ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

GÉRARD LORANG
BERNARD ROYNETTE

Un théorème de Schilder pour des fonctionnelles browniennes non régulières

Annales de l'I. H. P., section B, tome 29, nº 4 (1993), p. 513-530
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1993__29_4_513_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 29, n° 4, 1993, p. 513-530. *Probabilités et Statistiques*

Un théorème de Schilder pour des fonctionnelles browniennes non régulières

par

Gérard LORANG et Bernard ROYNETTE

Université de Nancy-I,
Département de Mathématiques,
URA 750, B.P. 239,
54506 Vandœuvre-les-Nancy Cedex,
France.

RÉSUMÉ. – Soit $f:[0, 1] \to \mathbb{R}$ höldérienne d'indice α $\left(\text{avec } f(0)=0 \text{ et } 0<\alpha<\frac{1}{2}\right)$ et $\varphi_f(g)=\|g-f\|_\alpha$, où $\| \ \|_\alpha$ désigne une norme équivalente à la norme höldérienne classique. On établit un théorème du type Schilder pour φ_f, *i.e.* on trouve un équivalent, quand $\varepsilon \to 0$, de $E\left(\exp -\frac{1}{2\varepsilon}\varphi_f(\sqrt{\varepsilon}\, B)\right)$ où B est un mouvement brownien linéaire. Cet équivalent dépend, de façon qualitative, du fait que f est « proche ou non » de l'origine.

ABSTRACT. – Let $f:[0, 1] \to \mathbb{R}$ be a α-hölderian function $\left(\text{with } f(0)=0 \text{ and } 0<\alpha<\frac{1}{2}\right)$ and $\varphi_f=\|g-f\|_\alpha$, where $\| \ \|_\alpha$ is a norm equivalent to the usual hölderian norm. We prove a Schilder theorem for φ_f, *i.e.* we find an equivalent, as $\varepsilon \to 0$, of $E\left(\exp -\frac{1}{2\varepsilon}\varphi_f(\sqrt{\varepsilon}\, B)\right)$ where B is a linear

---

Classification A.M.S. : 60 F 10, 60 J 65.

brownian motion. This equivalent depends, in a qualitative manner, on the "distance" between f and the origin.

0. INTRODUCTION

Soit $B_t\,(0 \leqq t \leqq 1)$ un mouvement brownien linéaire. Ses trajectoires sont des éléments de $\mathscr{C}_0$, l'espace des fonctions continues sur [0, 1], nulles en 0, que l'on munit de la norme de la topologie uniforme. Un théorème de Varadhan [1] affirme que pour toute fonction $\phi : \mathscr{C}_0 \to \mathbf{R}$, continue et minorée, on a :

$$\varepsilon \operatorname{Log} E\left(\exp - \frac{1}{2\varepsilon} \phi(\sqrt{\varepsilon} B)\right) \underset{\varepsilon \downarrow 0}{\rightarrow} - \frac{I(\phi)}{2}$$

où

$$I(\phi) = \inf_{\psi \in \mathscr{C}_0} \left[\int_0^1 \dot{\psi}^2(s)\, ds + \phi(\psi) \right] \tag{0.1}$$

Par ailleurs, Schilder [2] a prouvé que si ϕ est de classe $\mathscr{C}^2$ (et sous des hypothèses convenables) on peut faire mieux que (1), *i.e.* obtenir un équivalent non pas de $\operatorname{Log}\left(E\left(\exp - \frac{1}{2\varepsilon} \phi(\sqrt{\varepsilon} B\right)\right)$, mais de $E\left(\exp - \frac{1}{2\varepsilon} \phi(\sqrt{\varepsilon} B)\right)$:

$$E\left(\exp - \frac{1}{2\varepsilon} \phi(\sqrt{\varepsilon} B)\right) \underset{\varepsilon \downarrow 0}{\sim} C\, \varepsilon^{s/2} \exp - \frac{I(\phi)}{2\varepsilon} \tag{0.2}$$

où s est un entier.

