

ANNALES DE L'I. H. P.

KYRILLE POPOFF

Le mouvement d'un point matériel dans un milieu résistant

Annales de l'I. H. P., tome 2, n° 2 (1932), p. 143-166

[<http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1932__2_2_143_0>](http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1932__2_2_143_0)

© Gauthier-Villars, 1932, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P. » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Le mouvement d'un point matériel dans un milieu résistant

PAR

KYRILLE POPOFF

I. — Considérations générales

Je voudrais donner ici un aperçu général de mes recherches ⁽¹⁾ concernant le mouvement d'un point matériel dans un milieu résistant à densité constante ou variable. Les méthodes employées sont celles de Henri POINCARÉ, développées par MM. E. PICARD, Ivar BENDIXSON, et appliquées dans la Mécanique Céleste par POINCARÉ lui-même, et par MM. SUNDMAN, Jean CHAZY et d'autres.

L'idée fondamentale de la méthode employée est la suivante :

(1) *Popoff Kyrille*. Ueber eine Eigenschaft der ballistischen Kurve und ihre Anwendung auf die Integration der Bewegungsgleichungen. *Zeitschrift für angew. Math. und Mechanik*. Bd. 1. p. 96-106, 1921. Traduit dans le *Mémorial de l'Artillerie française*, t. II, 1923, p. 993-1008.

Sur l'intégration des équations de la Balistique dans des conditions générales de la résistance. *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, p. 337-340, 16 août 1922.

Sur une propriété géométrique des trajectoires des bolides dans l'atmosphère terrestre. *Probleme der Astronomie. Festschrift fuer Hugo v. Seeliger*, 1924, p. 169-175.

Méthodes d'intégration de POINCARÉ et le problème général de la balistique extérieure. *Mémorial de l'Artillerie française*, t. V, 1926, p. 2-71 et chez Gauthier-Villars, Paris, 1925.

Sur la convergence des séries de la Balistique Extérieure. *Mémorial de l'Art. française*, t. VIII, 1929, p. 315-324.

Sur les points singuliers des intégrales du mouvement d'un point matériel. *Mémorial de l'Art. française*, t. IX, 1930, p. 531-559.

Sur le mouvement d'un point dans un milieu résistant à densité variable. *Mémorial de l'Art. française*, t. X, 1931, p. 1-79.

Sur les formules du tir de plein fouet de M. l'Ingénieur général CHARBONNIER et sur quelques formules du même type. *Mémorial de l'Art. française*, t. X, 1931, p. 637-656.

Sur l'approximation de la fonction de résistance par des polynômes. *Mémorial de l'Art. française*, t. X, 1931.

soit

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, \lambda).$$

une équation différentielle. Si $f(x, y, \lambda)$ est une fonction holomorphe de x, y, λ autour du point (x_0, y_0, λ_0) , l'intégrale y se réduisant à y_0 pour $x = x_0, \lambda = \lambda_0$ sera une fonction holomorphe de x et λ autour du point x_0, λ_0 .

Le paramètre variable λ peut avoir une signification physique ou géométrique, mais il peut aussi être introduit, d'une manière artificielle pour la commodité des calculs.

Considérons le problème général de la balistique extérieure.

En choisissant les axes de coordonnées y, z de façon que y soit dirigé suivant la verticale descendante et z suivant la vitesse initiale, les équations différentielles du mouvement, dans la supposition d'une résistance tangentielle, seront, d'après la figure 1

$$(I) \quad \begin{cases} \frac{dy'}{dt} = g - y' \frac{cF(v)}{v}, & \frac{dy}{dt} = y' \\ \frac{dz'}{dt} = -z' \frac{cF(v)}{v}, & \frac{dz}{dt} = z', \end{cases}$$

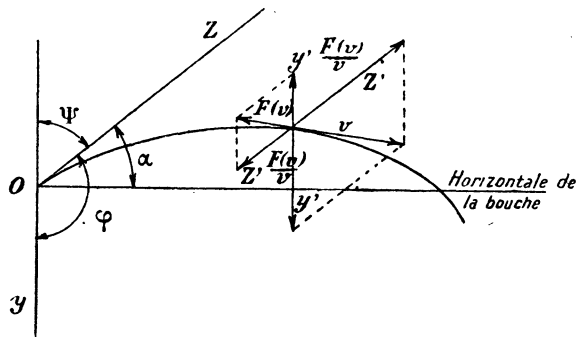


Fig. 1.

avec les conditions initiales

$$t = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad y' = 0, \quad z' = v_0.$$

Ici $cF(v)$ est la résistance du milieu par unité de masse. Nous supposons qu'elle est une fonction holomorphe de la vitesse v sur l'axe réel positif du plan de la variable complexe v .

LE MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL

D'après la figure 1, la vitesse est donnée par l'une des expressions suivantes :

$$\begin{aligned} v^2 &= y'^2 + z'^2 - 2y'z' \sin \alpha \\ &= (y' + z')^2 - 4y'z' \sin^2 \frac{\varphi}{2}, \end{aligned}$$

où α est l'angle de projection et $\varphi = \frac{\pi}{2} + \alpha$.

Les équations de la première colonne du système ci-dessus peuvent être mises facilement sous la forme

$$(2) \quad d\tau = \frac{g}{c} \cdot \frac{du}{\Phi\left(\frac{u}{\cos \tau}\right)},$$

avec $\Phi(v) = vF(v)$, où τ est l'angle que la vitesse fait avec l'horizon et $u = v \cos \tau$, est la composante horizontale de la vitesse. C'est l'équation de l'hodographe sous sa forme classique.

Arrêtons-nous un instant à l'équation classique de l'hodographe (2) qu'on peut mettre sous des formes les plus diverses. On peut poser, par exemple :

$$\cos \tau = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \tau}}$$

ou bien

$$\cos \tau = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\tau}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\tau}{2}}.$$

La première de ces substitutions mène aux formules de M. l'Ingénieur général CHARBONNIER et la seconde à des formules nouvelles.

