. BORN n'est pas non plus d'ailleurs exempte de toute objection. Comme M. BORN a exposé lui-même sa théorie et ses applications à l'Institut Henri Poincaré et que cet exposé a paru dans les *Annales de l'Institut* ⁽³⁾, nous ne croyons pas utile de la reprendre ici.

(1) *Zeits. f. Phys.*, 62 (1930), p. 331.

(2) *Physik. Zeitsch.*, 32 (1931), p. 34.

(3) *Annales de l'Institut H. Poincaré*, t. I (1931), p. 226.