On se propose ici d'établir un théorème du type Schilder pour une classe de fonctions ϕ qui ne sont pas de classe $\mathscr{C}^2$. Plus précisément, soit $f : [01] \to \mathbf{R}$ höldérienne d'indice α (avec $f(0) = 0$ et $0 < \alpha < 1/2$) et $\phi_f(g) = \| g - f \|_\alpha$ (où la norme $\| . \|_\alpha$ n'est pas tout à fait la norme höldérienne classique, mais une norme équivalente définie ci-dessous). Il n'est pas difficile de voir que les fonctions ϕ_f ne sont pas de classe $\mathscr{C}^2$ puisqu'elles possèdent des lignes de niveau qui sont des « cubes de dimension infinie » et qui ont donc des « coins » (*cf.* alinéa 1). Nous donnons ici cependant un équivalent de $E\left(\exp - \frac{1}{2\varepsilon} \phi_f(\sqrt{\varepsilon} B)\right)$ quand ε tend vers 0, et nous constatons que le comportement de cette espérance dépend, de façon qualitative, du fait que f est proche ou éloignée (en un sens précisé ultérieurement) de 0; bien sûr, les comportements asymptotiques précis que nous obtenons dans ce papier dépendent de façon déterminante de la norme utilisée: deux normes équivalentes ne donnent pas lieu aux mêmes comportements.

I. RAPPELS ET NOTATIONS

1) Pour $\alpha \in]0, 1[$, $\mathscr{C}_\alpha$ désigne l'espace des fonctions höldériennes d'indice α sur $[0, 1]$, nulles en 0. $\mathscr{C}_\alpha$ est un espace de Banach muni de la norme:

$$|x|_\alpha = \sup_{0 \leqq t \neq s \leqq 1} \frac{|x(t) - x(s)|}{|t-s|^\alpha}$$

2) $\mathscr{C}_\alpha^0$ désigne le sous-espace fermé et séparable de $\mathscr{C}_\alpha$ formé des fonctions x vérifiant la condition supplémentaire:

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \sup_{\substack{|t-s| \leqq \delta \\ 0 \leqq t \neq s \leqq 1}} \frac{|x(t) - x(s)|}{|t-s|^\alpha} = 0$$

3) On note $(\chi_n)_{n \geqq 1}$ la base de Haar de $\mathscr{L}^2([0, 1])$ (système orthonormal complet) *i.e.* $\chi_1 \equiv 1$

$$\chi_{2^n+k}(t) = \begin{cases} 2^{n/2} & \text{si} \quad t \in \left[\dfrac{k-1}{2^n}, \dfrac{k-1/2}{2^n}\right[\\ -2^{n/2} & \text{si} \quad t \in \left[\dfrac{k-1/2}{2^n}, \dfrac{k}{2^n}\right[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

pour $n = 0, 1, 2, \ldots; k = 1, 2, 3, \ldots, 2^n$.

4) On note $(\phi_n)_{n \geqq 1}$ les fonctions de Schauder *i.e.* les primitives des fonctions de Haar:

$$\phi_n(t) = \int_0^t \chi_n(s)\, ds \qquad (0 \leqq t \leqq 1)$$

5) Ciesielski [3] a prouvé que les espaces $\mathscr{C}_\alpha^0$ et c_0 (c_0 désigne l'espace des suites réelles tendant vers 0 à l'infini) sont isomorphes par l'application:

$$\mathrm{T}^\alpha : c_0 \to \mathscr{C}_\alpha^0$$

$$\eta = (\eta_n)_{n \geqq 1} \mapsto \mathrm{T}^\alpha(\eta) = \sum_1^\infty \eta_n \varphi_n^\alpha$$

où $\varphi_n^\alpha := n^{(1/2)-\alpha} \varphi_n$. (Notons que l'isomorphisme T^α diffère de celui de Ciesielski par des modifications mineures). On posera pour la suite

$\gamma=\frac{1}{2}-\alpha$ et on utilisera $\|x\|_\alpha:=\sup_{n\geq 1}|\eta_n|$ où $x=\sum_{n=1}^{\infty}\eta_n\varphi_n^\alpha$ comme norme équivalente à la norme höldérienne classique.