Avec ces deux expressions de $\cos \tau$ l'équation de l'hodographe peut s'écrire, après division par $\cos^2 \tau$ ou $\cos^2 \frac{\tau}{2}$, sous l'une des formes

$$(3) \quad d \operatorname{tg} \tau = \frac{g}{c} \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 \tau)}{\Phi(u\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \tau})} du,$$

ou

$$(4) \quad d \operatorname{tg} \frac{\tau}{2} = \frac{g}{2c} \frac{\left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\tau}{2}\right)}{\Phi\left(u \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\tau}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\tau}{2}}\right)} du.$$

Ces équations peuvent être généralisées en introduisant un paramètre λ^2 et en leur substituant les équations suivantes :

$$(3 \text{ bis}) \quad d \operatorname{tg} \tau = \frac{g}{c} \frac{(1 + \lambda^2 \operatorname{tg}^2 \tau)}{\Phi(u\sqrt{1 + \lambda^2 \operatorname{tg}^2 \tau})} du,$$

$$(4 \text{ bis}) \quad d \operatorname{tg}^2 \frac{\tau}{2} = \frac{g}{2c} \frac{1 + \lambda^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\tau}{2}}{\Phi\left(u \frac{1 + \lambda^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\tau}{2}}{1 - \lambda^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\tau}{2}}\right)} du.$$

Pour $\lambda^2 = 1$ ces équations coïncident avec les équations ordinaires de l'hodographe. Pour λ^2 quelconque elles coïncident avec les équations de l'hodographe, correspondant à la même fonction de résistance et à une accélération de la pesanteur $g\lambda$ au lieu de g . En effet, en posant :

$$\operatorname{tg} \theta = \lambda \operatorname{tg} \tau,$$

dans le premier cas, et :

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \lambda \operatorname{tg} \frac{\tau}{2},$$

dans le second, on obtient les équations

$$(5) \quad d \operatorname{tg} \theta = \frac{g\lambda}{c} \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}{\Phi(u\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta})} du,$$

ou

$$(6) \quad d \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{g\lambda}{2c} \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}}{\Phi\left(u \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}}\right)} du,$$

qui ne diffèrent des équations (3) et (4) que par l'écriture et par le facteur λ qui multiplie g . Pour $\lambda < 0$ il n'y a qu'à mettre $\lambda = \lambda_1$, $\theta = -\theta$, pour retomber sur les mêmes équations.

II. — Mouvement dans un milieu à densité constante

Dans le cas d'une atmosphère à densité constante, la quantité c qui figure dans les équations ci-dessus est une constante sur toutes les trajectoires, ce qui facilite leur intégration par des séries.

Les intégrales des équations (1) sont des fonctions de la variable t qui contiennent le paramètre $\sin \alpha$ ou $\sin^2 \frac{\varphi}{2}$ tandis que les intégrales des équations (5) et (6) sont des fonctions de u qui contiennent le paramètre λ .

Nous fixerons notre attention sur les paramètres $\sin \alpha$, $\sin^2 \frac{\varphi}{2}$ et λ et nous étudierons les intégrales comme fonctions de ces paramètres.

Commençons par l'équation (6). Le second membre de cette équation est une fonction holomorphe de u et de $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$ pour toute valeur positive de u , pour toute valeur réelle et finie de $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$ et pour toute valeur réelle et finie du paramètre λ , c'est-à-dire la seconde membre est une fonction holomorphe de u , $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$ et de λ sur toutes les trajectoires réelles et sur toutes les planètes où on les étudie, à l'exclusion de l'origine ($u = +\infty$) et du point terminal ($u = 0$) des trajectoires.

Suivant le théorème de Poincaré cité au début, l'intégrale $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$ sera une fonction holomorphe de u dans l'intervalle (ε, E) de u et sur l'axe réel du plan du paramètre complexe λ , où ε est une quantité positive arbitrairement petite, et E une quantité positive, arbitrairement grande. On pourra par conséquent développer $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$ suivant les puissances positives de λ . En se rapportant aux équations (6) et (4 bis) on se rend compte facilement que la série correspondante ne contiendra que les puissances impaires de λ et par conséquent on aura

$$(7) \quad \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \lambda \varphi_0(u) + \lambda^3 \varphi_2(u) + \lambda^5 \varphi_4(u) + \dots$$

où $\varphi_{2n}(u)$ sont des fonctions holomorphes de u .

La convergence de cette série est limitée par les points singuliers λ_p de $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$ considérée comme fonction de λ et ces points dépendent des coefficients de la série (7) c'est-à-dire de la variable u . Si l'on ne donne à u que des valeurs réelles de l'intervalle (ε, E) , les points λ_p ne dépendront que d'un paramètre u et décriront dans le plan du paramètre complexe des lignes qui ne peuvent pas couper l'axe des λ réels. En effet, la supposition que la ligne coupe pour $u = u_0$,

l'axe des λ réels en un point $\lambda_{p,0}$ est absurde, puisque la valeur correspondante $\operatorname{tg} \frac{\theta_p}{2}$ de $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$ sera réelle, et comme le second membre de (6) est une fonction holomorphe de u , $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$ et λ autour du point u_0 , $\operatorname{tg} \frac{\theta_p}{2}$, et $\lambda_{p,0}$, l'intégrale $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$ sera une fonction homologue de u et de λ autour du point u_0 et $\lambda_{p,0}$. Par conséquent $\lambda_{p,0}$ ne peut pas être un point singulier de la série (7).

Soit maintenant $d_p(u)$ la distance du point $\lambda_p(u)$ à l'axe des λ réels et m_p la limite inférieure de cette distance dans l'intervalle (ε, E) de u . Si l'on désigne par m la plus petite des limites m_p , l'intégrale $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$ sera une fonction holomorphe de λ dans une bande infinie de largeur $2m$, autour de l'axe des λ réels et pour des valeurs de u de l'intervalle (ε, E) . La quantité m dépend de la distribution des zéros de la fonction $\Phi(v)$ et de l'intervalle (ε, E) .

Considérons maintenant la fonction

$$\lambda = \psi(\mu) = \frac{2m}{\pi} \left[\log \left(1 + \mu \frac{e^{\frac{\pi}{2m}} - 1}{e^{\frac{\pi}{2m}} + 1} \right) - \log \left(1 - \mu \frac{e^{\frac{\pi}{2m}} - 1}{e^{\frac{\pi}{2m}} + 1} \right) \right]$$

qui donne la représentation conforme de cette bande sur un cercle de rayon $|\psi(im)|$ de façon qu'aux points $-1, 0$ et $+1$ du plan de λ correspondent les points $-1, 0, +1$ du plan de μ .

Après cette transformation $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$ devient une fonction holomorphe de u de l'intervalle (ε, E) et de μ dans le cercle ci-dessus, par conséquent $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$ peut être développé suivant les puissances de μ . La série ainsi obtenue sera convergente pour $\mu = \pm 1$; pour $\mu = +1$ elle nous donnera $\operatorname{tg} \frac{\tau}{2}$ sur la trajectoire balistique.

Pour obtenir le développement suivant les puissances positives de μ il n'y a qu'à poser

$$\lambda = \mu \psi'(0) + \frac{\mu^2}{2!} \psi''(0) + \frac{\mu^3}{3!} \psi'''(0) + \dots,$$

dans la série (7).

