

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

S. FOURATI

Représentation des mesures par des fonctionnelles additives entre deux temps

Annales de l'I. H. P., section B, tome 31, n° 3 (1995), p. 527-544

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1995__31_3_527_0>

© Gauthier-Villars, 1995, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Représentation des mesures par des fonctionnelles additives entre deux temps

par

S. FOURATI

RÉSUMÉ. – Le but de cette note est d'établir qu'étant donné un processus de Markov X , et pour certains intervalles stochastiques I , on peut associer à toute mesure μ sur l'espace d'états, qui ne charge pas les ensembles « I -polaires », une « fonctionnelle additive droite » B essentiellement unique, vérifiant l'égalité

$$\forall f \quad \mu(f) = \mathbf{E} \left[\int_I f(X_s) dB_s \right].$$

En application, nous en déduirons l'inégalité suivante

$$\mathbf{E}^a[L_T^a] \leq \frac{e}{e-1} \min_{0 < \lambda < +\infty} \left\{ \frac{1 + \lambda \mathbf{E}^a[T] + \frac{\lambda^2}{2} \mathbf{E}^a[T^2]}{\psi(\lambda)} \right\}.$$

L_T^a représente la valeur prise par le temps local associé à un point régulier a en un temps aléatoire T (qui n'est pas nécessairement un temps d'arrêt!)

et la fonction ψ est définie par $1/\psi(\lambda) = \mathbf{E}^a \left[\int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} dL_s^a \right]$.

1. NOTATIONS ET RAPPELS

On se donne un processus droit de semi-groupe de transition (P_t) sur un espace de Radon $\mathbb{E}$, $X = (\Omega, \mathcal{G}^1, \mathcal{G}_t^1, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ (au sens de Sharpe [S] page 38 par exemple), et on fixe définitivement une probabilité $\mathbf{P} = \mathbf{P}^{\mu_0}$ sur $(\Omega, \mathcal{G}^1)$. Nous supposons (P_t) borélien ⁽¹⁾. On suppose aussi que $\mathcal{G}^1$ se décompose de la manière suivante : $\mathcal{G}^1 = \mathcal{G} \vee \sigma(\zeta^1)$ où $\mathcal{G}$ est une tribu contenant la famille de variables $(X_t)_{t \geq 0}$ et ζ^1 est une variable aléatoire, indépendante de $\mathcal{G}$, de loi exponentielle de paramètre 1 sous $\mathbf{P}$, et telle que $\zeta^1 \circ \theta_t(\omega) = \zeta^1(\omega) - t$ si $t \in [0, \zeta^1(\omega)[$ et $= -\infty$ sinon.

Dans toute la suite, les temps, les parties de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$, les variables aléatoires, processus, mesures aléatoires ... seront notés sans indices ⁽¹⁾ s'ils sont $\mathcal{G}$ ou $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{G}$ -mesurables, cet indice ⁽¹⁾ sera réservé aux objets dépendants éventuellement de ζ^1 .

On augmente $\mathbb{E}$ d'un point cimetière δ , on note $\mathbb{E}^1$ l'espace obtenu, et on désigne par $X^1 = (X_t^1)$ le processus à valeurs dans $\mathbb{E}^1$, obtenu en tuant X en ζ^1 .

On note pour tout $t \in [0, +\infty[$, $\mathcal{F}_t$ et $\mathcal{F}_t^1$ les tribus $\sigma(X_s; s \leq t)^+$ et $\sigma(X_s^1; s \leq t)^+$ respectivement, et $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^1$ désigneront les tribus $\bigvee_t \mathcal{F}_t$ et $\bigvee_t \mathcal{F}_t^1$.

Les fonctions mesurables de $\mathbb{E}$ ou de $\mathbb{E}^1$ (notées f, g ou f^1, g^1), les variables aléatoires réelles (z ou z^1), les processus mesurables réels (Z, Y ou $Z^1, Y^1 \dots$) sont toujours supposés *positifs ou nuls et prennent éventuellement la valeur $+\infty$* .

1) *La tribu du futur $\mathcal{H}^1$*

On note $\mathcal{H}^1$ la tribu sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$:

$$\mathcal{H}^1 = \sigma(z^1 \circ \theta.; z^1 \in \mathcal{F}^1)$$

Azéma [A] a montré que si on « retourne » $\mathcal{H}^1$ au temps ζ^1 , on obtient une tribu prévisible, on peut donc étendre la « théorie générale des processus » à $\mathcal{H}^1$: Le théorème suivant regroupe les propriétés de la tribu $\mathcal{H}^1$ obtenues de cette manière et qu'on utilisera dans la suite.

On rappelle d'abord qu'un *temps de retour de $\mathcal{H}^1$* (appelé temps de retour algébrique coprévisible par Azéma) est un temps à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{-\infty\}$ dont le graphe $\llbracket \tau^1 \rrbracket$ est inclus dans $\llbracket 0, \zeta^1 \rrbracket$ et tel que l'intervalle stochastique $\llbracket 0, \tau^1 \rrbracket$ est dans $\mathcal{H}^1$.

⁽¹⁾ Partant d'un semi-groupe droit, on peut toujours le supposer borélien quitte à remplacer la topologie initiale sur $\mathbb{E}$ par la topologie de Ray (cf. Sharpe [S]).

THÉORÈME I.1 (Azéma [A]).

$$\forall Z^1, \quad \exists Y^1 \in \mathcal{H}^1,$$

unique à une indistinguabilité près et noté $h^1(Z^1)$, tel que :

$$(1) \quad Y^1 = 0 \text{ hors de } \llbracket 0, \zeta^1 \rrbracket \text{ et } \forall \tau^1 \text{ temps de retour de } \mathcal{H}^1, \\ \mathbf{E}[Z_{\tau^1}^1 1_{\tau^1 > -\infty}] = \mathbf{E}[Y_{\tau^1}^1 1_{\tau^1 > -\infty}].$$

$\forall A^1(\omega, ds) = dA_s^1(\omega)$ mesure aléatoire telle que :

$$(t, \omega) \rightarrow A^1(\omega, [t \wedge \zeta^1, \zeta^1]) \in \mathcal{H}^1 \quad \text{et} \quad \mathbf{E}[A^1(\omega, [0, \zeta^1])] < +\infty :$$

$$(2) \quad \mathbf{E} \left[\int_0^{\zeta^1} Z_s^1 dA_s^1 \right] = \mathbf{E} \left[\int_0^{\zeta^1} h^1(Z^1)_s dA_s^1 \right]$$

Identifiant toute variable aléatoire z^1 au processus $Z_t^1(\omega) = z^1(\omega) \quad \forall t, \omega$, on a :

(3) Si z^1 est intégrable alors le processus $h^1(z^1)$ admet une version à valeurs finies.

$$(4) \quad \mathbf{E} \left[\max_{0 \leq s < \zeta^1} h^1(z^1)_s \right] \leq \frac{e}{e-1} (1 + \mathbf{E}[z^1 \text{Log}^+ z^1])$$

[Pour les points 3 et 4, il suffira de constater que le processus $(M_{(\zeta^1-t)^+})$, obtenu en retournant et en régularisant à droite le processus $M = h^1(z^1)$, est une martingale arrêtée en ζ^1 , on applique alors des résultats connus de la théorie des martingales (cf. [DM 2] par exemple).]