II. ÉTUDE DE $E\left(\exp-\frac{1}{2\varepsilon}\phi_f(\sqrt{\varepsilon}B)\right)$ QUAND f EST « LOIN » DE L'ORIGINE

Soit

$$f\in\mathscr{C}_\alpha^0 \quad \left(0<\alpha<\frac{1}{2}\right)$$

s'écrivant d'après l'alinéa précédent $f=\sum_{n=1}^{\infty}\eta_n\varphi_n^\alpha$. Nous allons établir le théorème suivant:

THÉORÈME 1. — *Supposons que*

$$\frac{1}{2}<\sum_{n=1}^{\infty}|\eta_n|n^{2\gamma}<+\infty. \tag{2.1}$$

(i.e. *f est « éloignée de l'origine »*). *Alors il existe un entier* σ (*dépendant de f et dont la valeur sera précisée ultérieurement*) *tel que*

$$E\left(\exp-\frac{1}{2\varepsilon}\phi_f(\sqrt{\varepsilon}B)\right)\underset{\varepsilon\downarrow 0}{\sim}C\varepsilon^{\sigma/2}\exp-\frac{I(f)}{2\varepsilon}$$

où

$$I(f)=\inf_{\psi\in\mathscr{C}_\alpha^0}\left[\int_0^1\dot{\psi}^2(s)\,ds+\|\psi-f\|_\alpha\right] \tag{2.2}$$

(*ainsi, dans cette situation, on obtient un comportement analogue à celui du théorème de Schilder*).

Démonstration. — Suivant le théorème de P. Lévy, on peut écrire le mouvement brownien B sous la forme:

$$B_t(\omega)=\sum_{n=1}^{\infty}g_n(\omega)\varphi_n(t) \tag{2.3}$$

où $(g_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires gaussiennes centrées, réduites, indépendantes. De plus, on sait que B appartient p.s. à tout $\mathscr{C}_\alpha^0$ pour $0<\alpha<1/2$. On a donc:

$$\phi_f(\sqrt{\varepsilon}B)=\sup_{n\geq 1}|\sqrt{\varepsilon}g_n n^{-\gamma}-\eta_n|$$

Quitte à remplacer g_n par $-g_n$ chaque fois que $\eta_n<0$, on peut supposer que pour tout n, $\eta_n \geqq 0$. C'est ce que nous ferons dans la suite.

Calculons :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}\left(\exp -\frac{1}{2\varepsilon}\|\sqrt{\varepsilon}\,\mathrm{B}-f\|_\alpha\right)\\
&\quad=\mathrm{E}\left(\exp -\frac{1}{2}\sup_{n\geqq 1}|\sqrt{\varepsilon}\,g_n n^{-\gamma}-\eta_n|\right)\\
&\quad=\lim_{k\to+\infty}\mathrm{E}\left(\exp -\frac{1}{2\varepsilon}\sup_{1\leqq n\leqq k}|\sqrt{\varepsilon}\,g_n n^{-\gamma}-\eta_n|\right)\\
&\quad=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{(2\pi)^{k/2}}\iint\dots\int_{\mathbf{R}^k}\exp\left\{-\frac{1}{2\varepsilon}\sup_{1\leqq n\leqq k}|\sqrt{\varepsilon}\,y_n n^{-\gamma}-\eta_n|-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k}y_n^2\right\}dy\\
&\quad=\lim_{k\to\infty}\frac{\prod_{n=1}^{k}n^{\gamma}}{(2\pi\varepsilon)^{k/2}}\iint\dots\int_{\mathbf{R}^k}\exp -\frac{1}{2\varepsilon}\\
&\qquad\qquad\times\left[\sup_{1\leqq n\leqq k}|x_n-\eta_n|+\sum_{n=1}^{k}x_n^2 n^{2\gamma}\right]dx \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

Nous sommes donc amenés à considérer les fonctions

$$\Lambda_k(x)=\sup_{1\leqq n\leqq k}|\eta_n-x_n|+\sum_{n=1}^{k}x_n^2 n^{2\gamma} \qquad (2.5)$$

où k est un entier $\geqq 1$ et nous nous intéressons au minima de ces fonctions (en x).