Le calcul des coefficients $\varphi_0(u)$, $\varphi_2(u)$, $\varphi_4(u)$ de la série (7) se ramène

LE MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL

facilement à des quadratures. Pour cela il n'y a qu'à remplacer dans l'équation généralisée (6) de l'hodographe $\text{tg } \frac{\theta}{2}$ par la série (7) et à ordonner les deux membres de l'équation ainsi obtenue suivant les puissances de λ . On obtient ainsi une équation de la forme

$$\frac{d\varphi_0(u)}{du} + \lambda^2 \frac{d\varphi_2(u)}{du} + \lambda^4 \frac{d\varphi_4(u)}{du} + \dots = F_0 + \lambda^2 F_2 + \lambda^4 F_4 + \dots$$

où F_{2u} est une fonction connue de u et de $\varphi_0, \varphi_2, \dots, \varphi_{2n-2}$ seulement et d'où l'on tire

$$\frac{d\varphi_{2u}(u)}{du} = F_{2u} \quad (u = 0, 1, 2, \dots)$$

avec les conditions initiales

$$\varphi_0(u_0) = \text{tg } \frac{x}{2}, \quad \varphi_{2n}(u_0) = 0.$$

Ces équations nous permettent de calculer de proche en proche, par quadratures, les fonctions $\varphi_0(u), \varphi_2(u), \dots, \varphi_{2n}(u), \dots$. Ces fonctions ont une structure analogue à celle des coefficients dans les développements formels de M. l'Ingénieur général CHARBONNIER, qu'on obtient en traitant d'une manière analogue l'équation (5) et en posant

$$(8) \quad \text{tg } \theta = \lambda \varphi_0(u) + \lambda^3 \varphi_2(u) + \lambda^5 \varphi_4(u) + \dots$$

Considérons un cas particulier où l'étude de la distribution des points singulier de cette série ne présente pas des difficultés et qui peut nous donner quelques renseignements sur les distributions de ces points en général.

Supposons qu'on ait $F(v) = v^n$ avec $n \neq 1$. Dans ce cas on aura à étudier l'équation différentielle

$$d \text{tg } \theta = \frac{g\lambda}{c} \frac{du}{u^{n+1}(1 + \text{tg}^2 \theta)^{\frac{n-1}{2}}}$$

ce qui donne

$$(9) \quad \int_{\text{tg } \theta_0}^{\text{tg } \theta} \frac{1}{(1 + \text{tg}^2 \theta)^{\frac{n-1}{2}}} d \text{tg } \theta - \lambda \psi(u) = 0,$$

avec

$$(10) \quad \psi(u) = \frac{g}{c} \int_E^u \frac{du}{u^{n+1}} = \frac{g}{nc} \left(\frac{1}{u^n} - \frac{1}{E^n} \right),$$

et où $\text{tg } \theta$ est la valeur de $\text{tg } \theta_0$ correspondant à $u = E$.

Pour que cette dernière équation détermine $\operatorname{tg} \theta$ comme fonction holomorphe de λ et de u , il faut que la dérivée partielle du premier membre de (9) par rapport à $\operatorname{tg} \theta$ soit finie et différente de zéro. Comme cette dérivée est égale à :

$$(\operatorname{I} + \operatorname{tg}^2 \theta)^{\frac{n-1}{2}},$$

il s'ensuit que les points singuliers correspondent aux valeurs $\pm i$ et ∞ de $\operatorname{tg} \theta$.

Par conséquent les points singuliers $\lambda_p(u)$ de la série (8) correspondant à $\operatorname{tg} \theta = \pm i$ seront données par

$$(11) \quad \int_{\operatorname{tg} \theta_0}^{\pm i} (\operatorname{I} + \operatorname{tg}^2 \theta)^{\frac{n-1}{2}} d \operatorname{tg} \theta = \lambda_{1,2} \psi(u),$$

et le point singulier λ_3 correspondant à $\operatorname{tg} \theta = +\infty$ sera donné par

$$(12) \quad \int_{\operatorname{tg} \theta_0}^{\infty} (\operatorname{I} + \operatorname{tg}^2 \theta)^{\frac{n-1}{2}} d \operatorname{tg} \theta = \lambda_3 \psi(u).$$

Ce dernier point est à l'infini.

Étudions de près les points singuliers λ_1 et λ_2 . On aura ici

$$\lambda_{1,2}(u) = \frac{\operatorname{I}}{\psi(u)} \left[\int_{\operatorname{tg} \theta_0}^{\infty} (\operatorname{I} + \operatorname{tg}^2 \theta)^{\frac{n-1}{2}} d \operatorname{tg} \theta + \int_0^{\pm i} (\operatorname{I} + \operatorname{tg}^2 \theta)^{\frac{n-1}{2}} d \operatorname{tg} \theta \right].$$

En posant $\operatorname{tg} \theta = ix$ dans la seconde intégrale définie on obtiendra

$$\lambda_{1,2}(u) = \frac{\operatorname{I}}{\psi(u)} \left[\int_{\theta_0}^{\infty} \frac{d\theta}{\cos^{\frac{n+1}{2}} \theta} + i \int_0^{\pm i} \frac{dx}{(\operatorname{I} - x^2)^{\frac{n-1}{2}}} dx \right].$$

et par conséquent on aura

$$(13) \quad \lambda_{1,2}(u) = \frac{\operatorname{I}}{\psi(u)} \int_0^{\pm i} \frac{dx}{(\operatorname{I} - x^2)^{\frac{n-1}{2}}} = \frac{\operatorname{I}}{\psi(u)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx,$$

d'où l'on tire, en tenant compte de l'expression de $\psi(u)$,

$$(14) \quad m_{1,2} = |\lambda_{1,2}(\varepsilon)| = \frac{nc}{g} \frac{\varepsilon^n \operatorname{E}^n}{\operatorname{E}^n - \varepsilon^n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx.$$

On voit d'ici que $m_{1,2}$ tend vers zéro avec ε .

LE MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL

Dans le cas où $F(v) = v$, on aura à étudier l'équation :

$$d \operatorname{tg} \theta = \frac{g\lambda}{c} \frac{du}{u},$$

ce qui donne :

$$(15) \quad \operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} \theta_0 + \frac{g\lambda}{c} \log \frac{u}{E},$$

et, par conséquent, $\operatorname{tg} \theta$ sera une fonction de λ , holomorphe dans tout le plan de ce paramètre.