2) Propriété de Markov et commutation des projections

La propriété de Markov forte de X^1 s'écrit :

$$\forall z^1 \in \mathcal{F}^1, \quad \exists g^1 \text{ tel que :}$$

$$\forall T^1 \text{ temps d'arrêt de } (\mathcal{F}_t^1)_{t \geq 0}, \quad \mathbf{E}[z^1 \circ \theta_{T^1} 1_{T^1 < +\infty}] = \mathbf{E}[g^1(X_{T^1}^1) 1_{T^1 < +\infty}]$$

g^1 est la fonction définie par $g^1(x) = P^{1x}(z^1)$, où $(P^{1x}; x \in \mathbb{E}^1)$ est le noyau sur $(\Omega, \mathcal{F}^1)$, borélien, naturellement associé à X^1 . On note $\mathcal{O}^1$ la tribu optionnelle associée à la filtration $(\mathcal{F}_t^1)$ et $o^1(Z^1)$ la projection optionnelle du processus Z^1 , la propriété de Markov précédente donne :

$$\forall Z^1 \in \mathcal{H}^1, \quad \exists g^1 \text{ tel que } o^1(Z^1) = g^1(X^1) \text{ en particulier } o^1(Z^1) \in \mathcal{H}^1.$$

Et ceci implique la commutation des projections sur $\mathcal{O}^1$ et $\mathcal{H}^1$, c'est-à-dire :

THÉORÈME I.2 (Azéma [A]).

$$\forall Z^1, \quad \exists g^1 \text{ tel que } {}^{o^1 h^1}(Z^1) = {}^{h^1 o^1}(Z^1) = g^1(X^1)$$

Pour tout cela il faudra se reporter à Azéma [A] ou à [FL].

Cette dernière propriété est la seule conséquence de la propriété de Markov qu'on retiendra pour la suite ⁽²⁾.

On appelle *fonctionnelle additive droite*, en abrégé F.A.D une famille de mesures sur $\mathbb{R}_+$ $\{A(\omega, ds) = dA_s(\omega); \omega \in \Omega\}$ vérifiant les propriétés suivantes :

$$\forall t, u, v \in \mathbb{R}_+; \quad \forall \omega; \quad A(\theta_t(\omega), [u, v]) = A(\omega, [u+t, v+t]).$$

$$\omega \longrightarrow A(\omega, [u, v]) \text{ est mesurable pour la tribu } \overline{\mathcal{F}}_{[u, v[} \text{ } ^{(3)}$$

Note terminologique : Le terme « fonctionnelle additive » désigne habituellement dans la littérature un processus croissant, on l'emploie ici pour des mesures aléatoires dont le processus croissant associé n'est pas nécessairement fini. Dans le cas où ce processus croissant est fini, cette définition est celle des fonctionnelles additives « droites » d'Azéma [A] et appelées « gauches » par Meyer [M].

Il est facile de voir que si A est une F.A.D telle que la variable aléatoire $A(\omega, [0, \zeta^1])$ est intégrable, alors le processus $A(\omega, [0, t \wedge \zeta^1])$ est indistinguable d'un processus $\mathcal{O}^1$ -mesurable et, le processus $A(\omega, [t \wedge \zeta^1, \zeta^1])$ est indistinguable d'un processus $\mathcal{H}^1$ -mesurable. A l'aide d'une propriété connue de la projection optionnelle et de la propriété correspondante de la projection sur $\mathcal{H}^1$ (point 2 du théorème I.1), on en déduit le fait suivant :

si A est une F.A.D telle que $\mathbf{E}[A(\omega, [0, \zeta^1])] < +\infty$ alors :

$$\forall Z^1, \quad \mathbf{E} \left[\int_0^{\zeta^1} Z_s^1 dA_s \right] = \mathbf{E} \left[\int_0^{\zeta^1} {}^{o^1 h^1}(Z^1)_s dA_s \right] \quad (i)$$

On généralise cette propriété aux F.A.D A vérifiant la propriété suivante :

$\exists f > 0$ tel que $\mathbf{E} \left[\int_0^{\zeta^1} f(X_s) dA_s \right] < +\infty$. Il suffit pour cela de l'appliquer à la F.A.D $A' = f(X).A$.

⁽²⁾ On pourrait donc étendre la suite aux mesures de Kuznetsov à la manière de [F].

⁽³⁾ $\overline{\mathcal{F}}_{[u, v[}$ désigne l'intersection des $\mathbf{P}^\mu$ -complétées de la tribu $\sigma(X_s; s \in [u, v])$ où μ parcourt toutes les mesures de probabilité sur $\mathbf{E}$.

Dans toute la suite, on n'emploiera le terme fonctionnelle additive droite que pour celles vérifiant cette propriété d'intégrabilité.

3) *Ensembles polaires, intervalles stochastiques, représentation des mesures sur $\mathbb{E}$ par des F.A.D.*

On se donne maintenant un *intervalle stochastique* $\mathbb{I}$, c'est-à-dire une partie de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ telle que pour tout ω , la coupe en ω , noté $\mathbb{I}(\omega)$, est un intervalle de $\mathbb{R}_+$ (borné ou non, fermé ou non à droite et à gauche). On suppose que $\mathbb{I}$ est $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{G}$ -mesurable (il est indépendant de ζ^1 !).

On dira d'une partie F de $\mathbb{E}$ qu'elle est *$\mathbb{I}$ -polaire* si l'ensemble $\{\omega; \exists t \in \mathbb{I}(\omega) \text{ tel que } X_t(\omega) \in F\}$ est négligeable pour P .

Si $\mathbb{I} = \mathbb{R}_+ \times \Omega$, on dira simplement que F est *polaire*.