Quelques remarques élémentaires. — (2.6) Quel que soit $k\geqq 1$, Λ_k atteint son minimum en un point unique noté dorénavant $x^k\in\mathbf{R}^k$. Cela résulte du caractère convexe de la fonction $\sup_{1\leqq n\leqq k}|\eta_n-x_n|$ et du caractère strictement convexe de la fonction $\sum_{n=1}^{k}x_n^2 n^{2\gamma}$.

(2.7) Il est clair que

$$(\forall\, 1\leqq n\leqq k)\qquad 0\leqq x_n^k\leqq \eta_n$$

(2.8) De plus on se convainc aisément qu'il existe $\delta_k\in[0, \sup_{1\leqq n\leqq k}\eta_n]$ tel que

$$(\forall\, 1\leqq n\leqq k)\qquad x_n^k=(\eta_n-\delta_k)_+$$

où x_+ désigne la partie positive de $x\in\mathbf{R}$.

(2.9) D'après l'hypothèse (2.1), il existe un indice $k_0 \in \mathrm{N}$ tel que si $k \geqq k_0$ alors $\frac{1}{2} < \sum_{n=1}^{k} \eta_n n^{2\gamma}$. Montrons qu'à partir de ce rang le δ_k qui intervient dans l'écriture de x^k est strictement positif. A cet effet, calculons, pour k fixé $\geqq k_0$ et $\delta \in [0, \sup_{1 \leqq n \leqq k} \eta_n]$:

$$\begin{aligned} m(\delta) &:= \Lambda_k((\eta_1 - \delta)_+, \ldots, (\eta_k - \delta)_+) \\ &= \delta + \sum_{n \leqq k} [(\eta_n - \delta)_+]^2 n^{2\gamma} \end{aligned}$$

Remarquant que la fonction $x \mapsto (x_+)^2$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ de dérivée $x \mapsto 2x_+$, nous avons:

$$m'(\delta) = 1 - 2 \sum_{n \leqq k} (\eta_n - \delta)_+ n^{2\gamma} \tag{2.10}$$

Or $m'(0) = 1 - 2 \sum_{n \leqq k} \eta_n n^{2\gamma} < 0$ car $k \geqq k_0$ et $m'(\sup_{1 \leqq n \leqq k} \eta_n) = 1 > 0$. D'où:

$$\delta_k \in]0, \sup_{1 \leqq n \leqq k} \eta_n[$$

De plus, comme $m'(\delta_k) = 0$, on a grâce à (2.10)

$$(\forall k \geqq k_0) \sum_{n=1}^{k} x_n^k n^{2\gamma} = \frac{1}{2} \tag{2.11}$$

(2.12) Observons que la suite x^k est en fait « stationnaire »: il existe un entier $p \geqq 1$ et une suite $(x_n^0)_{n \geqq 1}$, nulle pour $n > p$ telle que

$$(\forall k \geqq p) \quad x^k = (x_1^0, \ldots, x_p^0, 0, 0, \ldots, 0)$$

En effet, il est clair que

$$\Lambda_k(x^k) \leqq \Lambda_{k+1}(x^{k+1}) \qquad (\forall k \geqq 1) \tag{2.13}$$

Ensuite, remarquons qu'il existe un plus petit entier p tel que

$$\delta_p \geqq \sup_{n > p} \eta_n \tag{2.14}$$

Sinon on aurait: $\delta_k < \sup_{n > k} \eta_n \, (\forall k \geqq 1)$ et donc $\lim_{k \to \infty} \delta_k = 0$, d'où il résulterait par la remarque (2.8) que $\lim_{k \to \infty} x_n^k = \eta_n$, pour tout $n \geqq 1$ fixé.