D'une manière analogue, l'étude de la convergence de la série (7), dans le cas où $F(v) = v^n$, nous donne pour les points singuliers l'expression

$$(16) \quad \lambda_p(u) = \frac{2}{\psi(u)} \int_{\operatorname{tg} \frac{\theta_0}{2}}^{x_p} \frac{(1+x^2)^n}{(1-x^2)^{n+1}} dx,$$

où la limite supérieure de l'intégrale définie a une des valeurs suivantes :

$$x_p = \pm i, \pm 1, \infty.$$

Revenons aux équations différentielles du mouvement (1) que nous reproduirons ici

$$(1) \quad \frac{dy'}{dt} = g - y' \frac{cF(v)}{v}, \quad \frac{dz'}{dt} = -z' \frac{cF(v)}{v},$$

où

$$v = \sqrt{(y' + z')^2 - 4y'z' \sin^2 \frac{\varphi}{2}},$$

et où les conditions initiales sont

$$t = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad y' = 0, \quad z' = v_0.$$

Nous considérerons toujours le mouvement dans le cas d'une atmosphère de densité constante ($c = \text{const.}$) et nous étudierons maintenant les intégrales de ces équations comme fonctions du paramètre $\sin^2 \frac{\varphi}{2}$, qui ne s'introduit qu'au moyen de la vitesse. Or la vitesse est une fonction holomorphe de y' , z' et $\sin^2 \frac{\varphi}{2}$, tant que l'expression sous le radical a une valeur différente de zéro. Sur les trajectoires réelles et curvilignes la vitesse n'étant jamais nulle, elle est une fonction holomorphe de y' , z' et $\sin^2 \frac{\varphi}{2}$ autour de chaque trajectoire réelle et par conséquent

les seconds membres des équations (I) seront des fonctions holomorphe de y' , z' et $\sin^2 \frac{\varphi}{2}$ qui ne contiennent pas la variable t .

Les intégrales y' , z' , y , z sont des fonctions holomorphes de t et de $\sin^2 \frac{\varphi}{2}$ autour des trajectoires réelles et on peut développer ces intégrales suivant les puissances de $\sin^2 \frac{\varphi}{2}$ ce qui conduit à des formules de la forme

$$(I7) \quad \begin{cases} y' = y_0'(t) + y_1'(t) \sin^2 \frac{\varphi}{2} + y_2'(t) \sin^4 \frac{\varphi}{2} + \dots, \\ z' = z_0'(t) + z_2'(t) \sin^2 \frac{\varphi}{2} + z_2'(t) \sin^4 \frac{\varphi}{2} + \dots, \\ y = y_0(t) + y_1(t) \sin^2 \frac{\varphi}{2} + y_2(t) \sin^4 \frac{\varphi}{2} + \dots, \\ z = z_0(t) + z_1(t) \sin^2 \frac{\varphi}{2} + z_2(t) \sin^4 \frac{\varphi}{2} + \dots, \end{cases}$$

où les

$$y_n'(t), \quad z_n'(t), \quad y_n(t), \quad z_n(t),$$

sont des fonctions holomorphes de t .

Étudions ces intégrales pour $t > 0$. La convergence des séries ci-dessus est limitée par les points singuliers qui, pour chaque valeur donnée de t , ont des positions bien déterminée dans le plan du paramètre complexe de $\sin \frac{\varphi}{2}$. Ces points singuliers $\sin_p \frac{\varphi}{2}$ ne dépendant que d'un paramètre t décriront, dans le plan de $\sin_p \frac{\varphi}{2}$, des courbes quand la variable réelle t varie de zéro à T , où T est une quantité positive choisie arbitrairement grande. Ces courbes ne peuvent pas couper l'axe réel du plan $\sin \frac{\varphi}{2}$ entre les points -1 et $+1$, parce que, dans le cas contraire, le point d'intersection serait un point singulier de l'intégrale pour la valeur correspondante de t , ce qui est impossible. Par conséquent on peut délimiter autour du segment $(-1, +1)$ dans le plan de $\sin \frac{\varphi}{2}$ un domaine qui ne contient à son intérieur aucun point singulier $\sin_p \frac{\varphi}{2}$ pour des valeurs de t de l'intervalle $(0, T)$. La transformation conforme de ce domaine sur le

LE MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL

cercle $|\mu| = 1$ du plan du paramètre μ permet d'obtenir des séries convergentes pour des valeurs de μ qui correspondent à toutes les valeurs réelles de $\sin \frac{\varphi}{2}$ de l'intervalle $(-1 + \varepsilon, +1 - \varepsilon)$, où ε est une quantité positive arbitrairement petite.

On aurait pu choisir, par exemple, comme domaine de $\sin \frac{\varphi}{2}$ le domaine entre deux arcs de cercles, symétriques par rapport à l'axe réel du plan $\sin \frac{\varphi}{2}$, qui passent par les points -1 et $+1$ et où leurs tangentes font des angles

$$\frac{\pi}{2^n}$$

avec l'axe réel du plan $\sin \frac{\varphi}{2}$. En choisissant n suffisamment grand on arrive à un domaine qui ne contient à son intérieur aucun point singulier $\sin \frac{\varphi}{2}$. La formule

$$(18) \quad \mu = \psi\left(\sin \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{\left(1 + \sin \frac{\varphi}{2}\right)^n - \left(1 - \sin \frac{\varphi}{2}\right)^n}{\left(1 + \sin \frac{\varphi}{2}\right)^n + \left(1 - \sin \frac{\varphi}{2}\right)^n},$$

donne alors la représentation conforme de ce domaine sur le cercle $|\mu| = 1$.

Le calcul des coefficients $y_n(t)$, $z_n(t)$ peut être fait en remplaçant dans les équations (1) y' , z' par les séries (17) et en écrivant que les coefficients des mêmes puissances de $\sin^2 \frac{\varphi}{2}$ dans les deux membres des équations ainsi obtenues sont égaux. On obtient ainsi un système de couples d'équations différentielles qui permettent de calculer de proche en proche les coefficients y_n , z_n , par des quadratures. Les coefficients ainsi obtenus ont une structure analogue à la structure des formules de SIACCI et de CHARBONNIER. Nous renvoyons pour ces calculs à nos leçons professées à la Sorbonne pendant l'année scolaire 1924-1925, reproduites dans le *Mémorial*.

Nous nous contenterons à remarquer ici que la convergence de ces séries est très rapide. En effet, pour obtenir ces développements

suivant les puissances de $\sin \frac{\varphi}{2}$, il faut mettre v sous la forme

$$v = (y' + z') \sqrt{1 - \frac{4y'z'}{(y' + z')^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}},$$

et développer suivant les puissances de

$$\frac{4y'z'}{(y' + z')^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Or comme sur la trajectoire y' et z' sont des quantités réelles, positives et finies qui ne s'annulent pas à la fois, on aura

$$(y' - z')^2 = (y' + z')^2 - 4y'z' \geq 0,$$

d'où

$$1 \geq \frac{4y'z'}{(y' + z')^2} \geq 0.$$

Par conséquent, tant que $\sin^2 \frac{\varphi}{2} < 1$, on pourra développer $f(v) = \frac{cF(v)}{v}$ en série suivant les puissances positives de

$$\frac{4y'z'}{(y' + z')^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Cette série est rapidement convergente puisque, pour $t = 0$ et pour $t = \infty$, le facteur $\frac{4y'z'}{(y' + z')^2}$ est nul (pour $t = 0$, on a $y' = 0$ et $z' = v_0$; pour $t = \infty$ on a $z' = 0$ et y' est très grand). Pour des petites valeurs de t , la quantité

$$\frac{4y'z'}{(y' + z')^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2},$$

est petite de l'ordre de $\frac{4y'}{z'} \sin^2 \frac{\varphi}{2}$ et pour des grandes valeurs de t , cette quantité est petite de l'ordre de $\frac{4z'}{y'} \sin^2 \frac{\varphi}{2}$.