On note $\mathbb{I}^1$ l'intervalle stochastique $\mathbb{I}^1 = \mathbb{I} \cap \llbracket 0, \zeta^1 \rrbracket$. Le symbole $\mathcal{N}$ désigne la famille des ensembles *évanescents*, c'est-à-dire les parties D de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ telle que $\{\omega; \exists t \text{ tel que } (t, \omega) \in D\}$ est P -négligeable. Voici quelques remarques élémentaires sur la polarité : F étant une partie de $\mathbb{E}$ (elle ne contient pas $\delta!$)

F est polaire $\implies F$ est $\mathbb{I}$ -polaire

F est polaire $\iff \{X \in F\} = \{(s, \omega); X_s(\omega) \in F\} \in \mathcal{N}$

F est $\mathbb{I}$ -polaire $\iff \{X \in F\} \cap \mathbb{I} \in \mathcal{N}$

F est polaire $\iff F$ est $\llbracket 0, \zeta^1 \rrbracket$ -polaire

F est $\mathbb{I}$ -polaire $\iff F$ est $\mathbb{I}^1$ -polaire

On dira que $\mathbb{I}$ vérifie la propriété $(*)$ si

Pour toute mesure μ sur $\mathbb{E}$, finie, ne chargeant pas les ensembles $\mathbb{I}$-polaires, il existe une F.A.D. B telle que (*) $\forall f \in \mathcal{E} : \quad \mu(f) = \mathbb{E} \left[\int_1 f(X_s) dB_s \right]$ Et, Si B et D sont deux F.A.D. vérifiant l'égalité (*) alors l'ensemble $\{\omega; \text{les mesures } dB_s(\omega) \text{ et } dD_s(\omega) \text{ sont différentes sur } \mathbb{I}(\omega)\}$ est négligeable pour P.	$\left. \vphantom{\int_1} \right\} (*)$
--	---

On dira de B qu'elle représente μ sur $\mathbb{I}$ si la propriété (*) est vérifiée. Le résultat suivant est maintenant bien connu :

THÉORÈME I.3 (Azéma [A]). — Pour toute mesure finie sur $\mathbb{E}$, μ , ne chargeant pas les ensembles polaires de $\mathbb{E}$, il existe une F.A.D, A , telle que

$$\forall f, \quad \mu(f) = \mathbf{E} \left[\int_0^{\zeta^1} f(X_s) dA_s \right]$$

La F.A.D A représente μ sur $]0, \zeta^1[$. Et, si A' en est une autre, alors l'événement

$\{\omega; \text{les mesures } dA_s(\omega) \text{ et } dA'_s(\omega) \text{ sont différentes}\}$ est négligeable pour $\mathbf{P}$.

2. UNE CNS POUR LA PROPRIÉTÉ (*)

On note f_1 une fonction borélienne de $\mathbb{E}$, $f_1(\delta) = 0$, telle que :

$$f_1(X^1) = o^1 h^1 (e^s 1_{\mathbb{I}^1}),$$

LEMME II.1.

$$\forall f, \quad \forall B \text{ F.A.D}, \quad \mathbf{E} \left[\int_1 f(X_s) dB_s \right] = \mathbf{E} \left[\int_0^{\zeta^1} f(X_s) f_1(X_s) dB_s \right]$$

Démonstration. — Pour toute f , l'égalité (i) appliquée à la F.A.D B et au processus $Z^1 = e^s 1_{\mathbb{I}^1}$ nous donne

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[\int_0^{\zeta^1} f(X_s) f_1(X_s) dB_s \right] &= \mathbf{E} \left[\int_0^{\zeta^1} f(X_s) e^s 1_{\mathbb{I}^1} dB_s \right] \\ &= \mathbf{E} \left[\int_1 f(X_s) e^s 1_{s < \zeta^1} dB_s \right]. \end{aligned}$$

Et, en conditionnant par $\mathcal{G}$, on obtient

$$= \mathbf{E} \left[\int_1 f(X_s) e^s e^{-s} dB_s \right] = \mathbf{E} \left[\int_1 f(X_s) dB_s \right] \quad \text{c.q.f.d.}$$

On note (**) la propriété suivante

$$\begin{aligned} \text{L'ensemble } C &= \{f_1 = 0 \text{ ou } +\infty\} \\ &= \{x \in \mathbb{E}; f_1(x) = 0 \text{ ou } +\infty\} \text{ est I-polaire.} \quad (**) \end{aligned}$$

Et f_1^{-1} désigne la fonction à valeurs positives et finies :

$$f_1^{-1} = \frac{1}{f_1} 1_C$$

THÉORÈME II.2. — *Les propriétés (*) et (**) sont équivalentes; et, si ces propriétés sont vérifiées et μ est une mesure finie sur E ne chargeant pas les ensembles $\mathbb{I}$ -polaires, alors on a l'implication :*

La F.A.D.A représente μ sur $\llbracket 0, \zeta^1 \rrbracket \implies$ la F.A.D. $B = f_1^{-1}(X).A$ représente μ sur $\mathbb{I}$.

Démonstration. — $(*) \Rightarrow (**)$: Supposons (*) vraie et l'ensemble C non $\mathbb{I}$ -polaire, le théorème de section mesurable (cf. [DM 1]) fournit un temps U tel que

$$\llbracket U \rrbracket \subset \{X \in C\} \cap \mathbb{I} \text{ et } \mathbf{P}(U < +\infty) \in]0, 1].$$

On définit alors une mesure μ par $\mu(f) = \mathbf{E}[f(X_U)1_{U < +\infty}]$, et pour $f = 1_C$, on obtient

$$\mu(C) = \mathbf{P}(U < +\infty) \in]0, 1].$$

D'autre part, il est clair que μ ne charge pas les ensembles $\mathbb{I}$ -polaires, la propriété (*) et le lemme II.1 impliquent l'existence d'une F.A.D. B telle que :

$$\mu(f) = \mathbf{E}\left[\int_1 f(X_s)dB_s\right] = \mathbf{E}\left[\int_0^{\zeta^1} f(X_s)f_1(X_s)dB_s\right].$$

On applique cette égalité à la fonction $f = 1_C$ après avoir remarqué que la variable aléatoire :

$$z(\omega) = \int_0^{\zeta^1(\omega)} 1_{\{X_s(\omega) \in C\}} f_1(X_s(\omega)) dB_s(\omega)$$

prend ses valeurs dans $\{0, +\infty\}$, on obtient :

$$\mu(C) = \mathbf{E}[z] \in \{0, +\infty\},$$

d'où la contradiction.

(**) $\Rightarrow$ (*) : μ étant une mesure finie quelconque ne chargeant pas les ensembles $\mathbb{I}$ -polaires, a fortiori, elle ne charge pas les ensembles polaires ; Soit A la F.A.D. la représentant sur $\llbracket 0, \zeta^1 \llbracket$ (théorème 1.3), on pose $B = f_1^{-1}(X).A$; on a les égalités pour toute f

$$\mathbf{E} \left[\int_0^{\zeta^1} f(X_s) f_1(X_s) dB_s \right] = \mathbf{E} \left[\int_0^{\zeta^1} f(X_s) f_1(X_s) f_1^{-1}(X_s) dA_s \right] \\ = \mu(f f_1 f_1^{-1}).$$

Mais, lorsque (**) est vraie, l'ensemble $\{f_1^{-1} f_1 \neq 1\} = C$ est $\mathbb{I}$ -polaire ; il n'est donc pas chargé par μ , et le dernier terme vaut $\mu(f)$.