D'après le théorème de Lebesgue (*cf.* (2.7) et (2.1)) on aurait:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= \lim_{k \to \infty} \sum_{1}^{k} x_n^k n^{2\gamma} \qquad \text{(par (2.11))} \\ &= \sum_{1}^{\infty} \eta_n n^{2\gamma} > \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

ce qui est absurde.

(2.14) étant vraie on voit qu'avec

$$x^k=(x_1^p, \ldots, x_p^p, 0, 0, 0 \ldots 0) \qquad (k \geqq p)$$

on a bien $\Lambda_k(x^k)=\Lambda_p(x^p)$ ce qui par (2.13) achève la preuve de notre remarque (2.12).

Nous allons maintenant développer, pour $k \geqq p$, Λ_k au voisinage de son minimum. Soit $h=(h_1, \ldots, h_k)$

$$\Lambda_k(x^k-h)=\sup_{1 \leqq n \leqq k} |\eta_n - x_n^0 + h_n| + \sum_{n=1}^{k} (x_n^0 - h_n)^2 n^{2\gamma}$$

Distinguons deux types d'indices:

(*) les indices n tels que $\eta_n - x_n^0 = \delta$ (Par définition on posera $\delta := \delta_p$ et on notera Θ l'ensemble de ces indices, indépendant de $k \geqq p$)

(*) les indices n tels que $\eta_n - x_n^0 < \delta$ (Dans ce cas $x_n^0 = 0$ et $\eta_n < \delta$; on notera Θ^c cet ensemble.)

Il est facile de voir qu'on peut choisir $\rho \in [0, \delta[$ assez petit pour que si $h \in \mathscr{V}_\rho = \{ h \in \mathbf{R}^k : |h| \leqq \rho \}$ alors $\sup_{1 \leqq n \leqq k} |\eta_n - x_n^0 + h_n|$ ne dépend que des indices $n \in \Theta$.

D'où, si $h \in \mathscr{V}_\rho$ on a, d'après 2.11:

$$\left.\begin{aligned}
&\Lambda_k(x^k-h)\\
&\quad = 2 \sum_{n \in \Theta} (\sup_{m \in \Theta} (\delta + h_m) - h_n) x_n^0 n^{2\gamma}\\
&\quad + \sum_{n=1}^{k} (x_n^0)^2 n^{2\gamma} + \sum_{n=1}^{k} h_n^2 n^{2\gamma}\\
&\quad = \Lambda_k(x^k) + 2 \sum_{n \in \Theta} (\sup_{m \in \Theta} h_m - h_n) x_n^0 n^{2\gamma}\\
&\quad + \sum_{n=1}^{k} h_n^2 n^{2\gamma}
\end{aligned}\right\} \tag{2.15}$$

Un calcul semblable montre que si $h \in \mathscr{V}_\rho^c$ on a encore:

$$\Lambda_k(x^k-h)-\Lambda_k(x^k) \geqq \sum_{n=1}^{k} h_n^2 n^{2\gamma} \tag{2.16}$$

Remarquant enfin que pour $k \geqq p$

$$\begin{aligned}
\Lambda_k(x^k) &= \sup_{n \leqq \rho} |\eta_n - x_n^0| + \sum_{n \leqq p} (x_n^0)^2 n^{2\gamma}\\
&= \inf_{\psi \in \mathscr{C}_\alpha^0} \left(\| f - \psi \|_\alpha + \int_0^1 \psi^2(s)\, ds \right)\\
&= \mathrm{I}(f)
\end{aligned}$$

nous pouvons reprendre (2.4):