Si l'on coupe les séries (17) à leurs premiers termes, on aura

$$\begin{aligned} y' &= y_0'(t), & y &= y_0(t), \\ z' &= z_0'(t), & z &= z_0(t), \end{aligned}$$

où les fonctions $y_0(t)$, $y_0'(t)$, $z_0(t)$, $z_0'(t)$ ne contiennent pas le paramètre α . Or choisissons un parallélogramme ABCD dont les côtés soient articulés de manière à lui permettre des déformations autour des sommets.

LE MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL

Portons sur AB et CD en allant de A et C vers B et D les longueurs :

$$z_0(1), \quad z_0(2), \quad z_0(3), \quad \dots, \quad z_0(t),$$

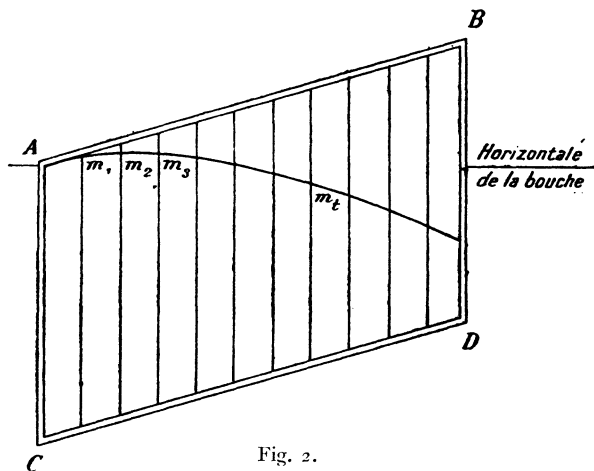


Fig. 2.

et joignons par des fils les points de division correspondants. Marquons sur ces fils les points $m_1, m_2, m_3, \dots, m_t$, dont les distances aux extrémités des fils sur AB sont :

$$y_0(1), \quad y_0(2), \quad y_0(3), \quad \dots, \quad y_0(t).$$

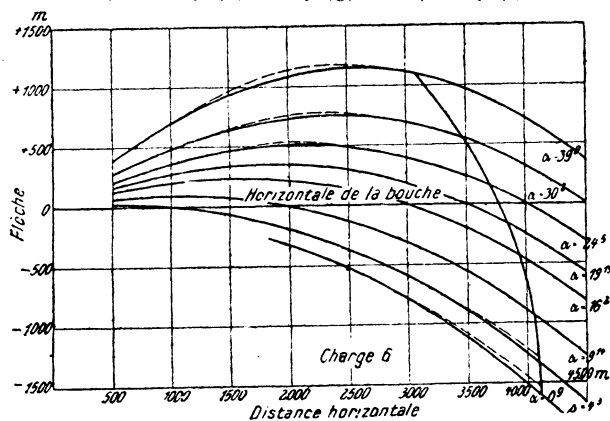


Fig. 3.

Les points $m_1, m_2, m_3, \dots, m_t$ se trouvent alors sur une trajectoire correspondant à l'angle de projection

$$\alpha = \widehat{BAC} - \frac{\pi}{2}.$$

Il suffit de déformer le cadre pour obtenir toutes les trajectoires correspondant à la même vitesse initiale et à des valeurs de l'angle α comprises entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$.

Cette propriété est rigoureuse pour les trajectoires dans le vide et dans le cas où la résistance serait proportionnelle à la vitesse, si grand que soit le coefficient de la proportionnalité ; elle subsiste pratiquement dans les conditions ordinaires du tir. La raison en est la convergence rapide de nos séries.

Les lignes pleines de la figure 3 reproduisent les trajectoires de Krupp employées dans l'armée allemande, et les lignes pointillées indiquent les écarts entre les trajectoires de Krupp et les trajectoires transformées par le parallélogramme.

III. — Mouvement dans un milieu résistant à densité variable dans le cas de grandes vitesses initiales

Nous avons admis jusqu'à présent la constance de la densité de l'atmosphère. Pourtant dans le cas de grandes vitesses initiales le projectile peut atteindre des altitudes où la densité de l'atmosphère diffère beaucoup de la densité à l'origine des coordonnées. Nous admettrons que dans ce cas la densité Δ varie suivant la loi

$$\Delta = \Delta_0 e^{-kh},$$

où Δ_0 est la densité à l'origine et h est l'altitude de la couche atmosphérique au-dessus de l'origine ; k est une constante positive.

Les mesures récentes montrent que dans le cas de grandes vitesses la fonction de résistance $F(v)$ est de la forme

$$(19) \quad F(v) = av + c + r(v) = av + \varphi(v),$$

avec $a > 0$ et $r(v)$ presque nul. Nous introduirons un paramètre λ en écrivant

$$(20) \quad F(v, \lambda) = av + \lambda[c + r(v)] = av + \lambda\varphi(v),$$

et nous étudierons les intégrales des équations du mouvement comme fonction de λ . Pour $\lambda = 0$ on a le cas étudié déjà par M. CAVALLI et pour $\lambda = 1$ le mouvement dans le cas de résistance donnée par les recherches expérimentales.

En rapportant le mouvement à des axes de coordonnées orthogonales, l'axe des x étant horizontal et l'axe des y étant dirigé suivant la *verticale ascendante*, les équations différentielles du mouvement seront :

$$(21) \quad \begin{cases} \frac{dx'}{dt} = -x' \frac{cF(v, \lambda)}{v}, & \frac{dx}{dt} = x', \\ \frac{dy'}{dt} = -g - y' \frac{cF(v, \lambda)}{v}, & \frac{dy}{dt} = y', \quad v^2 = x'^2 + y'^2, \end{cases}$$

avec les conditions initiales

$$t = 0, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad x' = V \cos \alpha, \quad y' = V \sin \alpha,$$

où V est la vitesse initiale et α l'angle de projection.