On applique d'abord cela à la fonction $f = 1$, on obtient

$$\mathbf{E} \left[\int_0^{\zeta^1} f_1(X_s) dB_s \right] = \mu(1).$$

On pose ensuite : $f' = f_1 + 1_{\{f_1=0\}}$, $f' > 0$ et la mesure dB_s ne chargeant pas l'ensemble $\{s; f_1(X_s) = 0\}$ par définition, on obtient

$$\mathbf{E} \left[\int_0^{\zeta^1} f'(X_s) dB_s \right] = \mathbf{E} \left[\int_0^{\zeta^1} f_1(X_s) dB_s \right] = \mu(1) < +\infty :$$

B vérifie la propriété d'intégrabilité requise.

Le lemme II.1 donne alors, pour toute f

$$\mathbf{E} \left[\int_{\mathbb{I}} f(X_s) dB_s \right] = \mathbf{E} \left[\int_0^{\zeta^1} f(X_s) f_1(X_s) dB_s \right] = \mu(f) :$$

B représente μ sur $\mathbb{I}$.

Reste établir la partie unicité de la propriété (*). Soient B et D deux F.A.D. représentant μ sur $\mathbb{I}$; on a les égalités

$$\mu(f) = \mathbf{E} \left[\int_{\mathbb{I}} f(X_s) dB_s \right] = \mathbf{E} \left[\int_0^{\zeta^1} f(X_s) f_1(X_s) dB_s \right], \\ \mu(f) = \mathbf{E} \left[\int_{\mathbb{I}} f(X_s) dD_s \right] = \mathbf{E} \left[\int_0^{\zeta^1} f(X_s) f_1(X_s) dD_s \right].$$

Les F.A.D. $f_1(X).B$ et $f_1(X).D$ représentent donc μ sur $\llbracket 0, \zeta^1 \llbracket$. De l'unicité de cette représentation, on déduit que l'événement

$$N_1 = \{\omega; \text{les mesures } f_1(X_s(\omega)) dB_s(\omega) \text{ et } \\ f_1(X_s(\omega)) dD_s(\omega) \text{ sont différentes}\}$$

est négligeable. D'autre part, d'après la propriété (**), l'événement

$$N_2 = \{\omega; \exists s \in \mathbb{I}(\omega) \text{ tel que } f_1(X_s(\omega)) = 0 \text{ ou } +\infty\} \text{ l'est aussi.}$$

Pour $\omega \notin N_1 \cup N_2$, les mesures $dB_s(\omega)$ et $dD_s(\omega)$ sont égales sur $\mathbb{I}(\omega)$. c.q.f.d.

3. POLARITÉ DE L'ENSEMBLE $\{f_1 = 0\}$ ET CAS TRANSIENT

Nous allons montrer que l'ensemble $\{f_1 = 0\}$ est $\mathbb{I}$ -polaire lorsque $\mathbb{I}$ est un intervalle stochastique ouvert $]U, V[$ où U et V sont des temps quelconques et, un peu plus généralement, pour les intervalles stochastiques décrits comme suit

On dira que $\mathbb{I}$ est de la forme $(\mathcal{I})$ si $\mathbb{I}^1 = \mathbb{I} \cap]0, \zeta^1[$ se décompose de la manière suivante

$$\begin{aligned} \mathbb{I}^1 &=]W^1[+ \left(]U'^1[+]U^1, V^1[+]V'^1[\right) \text{ avec :} \\ & \\ & \begin{aligned}]W^1[&\subset (\cup_n]T_n^1[) \cap (\cup_n]\tau_n^1[) \\ W^1 &= +\infty \text{ et } U^1 < V^1 \text{ sur } U^1 < +\infty \\]U'^1[&\subset]U^1[\cap (\cup_n]T_n'^1[) \\]V'^1[&\subset]V^1[\cap (\cup_n]\tau_n'^1[) \end{aligned} \\ & \text{où les } T_n^1 \text{ et les } T_n'^1 \text{ sont des temps d'arrêt de } (\mathcal{F}_t^1)_{t \geq 0}, \\ & \text{où les } \tau_n^1 \text{ et les } \tau_n'^1 \text{ sont des temps de retour de } \mathcal{H}^1. \end{aligned} \tag{\mathcal{I}}$$

On établira le lemme de « théorie générale » suivant en appendice

LEMME III.1. — Si $\mathbb{I}$ est de la forme $(\mathcal{I})$ et Z^1 est un processus mesurable positif alors les implications suivantes sont vraies

$$\{Z^1 = 0\} \cap \mathbb{I}^1 \in \mathcal{N} \implies \{o^1 Z^1 = 0\} \cap \mathbb{I}^1 \in \mathcal{N}$$

$$\{Z^1 = 0\} \cap \mathbb{I}^1 \in \mathcal{N} \implies \{h^1 Z^1 = 0\} \cap \mathbb{I}^1 \in \mathcal{N}$$

PROPOSITION III.2. — Si $\mathbb{I}$ est de la forme $(\mathcal{I})$ alors l'ensemble $\{f_1 = 0\}$ est $\mathbb{I}$ -polaire.

Démonstration. — La deuxième implication du lemme appliquée au processus $Z^1 = e^s 1_{\mathbb{I}^1}$ donne

$$\{h^1(e^s 1_{\mathbb{I}^1}) = 0\} \cap \mathbb{I}^1 \in \mathcal{N}.$$

Puis la première implication appliquée à $Z^1 = h^1(e^s 1_{\mathbb{I}^1})$ donne :

$$\{f_1(X) = o^1 h^1(e^s 1_{\mathbb{I}^1}) = 0\} \cap \mathbb{I}^1 \in \mathcal{N};$$

Autrement dit, $\{f_1 = 0\}$ est $\mathbb{I}^1$ -polaire et $\mathbb{I}$ -polaire.