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}\left(\exp - \frac{1}{2\varepsilon}\|\sqrt{\varepsilon}\,\mathrm{B} - f\|_\alpha\right)\\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{\prod_{n\leq k} n^\gamma}{(2\pi\varepsilon)^{k/2}} \iint \ldots \int_{\mathbf{R}^k} \exp - \frac{1}{2\varepsilon}\Lambda_k(x)\,dx\\
&= \exp - \frac{\mathrm{I}(f)}{2\varepsilon} \lim_{k\to\infty} \frac{\prod_{n\leq k} n^\gamma}{(2\pi\varepsilon)^{k/2}} \iint \ldots \int_{\mathbf{R}^k}\\
&\quad \times \exp - \frac{1}{2\varepsilon}[\Lambda_k(x^k - h) - \Lambda_k(x^k)]\,dh
\end{aligned}$$

Intégrons successivement sur $\mathscr{V}_\rho^c$, puis sur $\mathscr{V}_\rho$.

L'intégration sur $\mathscr{V}_\rho^c$ fournit une contribution exponentiellement petite:

$$\begin{aligned}
&\lim_{k\to\infty} \frac{\prod_{n\leq k} n^\gamma}{(2\pi\varepsilon)^{k/2}} \iint \ldots \int_{\mathscr{V}_\rho^c} \exp - \frac{1}{2\varepsilon}[\Lambda_k(x^k - h) - \Lambda_k(x^k)]\,dh\\
&\leqq \lim_{k\to\infty} \frac{\prod_{n\leq k} n^\gamma}{(2\pi\varepsilon)^{k/2}} \iint \ldots \int_{\mathscr{V}_\rho^c} \exp - \frac{1}{2\varepsilon}\sum_{n=1}^{k} h_n^2 n^{2\gamma}\,dh\\
&= \lim_{k\to\infty} \mathrm{P}\left(\sup_{1\leqq n\leqq k} |g_n n^{-\gamma}| \geqq \frac{\rho}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\\
&= \mathrm{P}\left(\sup_{n\geqq 1} |g_n n^{-\gamma}| \geqq \frac{\rho}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \qquad (2.17)
\end{aligned}$$

et cette quantité est plus petite que $\exp - \frac{\mathrm{K}_\rho}{\varepsilon}$ d'après [4].

L'intégrale sur $\mathscr{V}_\rho$ se décompose en 2 facteurs, suivant que l'indice n appartient à Θ ou non. Afin de ne pas trop alourdir les notations, nous supposons simplement que $\Theta = \{1, 2, \ldots, r\}$. Pour ce qui est de

$$\begin{aligned}
&\lim_{k\to\infty} \frac{\prod_{n=r+1}^{k} n^\gamma}{(2\pi\varepsilon)^{k-r/2}} \iint_{\sup_{r<n\leqq k} |h_n| \leqq \rho} \ldots \int\\
&\qquad \times \exp - \frac{1}{2\varepsilon}\sum_{n=r+1}^{k} h_n^2 n^{2\gamma}\,dh_{r+1}\ldots dh_k\\
&\qquad\qquad = \mathrm{P}\left(\sup_{n>r} |g_n n^{-\gamma}| \leqq \frac{\rho}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \qquad (2.18)
\end{aligned}$$

cette expression tend vers 1 quand ε tend vers 0 d'après [4].

Il reste à étudier

$$\frac{\prod_{n\leq r} n^{\gamma}}{(2\pi\varepsilon)^{r/2}}\iint_{|h|=\sup_{n\leq r}|h_n|\leq\rho}\cdots\int\exp-\frac{1}{2\varepsilon}\Big\{2\sum_{n\leq r}(\sup_{m\leq r}h_m-h_n)\,x_n^0\,n^{2\gamma}+\sum_{n=1}^{r}h_n^2\,n^{2\gamma}\Big\}\,dh_1\ldots dh_r$$