D'après le théorème cité de POINCARÉ, les intégrales étant des fonctions homologues du paramètre λ , on peut mettre x , y et v sous la forme :

$$(22) \quad \begin{cases} x = x_0 + \lambda x_1 + \lambda^2 x_2 + \dots, \\ y = y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + \dots, \\ v = v_0 + \lambda v_1 + \lambda^2 v_2 + \dots, \end{cases}$$

où les x_i , y_i , v_i sont des fonctions holomorphes de t qu'il s'agit de déterminer.

En substituant dans les équations différentielles à x , y et v leurs développements, après avoir mis $\frac{cF(v, \lambda)}{v}$ sous la forme :

$$\frac{cF(v, \lambda)}{v} = \left[a + \lambda \frac{\varphi(v)}{v} \right] e^{-ky} = [a + \lambda \psi(v)] e^{-ky},$$

et en écrivant que les coefficients de λ^n dans les deux membres des équations ainsi obtenues sont égaux, on aura les systèmes d'équations différentielles suivantes :

$$(A) \quad \begin{cases} \frac{dx'_0}{dt} = -e^{-ky_0} a x'_0, \\ \frac{dy'_0}{dt} = -g - e^{-ky_0} a y'_0, \end{cases}$$

avec les conditions initiales :

$$t = 0, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad x'_0 = V \cos \alpha, \quad y'_0 = V \sin \alpha,$$

et

$$(B) \quad \begin{cases} \frac{dx'_n}{dt} = -e^{-ky_0} (a x'_n - a k x'_0 y'_0 + \xi_n), \\ \frac{dy'_n}{dt} = -e^{-ky_0} (a y'_n - a k y'_0 y'_0 + \tau_n), \end{cases}$$

avec les conditions initiales :

$$t = 0, \quad x_n = y_n = x_n' = y_n' = 0.$$

les ξ_n, η_n étant des fonctions connues de $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}; y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ et de leurs dérivées.

L'intégration de ces systèmes ne présente aucune difficulté. On écrit d'abord la seconde des équations (A) sous la forme

$$\frac{dy_0'}{dt} = -g + \frac{a}{k} \frac{de^{-ky_0}}{dt}.$$

d'où par une première quadrature on tire

$$y_0' - V \sin \alpha = \frac{a}{k} e^{-ky_0} - \frac{a}{k} - gt,$$

ce qu'on peut écrire, en multipliant par ke^{ky_0} , sous la forme

$$\frac{de^{ky_0}}{dt} = Ae^{ky_0} + a,$$

avec

$$A = kV \sin \alpha - a - kgt.$$

Cette équation, qui est linéaire par rapport à e^{ky_0} , donne par des quadratures e^{ky_0} et par conséquent y_0 , en fonction de t . Après cela, la première des équations (A) qui est linéaire en x_0' donne x_0' et x_0 par quadratures.

Supposons maintenant qu'on ait déterminé $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}; y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ et par conséquent qu'on connaît ξ_n, η_n , comme fonctions de t . Les équations (B) s'intègrent facilement par quadratures et donnent x_n et y_n en fonction de t .

On obtient ainsi les intégrales du mouvement en forme de séries procédant suivant les puissances de λ et ces séries peuvent être traitées comme les séries du paragraphe précédent.

L'étude des intégrales comme fonctions des paramètres est intimement liée à l'étude des points singuliers des intégrales considérées comme fonctions de la variable indépendante. Cette étude a été faite dans nos travaux publiés dans le *Mémorial de l'Artillerie française*. Nous voulons donner ici une idée générale du chemin suivi dans cette étude et des résultats obtenus.

IV. — L'étude des points singuliers des intégrales du mouvement

A) *Mouvement dans un milieu à densité constante.* — Nous reprendrons les équations du mouvement (1) que nous écrirons sous la forme

$$(1) \quad \frac{dz'}{z'f(v)} = \frac{dy'}{g - y'f(v)} = dt,$$

avec

$$f(v) = \frac{cF(v)}{v}.$$

Les points singuliers, de l'hodographe correspondent soit à des valeurs de y' , z' qui annulent les dénominateurs soit à des valeurs de y' , z' qui les rendent infinies. Nous étudierons ici les points singuliers du premier type, qui sont donnés par les racines du système

$$(23) \quad \begin{cases} z'f(v) = 0, \\ g - y'f(v) = 0, \end{cases}$$

où

$$v^2 = y'^2 + z'^2 - 2y'z' \sin \alpha,$$

c'est-à-dire ce sont des points qui vérifient à

$$z' = 0, \quad g - y'f(y') = 0,$$

ou bien à

$$(24) \quad z' = 0, \quad g - cF(y') = 0.$$

La fonction $F(y')$ n'ayant un sens physique que pour des valeurs positives de v , ce sont les racines positives de $g - cF(y') = 0$ qui nous intéresseront ici plus particulièrement. D'autre part, pour y' positive, $F(y')$ étant une fonction croissante de y' et nulle pour $y' = 0$, cette équation n'a qu'une racine positive, que nous désignerons par w .

Pour étudier l'intégrale de (1) autour du point singulier $y' = w$, $z' = 0$, nous substituerons aux dénominateurs leurs développements autour de ce point, ce qui donne, après des calculs faciles,

$$(25) \quad \frac{dz'}{z' + \dots} = \frac{d(y - w)}{mz' + \gamma(y' - w) + \dots} = -f(w)dt,$$

où les points remplacent des termes du second degré au moins par rapport à $(y' - w)$ et z' et où l'on a

$$(26) \quad \begin{cases} \mu = \frac{wf'(w)}{f(w)}, \\ \lambda = 1 + \mu = \frac{cF'(w)}{f(w)} > 0, \\ m = -\mu \sin \alpha. \end{cases}$$

Dans le problème que nous étudions deux cas peuvent se présenter :

1) λ , qui est positif, est une quantité fractionnaire qui n'est pas l'inverse d'une quantité entière positive ;

2) λ est une quantité positive entière ou l'inverse d'une quantité entière positive.

L'équation (25) a été étudiée par BRIOT et BOUQUET, par Poincaré, PICARD et autre. En introduisant avec M. PICARD ⁽¹⁾ comme variable indépendante la variable τ , définie par

$$(27) \quad -f(w)dt = \frac{d\tau}{\tau},$$

on trouve les résultats suivants :

1) Dans le cas où λ est une quantité fractionnaire qui n'est pas l'inverse d'un entier, on a une infinité de courbes intégrales telles que dans la proximité de $y' = w$, $z' = 0$ on peut développer $y' - w$ et z' en séries P_1 et P_2 suivant les puissances positives et entières de $c_1\tau$ et $c_2\tau^\lambda$ qui s'annulent avec τ , c_1 et c_2 étant des constantes arbitraires.

$$(28) \quad \begin{cases} y' = w + P_1(c_1\tau, c_2\tau^\lambda), \\ z' = P_2(c_1\tau, c_2\tau^\lambda). \end{cases}$$

Le point $(y' = w, z' = 0)$, qui correspond à $\tau = 0$, est un nœud des courbes intégrales, qui ne sont que des transformées de l'hodographe.