COROLLAIRE III.3. – $\mathbb{J}$ et $\mathbb{I}$ étant deux intervalles stochastiques $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{G}$ -mesurables quelconques, l'implication suivante est vraie

$$\left. \begin{array}{l} \mathbb{J} \subset \mathbb{I} \\ \mathbb{J} \text{ est de la forme } (\mathcal{I}) \\ \mathbb{I} \text{ vérifie la propriété } (*) \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbb{J} \text{ vérifie la propriété } (*)$$

Démonstration. – On pose : $\mathbb{J}^1 = \mathbb{J} \cap \llbracket 0, \zeta^1 \rrbracket$ et $f_1^j(X) = {}^{o^1}h^1(e^s 1_{\mathbb{J}^1})$. D'après la proposition précédente, on a l'implication

$$\mathbb{J} \text{ est de la forme } (\mathcal{I}) \Rightarrow \{f_1^j = 0\} \text{ est } \mathbb{J}\text{-polaire.} \quad (1)$$

D'autre part

$$\mathbb{J} \subset \mathbb{I} \Rightarrow \{f_1^j(X) \not\leq f_1(X)\} \in \mathcal{N} \Rightarrow \{f_1^j \not\leq f_1\} \text{ est polaire (et } \mathbb{I}\text{-polaire).}$$

Et d'après le théorème II.2

$$\mathbb{I} \text{ vérifie la propriété } (*) \Rightarrow \{f_1 = +\infty\} \text{ est } \mathbb{I}\text{-polaire.}$$

On en déduit la suite d'implications

$$\left. \begin{array}{l} \mathbb{J} \subset \mathbb{I} \\ \mathbb{I} \text{ vérifie la propriété } (*) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \{f_1^j \not\leq f_1\} \text{ est } \mathbb{I}\text{-polaire} \\ \{f_1 = +\infty\} \text{ est } \mathbb{I}\text{-polaire} \\ \Rightarrow \{f_1^j = +\infty\} \text{ est } \mathbb{I}\text{-polaire.} \end{array} \right. \quad (2)$$

Le théorème II.2 permet alors de déduire de (1) et (2) l'implication cherchée.

Lorsque X est transient, l'intervalle stochastique $\mathbb{I} = \mathbb{R}_+ \times \Omega$ vérifie la propriété $(*)$ (cf. [F] par exemple), on en déduit le corollaire suivant

COROLLAIRE III.4. – Si X est transient et $\mathbb{J}$ est un intervalle stochastique de la forme $(\mathcal{I})$ alors $\mathbb{J}$ vérifie la propriété $(*)$.

4. CAS GÉNÉRAL

THÉORÈME IV.1. – On suppose que $\mathbb{I} = \llbracket 0, T \rrbracket$, on a les implications suivantes

$$\mathbb{E}[T] < +\infty \text{ et } T \text{ est un temps d'arrêt} \Rightarrow \mathbb{I} \text{ vérifie la propriété } (*)$$

$$\mathbb{E}[T^2] < +\infty \Rightarrow \mathbb{I} \text{ vérifie la propriété } (*)$$

Démonstration. – Soit $I = \llbracket 0, T \rrbracket$, I est de la forme $(\mathcal{I})$ et d'après la proposition III.2 cela entraîne que l'ensemble $\{f_1 = 0\}$ est I -polaire. Reste à vérifier que l'ensemble $\{f_1 = +\infty\}$ l'est aussi, on va en fait vérifier la propriété un peu plus forte suivante

Le processus $f_1(X^1) = {}^{o^1}h^1(e^s 1_{I^1})$ admet une version finie; l'ensemble $\{f_1 = +\infty\}$ est donc polaire et a fortiori I -polaire.

On majorera à deux reprises le processus $e^s 1_{I^1}$ par la variable aléatoire $e^{T \wedge \zeta^1}$.

1) Si T est un temps d'arrêt, $e^s 1_{I^1} \in \mathcal{O}^1$, d'où :

$$f_1(X^1) = {}^{o^1}h^1(e^s 1_{I^1}) = {}^{h^1}o^1(e^s 1_{I^1}) = {}^{h^1}(e^s 1_{I^1}) \leq {}^{h^1}(e^{T \wedge \zeta^1}).$$

Pour que ce dernier membre admette une version finie il suffit, d'après la propriété (3) du théorème I.1, que $e^{T \wedge \zeta^1}$ soit intégrable. Vérifions que c'est une conséquence de l'intégrabilité de T

$$\mathbf{E}[e^{T \wedge \zeta^1}] = \mathbf{E}\left[\int_0^{T \wedge \zeta^1} e^s ds + 1\right] = \mathbf{E}\left[\int_0^T 1_{s < \zeta^1} e^s ds + 1\right].$$

En conditionnant par $\mathcal{G}$, on obtient

$$= \mathbf{E}\left[\int_0^T e^{-s} e^s ds + 1\right] = \mathbf{E}[T] + 1.$$

2) T étant quelconque, on pose $\overline{M} = \max_{0 \leq s < \zeta^1} {}^{h^1}(e^{T \wedge \zeta^1})_s$. On a la suite d'inégalités

$${}^{o^1}h^1(e^s 1_{I^1}) \leq {}^{o^1}h^1(e^{T \wedge \zeta^1}) \leq {}^{o^1}(\overline{M}).$$

Pour que ce dernier membre admette une version finie il suffit, d'après les propriétés (3) et (4) du théorème I.1, que $\overline{M}$ soit intégrable, et donc que $e^{T \wedge \zeta^1} T \wedge \zeta^1$ le soit. Vérifions que c'est une conséquence de l'intégrabilité de T^2 :

$$\mathbf{E}[e^{T \wedge \zeta^1} T \wedge \zeta^1] = \mathbf{E}\left[\int_0^{T \wedge \zeta^1} (1+s)e^s ds\right] = \mathbf{E}\left[\int_0^T 1_{s < \zeta^1} (1+s)e^s ds\right]$$

Et en conditionnant par $\mathcal{G}$:

$$= \mathbf{E}\left[\int_0^T e^{-s} (1+s)e^s ds\right] = \mathbf{E}\left[T + \frac{T^2}{2}\right].$$

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier qu'en appliquant le théorème précédent au processus de Markov $(X_{S+t})_{t \geq 0}$ au lieu de X , on obtient le corollaire suivant

COROLLAIRE IV.2. — *On convient que $(+\infty) - (+\infty) = 0$ et on suppose que $\mathbb{I} = \llbracket S, T \llbracket$ $S \leq T$, on a les implications suivantes*

$$\begin{aligned} S \text{ et } T \text{ sont des temps d'arrêt et } \mathbf{E}[T - S] < +\infty \\ \implies \mathbb{I} \text{ vérifie la propriété } (*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S \text{ est un temps d'arrêt et } \mathbf{E}[(T - S)^2] < +\infty \\ \implies \mathbb{I} \text{ vérifie la propriété } (*) \end{aligned}$$

Remarque. — Lorsque S n'est pas un temps d'arrêt, on ne peut rien dire en général. Voici un exemple d'intervalle stochastique ouvert $\mathbb{I} = \llbracket S, T \llbracket$ qui ne vérifie pas la propriété $(*)$ et pour lequel $T - S = 1$, et T est même un temps d'arrêt :

On suppose que X est un mouvement brownien réel issu de 0, on note L le temps local en 0. On choisit une variable aléatoire z , $\sigma(X_s; 0 \leq s \leq 1)$ -mesurable, finie et positive, non intégrable, et on pose

$$T = \inf\{t \geq 2; L_t - L_{t-1} \geq z\}, \quad S = T - 1.$$

T est un temps d'arrêt fini, $L_T - L_S = z$ ps et donc $\mathbf{E}[L_T - L_S] = +\infty$. Supposons que $\mu = \delta_0$ est représentée sur $\llbracket S, T \llbracket$ par une fonctionnelle additive qu'on note B , quitte à remplacer B par $1_{\{X=0\}}B$, on peut supposer dB_s portée par l'ensemble $\{s; X_s = 0\}$, B est donc un multiple de L : $dB_s = a dL_s$ avec $a > 0$, et $1 = \delta_0(\mathbb{E}) = \mathbf{E}\left[\int_{\llbracket S, T \llbracket} dB_s\right] = a\mathbf{E}[L_T - L_S]$, d'où la contradiction.

5. APPLICATION AUX TEMPS LOCAUX

Soit a un point de $\mathbf{E}$ tel que le singleton $\{a\}$ n'est pas polaire et L^a la F.A.D représentant δ_a sur $\llbracket 0, \zeta^1 \llbracket$; L^a est définie par la formule :

$$\forall f, \quad f(a) = \delta_a(f) = \mathbf{E}\left[\int_0^{\zeta^1} f(X_s) dL_s^a\right] = \mathbf{E}\left[\int_0^{+\infty} f(X_s) e^{-s} dL_s^a\right].$$

On a en particulier

$$1 = \delta_a(\mathbf{E}) = \mathbf{E} \left[\int_0^{\zeta^1} dL_s^a \right] = \mathbf{E} \left[\int_0^{+\infty} e^{-s} dL_s^a \right].$$

Si a est un point régulier et $\mathbf{P} = \mathbf{P}^a$, L^a est diffuse et appelée temps local en a (cf. Sharpe [S]). Dans tous les cas la mesure sur $\mathbb{R}_+$, $dL_s^a(\omega)$, est portée par l'ensemble $\{s; X_s(\omega) = a\}$ ($\mathbf{P}$ -ps).

On reprend les notations du I.

PROPOSITION V.1. – Pour tout intervalle stochastique $\mathbb{I}$, on a l'égalité

$$\mathbf{E} \left[\int_{\mathbb{I}} dL_s^a \right] = f_1(a).$$

Démonstration. – On applique le lemme II.1 à la F.A.D $B = L^a$ et à la fonction $f = 1$, on obtient

$$\mathbf{E} \left[\int_{\mathbb{I}} dL_s^a \right] = \mathbf{E} \left[\int_0^{\zeta^1} f_1(X_s) dL_s^a \right] = f_1(a) \mathbf{E} \left[\int_0^{\zeta^1} dL_s^a \right] = f_1(a)$$

THÉORÈME V.2. – Si T est un temps quelconque, $\mathbf{P} = \mathbf{P}^a$, et ψ est la fonction définie par : $1/\psi(\lambda) = \mathbf{E}^a \left[\int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} dL_s^a \right]$, alors l'inégalité suivante est vérifiée

$$\mathbf{E}^a[L_{T-}^a] \leq \frac{e}{e-1} \min_{0 < \lambda < +\infty} \left\{ \frac{1 + \lambda \mathbf{E}^a[T] + \frac{\lambda^2}{2} \mathbf{E}^a[T^2]}{\psi(\lambda)} \right\}.$$

Démonstration. – On pose ici $\mathbb{I} = \llbracket 0, T \rrbracket$, on a

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^a[L_{T-}^a] &= f_1(a) = f_1(X_0) = {}^{o^1}h^1(e^s 1_{\mathbb{I}^1})_0 \\ &= \mathbf{E}^a[h^1(e^s 1_{\mathbb{I}^1})_0 / \mathcal{F}_0] = \mathbf{E}^a[h^1(e^s 1_{\mathbb{I}^1})_0] \leq \mathbf{E}^a \left[\max_{0 \leq s < \zeta^1} h^1(e^{T \wedge \zeta^1})_s \right]. \end{aligned}$$

On applique ensuite l'inégalité (4) du théorème I.1. à la variable aléatoire $e^{T \wedge \zeta^1}$ et le fait, établi dans la démonstration du théorème IV.1 : $\mathbf{E}^a[e^{T \wedge \zeta^1} T \wedge \zeta^1] = \mathbf{E}^a[T] + \frac{1}{2} \mathbf{E}^a[T^2]$, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^a[L_{T-}^a] &\leq \mathbf{E}^a \left[\max_{0 \leq s < \zeta^1} h^1(e^{T \wedge \zeta^1})_s \right] \leq \frac{e}{e-1} (1 + \mathbf{E}^a[e^{T \wedge \zeta^1} T \wedge \zeta^1]) \\ &= \frac{e}{e-1} (1 + \mathbf{E}^a[T] + \frac{1}{2} \mathbf{E}^a[T^2]). \end{aligned}$$

On peut remplacer dans tout ce qui précède le temps ζ^1 par un temps ζ^λ de loi exponentielle de paramètre λ , la F.A.D L^a est remplacée par une F.A.D. $L^{a,\lambda}$ définie par

$$\begin{aligned} \forall f, \quad f(a) = \delta_a(f) &= \mathbf{E}^a \left[\int_0^{\zeta^\lambda} f(X_s) dL_s^{a,\lambda} \right] \\ &= \mathbf{E}^a \left[\int_0^{+\infty} f(X_s) e^{-\lambda s} dL_s^{a,\lambda} \right]. \end{aligned}$$

On a encore

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^a[L_{T-}^{a,\lambda}] &\leq \frac{e}{e-1} (1 + \mathbf{E}^a[e^{\lambda(T \wedge \zeta^\lambda)} \lambda(T \wedge \zeta^\lambda)]) \\ &= \frac{e}{e-1} (1 + \lambda \mathbf{E}^a[T] + \frac{\lambda^2}{2} \mathbf{E}^a[T^2]). \end{aligned}$$

D'autre part, la F.A.D L^a étant toujours définie par la propriété :

$$\forall f, \quad f(a) = \mathbf{E}^a \left[\int_0^{+\infty} f(X_s) e^{-s} dL_s^a \right], \text{ on a}$$

$$\begin{aligned} \forall f, \quad \psi(\lambda) \mathbf{E}^a \left[\int_0^{\zeta^\lambda} f(X_s) dL_s^a \right] \\ &= \psi(\lambda) f(a) \mathbf{E}^a \left[\int_0^{\zeta^\lambda} dL_s^a \right] \\ &= \psi(\lambda) f(a) \mathbf{E}^a \left[\int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} dL_s^a \right] = f(a) = \delta_a(f) \end{aligned}$$

$\psi(\lambda)L^a$ représente donc δ_a sur $\llbracket O, \zeta^\lambda \rrbracket$, de l'unicité de cette représentation, on déduit qu'elle est égale à $L^{a,\lambda}$ ($\mathbf{P}^a$ -ps) et on obtient l'inégalité cherchée.