Il est facile de voir que ce point correspond à la valeur $+\infty$ du temps. En effet l'équation (27) donne

$$t = t_0 + f(w)^{-1} \log \frac{\tau_0}{\tau},$$

ce qui démontre la proposition.

(1) E. PICARD, *Traité d'analyse*, t. III.

Nous sommes maintenant en état de démontrer que les trajectoires admettent une asymptote verticale. En effet, des relations (28) et de

$$(29) \quad \begin{cases} y' = \frac{dy}{dt} = -\frac{dy}{d\tau} \cdot \tau f(w), \\ z' = \frac{dz}{dt} = -\frac{dz}{d\tau} \cdot \tau f(w). \end{cases}$$

on obtient, en intégrant entre τ_0 et τ ,

$$(30) \quad \begin{cases} y = y_0 - \frac{w}{f(w)} \log \frac{\tau}{\tau_0} - \frac{1}{f(w)} \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{P_1(c_1\tau, c_2\tau^\lambda)}{\tau} d\tau, \\ z = z_0 - \frac{1}{f(w)} - \frac{1}{f(w)} \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{P_2(c_1\tau, c_2\tau^\lambda)}{\tau} d\tau. \end{cases}$$

Puisqu'on a $\lambda > 0$ et puisque les séries P_1 et P_2 ne contiennent pas des termes de degré zéro par rapport à $c_1\tau$ et $c_2\tau^\lambda$, les intégrales définies tendent vers des valeurs finies quand τ tend vers zéro ; par conséquent, z tend vers une valeur finie et y vers l'infini quand τ tend vers zéro (et t vers $+\infty$).

2) Dans le cas où λ est un entier positif ou l'inverse d'un entier positif, M. PICARD démontre que les intégrales $(y' - w)$ et z' s'annulant avec τ sont des fonctions holomorphes de

$$\tau \text{ et } \tau \log \tau,$$

qui contiennent une constante arbitraire.

Dans ce cas encore les intégrales définies correspondantes

$$(31) \quad \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{P_1(\tau, \tau \log \tau)}{\tau} d\tau, \quad \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{P_2(\tau, \tau \log \tau)}{\tau} d\tau,$$

s'annulent pour $\tau = 0$, ce qui démontre l'existence d'une asymptote verticale.

Pour une étude approfondie du point considéré ainsi que des autres points singuliers, nous renvoyons le lecteur aux mémoires cités à la page 1.

B) *Mouvement dans un milieu à densité variable.* — Pour donner une idée générale du chemin suivi dans l'étude des points singuliers des intégrales du mouvement dans un milieu de densité variable, nous considérerons le mouvement vertical descendant en admettant

que la densité varie comme e^{-kh} , h étant l'altitude au-dessus d'un horizon donné.

En dirigeant l'axe positif des y suivant la verticale descendante, les équations du mouvement seront

$$(32) \quad \frac{dy'}{g - cF(y')e^{ky}} = \frac{dy}{y'} = dt,$$

qu'on peut écrire en posant

$$r_i = e^{-ky},$$

sous la forme suivante

$$(33) \quad \begin{cases} g r_i - cF(y') = -\frac{dr_i}{k y' r_i^2} = \frac{dt}{r_i}, \\ \frac{dy}{dt} = y'. \end{cases}$$

L'intégration de ce système est lié à l'intégration de l'équation.

$$(34) \quad \frac{dy'}{g r_i - cF(y')} = -\frac{dr_i}{k y' r_i^2},$$

Nous nous proposons d'étudier les points singuliers de cette équation correspondant à la condition

$$\begin{cases} k y' r_i^2 = 0, \\ g r_i - cF(y') = 0, \end{cases}$$

en supposant qu'autour de $y' = 0$ la fonction de résistance $cF(y')$ est de la forme

$$(35) \quad cF(y') = a_m y'^m + a_{m+1} y'^{m+1} + \dots,$$

avec $m \geq 1$ et $a_m > 0$. Dans ce cas nous avons le point singulier

$$y' = 0, \quad r_i = 0.$$

L'équation (34) admet l'intégrale banal $r_i = 0$. Étudions les autres courbes intégrales (y', η) aboutissant au point singulier. Dans le cas de densité constante nous avons pu déterminer le caractère analytique des intégrales dans le domaine complexe. Dans le cas présent nous nous contenterons d'étudier les intégrales réelles dans le premier quadrant ($y' > 0$, $\eta > 0$) du plan (y', η) .

La courbe C définie par l'équation

$$C \equiv g r_i - cF(y') = 0,$$

partage ce quadrant du plan au voisinage de l'origine des coordonnées en deux parties. Dans la partie entre C et l'axe positif de η le quotient différentiel $\frac{dy'}{d\eta}$ est négatif tandis qu'il est positif dans la partie entre C et l'axe positif de y' . Toute courbe intégrale qui passe par un point de la première partie traverse la courbe C et pénètre dans la seconde partie. D'autre part sur toute courbe intégrale qui passe par un point de la première partie y' va en décroissant avec η et comme dans le voisinage de l'origine il n'y a pas un autre point singulier que l'origine même la courbe intégrale, ne pouvant pas couper l'axe des y' , qui est une courbe intégrale, ailleurs qu'à l'origine aboutit à l'origine.

Pour nous rendre un meilleur compte du caractère de ces courbes intégrales nous tâcherons d'intégrer l'équation (34) par une intégrale de la forme

$$(36) \quad y' = u\eta,$$

ce qui conduit à l'équation

$$(37) \quad \frac{d\eta}{du} = -g - \frac{ku\eta^3}{u\eta} + \frac{cF(u\eta)}{u\eta} + ku^2\eta^2.$$

d'où l'on conclut que l'intégrale η s'annulant pour $u = 0$ est $\eta \equiv 0$.

Cherchons les intégrales η qui s'annulent pour $u = u_0$, différent de zéro **et fini**.

En écrivant (37) sous la forme :

$$(38) \quad \frac{d\eta}{du} = -g - \frac{ku\eta^3}{a_m u^m \eta^{m-1} - (a_{m+1} \eta^m u^{m+1} + \dots) + ku^2 \eta^2}.$$

on voit de suite que, pour $m \geq 2$, le second membre de cette équation est une fonction holomorphe de η et u pour $\eta = 0$, $u = u_0$ et par conséquent on n'a que l'intégrale unique $\eta = 0$.