On pourra consulter [DM 4] page 275 pour une expression analytique de la fonction ψ faisant intervenir le potentiel du processus de Markov.

Appendice

Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, on note $\mathcal{N}$ la famille des parties évanescences de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$, et on se donne une filtration continue à droite quelconque $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, on note $\mathcal{O}$ et $\mathcal{P}$ les tribus optionnelle et prévisible associées, le symbole Z désigne un processus mesurable positif quelconque

dont on note ${}^o Z$ et ${}^p Z$ les projections optionnelle et prévisible. Nous allons démontrer les propositions suivantes :

PROPOSITION. – Si W est un temps tel que $\llbracket W \rrbracket \subset \cup_n \llbracket T_n \rrbracket$ où les T_n sont des temps d'arrêt (resp. des temps d'arrêt prévisibles), on a l'implication

$$\{Z = 0\} \cap \llbracket W \rrbracket \in \mathcal{N} \implies \{{}^o Z = 0\} \cap \llbracket W \rrbracket \in \mathcal{N}$$

et respectivement

$$\{Z = 0\} \cap \llbracket W \rrbracket \in \mathcal{N} \implies \{{}^p Z = 0\} \cap \llbracket W \rrbracket \in \mathcal{N}.$$

PROPOSITION. – Soit $\mathbb{I}$ un intervalle stochastique de la forme suivante :
 $\mathbb{I} = \llbracket U' \rrbracket + \llbracket U, V \rrbracket + \llbracket V' \rrbracket$ avec

$$U < V \text{ sur } U < +\infty$$

$$\llbracket V' \rrbracket \subset \llbracket V \rrbracket$$

$$\llbracket U' \rrbracket \subset \llbracket U \rrbracket \cap (\cup_n \llbracket T_n \rrbracket) \text{ où les } T_n \text{ sont des temps d'arrêt}$$

(resp. sont des temps d'arrêt prévisibles)

alors on a l'implication

$$\{Z = 0\} \cap \mathbb{I} \in \mathcal{N} \implies \{{}^o Z = 0\} \cap \mathbb{I} \in \mathcal{N}.$$

et respectivement,

$$\{Z = 0\} \cap \mathbb{I} \in \mathcal{N} \implies \{{}^p Z = 0\} \cap \mathbb{I} \in \mathcal{N}.$$

Reprenant les notations de III, on obtient la première implication du lemme III.1 en appliquant ces deux propositions à la tribu optionnelle $\mathcal{O}^1$. Puis, pour la deuxième implication, on pourra utiliser la remarque d'Azéma [A] prouvant que la tribu retournée de $\mathcal{H}^1$ en ζ^1 est une tribu prévisible ou bien remarquer que le résultat de la proposition se généralise à une « tribu du passé » quelconque et donc à une « tribu du futur » par symétrie et $\mathcal{H}^1$ est une tribu du futur ! (cf. [FL])

Démonstration de la première proposition. – La propriété $\{Z = 0\} \cap \llbracket W \rrbracket \in \mathcal{N}$ s'écrit encore $Z_W > 0$ sur $\{W < +\infty\}$ (ps). Sous les hypothèses prises, on a

$$\begin{aligned} {}^o Z_W 1_{W < +\infty} &= \sum_n {}^o Z_{T_n} 1_{T_n = W < +\infty} \\ &= \sum_n \mathbf{E}[Z_{T_n} 1_{T_n < +\infty} / \mathcal{F}_{T_n}] 1_{T_n = W < +\infty}. \end{aligned} \quad (\text{ps})$$

Et il est bien connu que l'ensemble $\{\mathbf{E}[Z_{T_n} 1_{T_n < +\infty} / \mathcal{F}_{T_n}] > 0\}$ contient (ps) $\{Z_{T_n} 1_{T_n < +\infty} > 0\}$, on en déduit que :

$$\begin{aligned} & \{^{\circ}Z_W > 0\} \cap \{W < +\infty\} \\ &= \cup_n (\{\mathbf{E}[Z_{T_n} 1_{T_n < +\infty} / \mathcal{F}_{T_n}] > 0\} \cap \{T_n = W < +\infty\}) \\ &\supset \cup_n (\{Z_{T_n} 1_{T_n < +\infty}\} \cap \{T_n = W < +\infty\}) \\ &= \{Z_W > 0\} \cap \{W < +\infty\} \\ &= \{W < +\infty\} \end{aligned} \quad (\text{ps})$$

La même démonstration est valable pour la tribu prévisible.

Démonstration de la deuxième proposition. – Montrons la propriété concernant la tribu optionnelle. On fixe un processus Z tel que $\{Z = 0\} \cap \mathbb{I} \in \mathcal{N}$, on notera plutôt cette propriété $\{Z > 0\} \supset \mathbb{I}$ en omettant dans cette notation que cette inclusion est vraie à un ensemble évanescant près. La proposition précédente donne l'inclusion

$$\{^{\circ}Z > 0\} \supset \llbracket U' \rrbracket \quad (1)$$

On décompose ensuite $\llbracket V' \rrbracket$ de la manière suivante : $\llbracket V' \rrbracket = \llbracket V^1 \rrbracket + \llbracket V^2 \rrbracket$ où les temps V^1 et V^2 sont des temps tels que le graphe de V^1 soit inclus dans une réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt et, pour tout temps d'arrêt T , $\mathbf{P}(V^2 = T < +\infty) = 0$ (cf. [DM 1]). La proposition précédente donne encore l'inclusion

$$\{^{\circ}Z > 0\} \supset \llbracket V^1 \rrbracket. \quad (2)$$

Montrons maintenant l'inclusion $\{^{\circ}Z > 0\} \supset \llbracket U, V \rrbracket$, on pose

$$\forall q \in \mathbb{Q}, \quad T_q = \inf\{t \geq q; ^{\circ}Z_t = 0\},$$

les T_q sont des temps d'arrêt. On pose ensuite en utilisant le théorème de section (cf. [DM 1]) et pour tout rationnel q :

$$\forall \varepsilon, \eta > 0, \quad T_q^{\varepsilon, \eta} \text{ est un temps d'arrêt tel que :}$$

$$\llbracket T_q^{\varepsilon, \eta} \rrbracket \subset \{^{\circ}Z = 0\} \cap \llbracket T_q, T_q + \eta \rrbracket$$

avec

$$\mathbf{P}(T_q < +\infty) < \mathbf{P}(T_q^{\varepsilon, \eta} < +\infty) + \varepsilon$$