Pour $m = 1$ on aura

$$(39) \quad \frac{d\eta}{du} = -g - a_1 u - \frac{ku\eta^3}{(a_2 u^2 \eta + a_3 u^3 \eta^2 + \dots) + ku^2 \eta^2}.$$

Cette équation n'admet une intégrale η , autre que $\eta = 0$, s'annulant pour $u = u_0$ que si

$$(40) \quad u_0 = \frac{g}{a_1}.$$

Pour trouver cette intégrale, nous poserons

$$(41) \quad u = u_0 + \varepsilon.$$

ce qui conduit à l'équation

$$(42) \quad r_1 \frac{d\varepsilon}{dr_1} = \frac{a_1^2}{kg} \varepsilon + \frac{ga_2}{a_1 k} r_1 + \dots$$

C'est une équation du type traité par M. Ivar BENDIXSON. Le point $\varepsilon = 0$, $\eta = 0$ en est un nœud et toute courbe intégrale passant par un point (ε_0, η_0) suffisamment près de l'origine aboutit à l'origine.

Ainsi nous avons étudié toutes les courbes intégrales de l'équation (34) aboutissant à l'origine ($y' = 0$, $\eta = 0$) avec une tangente déterminée qui n'est pas parallèle à l'axe des y' , c'est-à-dire avec une tangente pour laquelle la limite de

$$\frac{y'}{r_1}$$

est une quantité finie. Pour étudier les courbes intégrales (y' , η) pour lesquelles la limite de ce rapport est infinie, nous ferons la substitution

$$r_1 = \xi y'^m,$$

qui conduit à l'équation :

$$(43) \quad \xi m \left[\frac{cF(y')}{y'^m} - g\xi - \frac{k}{m} \xi y'^2 \right] = -y' \left[\frac{cF(y')}{y'^m} - g\xi \right].$$

Comme pour $y' = 0$ le rapport $\frac{cF(y')}{y'^m}$ tend vers une limite finie et différente de zéro, on n'a pas une autre intégrale ξ tendant vers zéro avec y' que l'intégrale $\xi \equiv 0$.

De même on ne peut pas avoir des intégrales ξ tendant, pour $y' = 0$, vers une valeur finie ξ_0 que si l'on avait

$$(44) \quad \xi_0 = \frac{a_m}{g}.$$

Pour étudier ces intégrales nous ferons la substitution

$$(45) \quad \xi = \xi_0 + \varepsilon = \frac{a_{m+1}y' + a_{m+2}y'^2 + \dots}{g},$$

qui conduit à l'équation.

$$(46) \quad \left\{ \begin{aligned} y' \frac{d\varepsilon}{dy'} &= m\varepsilon[a_m - \varepsilon + y'(a_{m+1} + a_{m+2}y' + \dots)] \\ &- \frac{k}{g}y'[a_m - \varepsilon + y'(a_{m+1} + a_{m+2}y' + \dots)]^2 + y'\varepsilon[a_{m+1} + 2a_{m+2}y' + \dots] \\ &= \Phi(\varepsilon, y'). \end{aligned} \right.$$

Nous montrerons que cette équation a une intégrale ε s'annulant avec y' .

Pour arriver à ce résultat considérons, dans le plan des (ε, y') la ligne C dont l'équation est

$$\Phi(\varepsilon, y') = 0.$$

Cette ligne qui passe par l'origine des coordonnées admet l'axe des y' pour tangente et reste au-dessus de cet axe pour des petites valeurs positives de y' .

Soit maintenant (ε_1, y_1') un point de C, choisi près de l'origine de façon que cette courbe ne coupe les côtés du rectangle formé par les axes et par les lignes

$$\varepsilon = \varepsilon_1, \quad y' = y_1',$$

qu'à l'unique point (ε_1, y_1') et qu'aucune ligne à l'intérieur de ce rectangle, parallèle aux axes, n'est tangente à la ligne C. Ce rectangle est divisé par la courbe C en deux régions : 1^o) la région au-dessus de la courbe C où l'on a $\Phi(\varepsilon, y') > 0$ et 2^o) la région au-dessous de la courbe C où $\Phi(\varepsilon, y') < 0$.

Toute courbe intégrale qui passe par un point de C traverse cette courbe, puisque les points de C, autres que l'origine, sont des points ordinaires des courbes intégrales lesquelles en ces points ont des tangentes horizontales.

Les courbes intégrales qui passent par un point de la seconde région ($\Phi < 0$) traversent la courbe C et pénètrent dans la première région. En effet, le coefficient angulaire $\frac{d\varepsilon}{dy'}$, étant négatif dans la seconde région, ε va en croissant quand y' va en décroissant et par conséquent toute courbe intégrale de cette région coupe la courbe C et pénètre dans la première région quand y' va en décroissant.

Enfin toutes les courbes intégrales de la première région aboutissent à l'origine. En effet, ici, le coefficient angulaire $\frac{d\varepsilon}{dy'}$ est positif et fini.

Par conséquent ε va en décroissant avec y' , sans que la courbe intégrale puisse couper ou toucher la courbe C. D'autre part, comme le rectangle considéré et ses contours ne contiennent d'autre point singulier que l'origine et comme $y' = 0$ est une intégrale de l'équation considéré, les courbes intégrales de la région examinée ne peuvent pas couper l'axe des ε en dehors de l'origine ni converger vers un point différent de l'origine quand y' va en décroissant. Par conséquent toutes les courbes intégrales aboutissent à l'origine.

On voit de même que toute courbe intégrale qui passe par un point $\varepsilon_2 < 0$, $y_2' > 0$, suffisamment rapproché de l'origine ne peut pas aboutir à l'origine. En effet pour ces points on a

$$\Phi(\varepsilon, y') < 0, \quad \frac{d\varepsilon}{dy'} > 0,$$

et par conséquent $|\varepsilon|$ va en croissant quand y' tend vers zéro par des valeurs positives. Ainsi chaque intégrale du rectangle ci-dessus aboutit à l'origine. Ces intégrales contiennent une constante arbitraire.

On a ainsi :

$$\begin{aligned} \varepsilon &= f(y') \quad \text{avec} \quad f(+0) = 0, \\ \left. \begin{aligned} \psi &= -\frac{\varepsilon}{g} + \frac{y'}{k}(a_{m+1} + a_{m+2}y' + \dots) = \psi(y'), \quad \text{avec} \quad \psi(+0) = 0, \\ \xi &= \frac{a_m}{g} + \psi(y'), \\ \eta &= \xi y'^m = \left[\frac{a_m}{g} + \psi(y') \right] y'^m. \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

L'étude des autres points singuliers et des points singuliers dans le cas général de mouvement courviligne conduit à des équations qu'on peut considérer comme des équations généralisées du type étudié par M. I. BENDIXSON. Pour cette étude nous renvoyons le lecteur à nos publications dans le *Mémorial de l'Artillerie française*.

Conférences faites à l'Institut HENRI-POINCARÉ le 22, 29 Janvier et le 5 Février 1931.