En particulier : $\mathbf{P}(U < T_q < T_q + \eta < V) < \mathbf{P}(U < T_q^{\varepsilon, \eta} < V) + \varepsilon$.
On a d'autre part :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[Z_{T_q^{\varepsilon, \eta}} 1_{U < T_q^{\varepsilon, \eta} < V}] &= \mathbf{E}[{}^o(Z1)_{U, V}]_{T_q^{\varepsilon, \eta}} 1_{T_q^{\varepsilon, \eta} < +\infty}] \\ &\leq \mathbf{E}[{}^o Z_{T_q^{\varepsilon, \eta}} 1_{T_q^{\varepsilon, \eta} < +\infty}] = 0.\end{aligned}$$

Comme $\{Z > 0\} \supset]U, V[$ par hypothèse, $Z_{T_q^{\varepsilon, \eta}}$ est strictement positif sur $\{U < T_q^{\varepsilon, \eta} < V\}$, et on en déduit

$$\begin{aligned}P(U < T_q^{\varepsilon, \eta} < V) &= 0 \text{ et } P(U < T_q < T_q + \eta < V) < \varepsilon \quad (\forall \varepsilon, \eta) \\ \text{d'où } P(U < T_q < V) &= 0.\end{aligned}$$

Il est ensuite facile de voir que $\cup_q \{U < T_q < V\} = \{\omega; \exists t \in]U(\omega), V(\omega)[\text{ tel que } {}^o Z_t(\omega) = 0\}$. Cet événement est donc négligeable. D'où l'inclusion

$$\{^o Z > 0\} \supset]U, V[\quad (3)$$

Reste à établir l'inclusion $\{^o Z > 0\} \supset [V^2]$; pour cela on pose $W = \inf\{t > U; {}^o Z_t = 0\}$. Il est alors clair que : $[W] \subset \cup_q [T_q]$. Et donc $P(W = V^2 < +\infty) = 0$. D'autre part, on constate facilement l'implication $V^2 < +\infty$ et ${}^o Z_{V^2} = 0 \Rightarrow W = V^2 < +\infty$, on en déduit que ${}^o Z_{V^2} > 0$ sur $\{V^2 < +\infty\}$ (ps) et l'inclusion

$$\{^o Z > 0\} \supset [V^2] \quad (4)$$

Les inclusions (1), (2), (3) et (4) donnent le résultat cherché pour la tribu optionnelle.

Pour la partie concernant la tribu prévisible, on peut adapter la démonstration précédente. On suppose maintenant $\mathbb{I}$ de la forme donnée dans l'énoncé de la proposition concernant la tribu prévisible. La première proposition donne encore l'inclusion

$$\{^p Z > 0\} \supset [U']. \quad (i)$$

On décompose ensuite $[V']$ de la manière suivante : $[V'] = [V^3] + [V^4]$ où les temps V^3 et V^4 sont des temps tels que le graphe de V^3 soit inclus dans une réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt *prévisibles* et, pour tout temps d'arrêt *prévisible* S , $P(V^4 = S < +\infty) = 0$. La première proposition nous donne aussi l'inclusion :

$$\{^p Z > 0\} \supset [V^3]. \quad (ii)$$

On pose ensuite

$$\forall q \in \mathbb{Q}, \quad S_q = \inf\{t \geq q; {}^pZ_t = 0\},$$

les S_q sont des temps d'arrêt. Il faut remarquer alors l'égalité : $\{{}^pZ = 0\} \cap \llbracket S_q, S_q + \varepsilon \llbracket = \{{}^pZ = 0\} \cap \llbracket q, S_q + \varepsilon \llbracket$. Et donc cet ensemble est prévisible et on peut appliquer le théorème de section prévisible pour définir

$\forall q \in \mathbb{Q}, \quad \forall \varepsilon, \eta > 0, \quad S_q^{\varepsilon, \eta}$ est un temps d'arrêt *prévisible* tel que :

$$\llbracket S_q^{\varepsilon, \eta} \rrbracket \subset \{{}^pZ = 0\} \cap \llbracket S_q, S_q + \eta \llbracket \text{ et } P(S_q < +\infty) < P(S_q^{\varepsilon, \eta} < +\infty) + \varepsilon.$$

Puis on continue comme avant pour établir l'inclusion

$$\{{}^pZ > 0\} \supset \llbracket U, V \llbracket \quad (\text{iii})$$

Ensuite on pose $\widetilde{W} = \inf\{t > U; {}^pZ = 0\}$, on a $\llbracket \widetilde{W} \rrbracket \subset \cup_q(\llbracket S_q \rrbracket)$ et

$$\llbracket \widetilde{W} \rrbracket \cap \{{}^pZ = 0\} \subset \cup_q(\llbracket S_q \rrbracket \cap \{{}^pZ = 0\}) = \cup_q(\llbracket q, S_q \rrbracket \cap \{{}^pZ = 0\}).$$

Ce dernier ensemble est prévisible et à coupes dénombrables; c'est donc une réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt prévisibles, on en déduit que $P(\widetilde{W} = V^4 < +\infty) = 0$, on obtient alors comme précédemment l'inclusion

$$\{{}^pZ > 0\} \supset \llbracket V^4 \rrbracket. \quad (\text{iv})$$

Les inclusions (i), (ii), (iii) et (iv) donnent le résultat cherché.

RÉFÉRENCES

- [A] J. AZÉMA, Théorie générale des processus et retournement du temps, *Annales scientifiques de l'E.N.S.*, 4^e série, 1973, p. 459-519.
- [DM1], [DM2], [DM4] C. DELLACHERIE et P.-A. MEYER, *Probabilités et potentiel*, Tomes 1, 2 et 4, Hermann.
- [FL] S. FOURATI et E. LENGART, Tribus homogènes et commutation des projections, *Séminaire de Probabilités XXI, Lect. N. in Maths*, Springer-Verlag, 1247, 1987.
- [F] S. FOURATI, *Une propriété de Markov pour les processus indexés par $\mathbb{R}$* , à paraître.
- [M] MEYER, Les travaux d'Azéma sur le retournement du temps, *Séminaire de Probabilités VIII, L.N. in Maths*, Springer-Verlag, 381, 1974.
- [S] M. SHARPE, *General Theory of Markov Processes*, Academic Press.

(Manuscrit reçu le 14 mars 1993;
révisé octobre 1993.)