Nous découpons cette intégrale en r morceaux suivant que $\sup_{m\leq r}h_m=h_1$ ou ... ou $\sup_{m\leq r}h_m=h_r$. Notons S le sous-ensemble de Θ des indices n tels que $x_n^0\neq 0$. Pour simplifier les notations, nous supposons que $S=\{1, 2, \ldots, s\}$. Alors

$$\frac{\prod_{n\leq r} n^{\gamma}}{(2\pi\varepsilon)^{r/2}}\iint_{\substack{|h|\leq\rho\\ \sup_{n\leq r}h_n=h_1}}\cdots\int\exp-\frac{1}{2\varepsilon}\Big\{2\sum_{n\leq s}(h_1-h_n)\,x_n^0\,n^{2\gamma}+\sum_{n=1}^{r}h_n^2\,n^{2\gamma}\Big\}\,dh$$

$$=\frac{\prod_{n\leq r} n^{\gamma}}{(2\pi)^{r/2}}\iint_{\substack{|h|\leq\rho/\sqrt{\varepsilon}\\ \sup_{n\leq r}h_n=h_1}}\cdots\int\exp\Big\{-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\sum_{n=2}^{s}(h_1-h_n)\,x_n^0\,n^{2\gamma}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{r}h_n^2\,n^{2\gamma}\Big\}\,dh_1\ldots dh_r$$

$$=\frac{\prod_{n\leq r} n^{\gamma}}{(2\pi)^{r/2}}\iint_{\substack{|h_1|\leq\rho/\sqrt{\varepsilon}\\ -(\rho/\sqrt{\varepsilon}\leq h_2\leq h_1\\ \cdots\cdots\\ -(\rho/\sqrt{\varepsilon}\leq h_s\leq h_1}}\cdots\int\prod_{j=s+1}^{r}\psi_j(h_1,\varepsilon)$$

$$\times\exp\Big\{-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\sum_{n=2}^{s}(h_1-h_n)\,x_n^0\,n^{2\gamma}-\frac{1}{2}\sum_{1}^{s}h_n^2\,n^{2\gamma}\Big\}\,dh_1\ldots dh_s$$

où

$$\psi_j(h_1,\varepsilon)=\int_{-(\rho/\sqrt{\varepsilon})}^{h_1}\exp\Big(-\frac{1}{2}h_j^2\,j^{2\gamma}\Big)\,dh_j$$

Avec le changement de variables

$$u_1=h_1$$

$$u_n=\frac{h_1-h_n}{\sqrt{\varepsilon}}\qquad (n=2,\ \ldots,s)$$

nous obtenons l'expression :

$$\frac{\prod_{n \leqq r} n^{\gamma}}{(2\pi)^{r/2}} \varepsilon^{(s-1)/2} \iint_{\substack{|u_1| \leqq \rho/\sqrt{\varepsilon} \\ 0 \leqq u_n \leqq u_1/\sqrt{\varepsilon} + \rho/\varepsilon \\ (n=2, \ldots, s)}} \ldots \int \prod_{j=s+1}^{r} \psi_j(u_1, \varepsilon)$$

$$\times \exp\left\{ -\sum_{2}^{s} u_n x_n^0 n^{2\gamma} - \frac{1}{2} \cdot \left[u_1^2 + \sum_{2}^{s} (u_1 - \sqrt{\varepsilon}\, u_n)^2 n^{2\gamma} \right] \right\} du_1 \ldots du_s$$

D'après le théorème de convergence dominée de Lebesuge, l'intégrale converge, quand ε tend vers 0, vers une constante.

Il en résulte que le 1[er] morceau

$$\frac{\prod_{n \leqq r} n^{\gamma}}{(2\pi\varepsilon)^{t/2}} \iint_{\substack{|h| \leqq \rho \\ \sup_{1 \leqq n \leqq r} h_n = h_1}} \ldots \int \ldots \underset{\varepsilon \to 0}{\sim} c_1 \varepsilon^{(s-1)/2} \tag{2.19}$$

Il est clair que si l'on intègre sur $\sup_{n \leqq r} h_n = h_j$ avec $1 \leqq j \leqq s$, on obtient le même comportement. Par contre, si $s < j \leqq r$, on voit aisément qu'on obtient comme équivalent $c_j \varepsilon^{s/2}$, terme négligeable par rapport à (2.19).

En résumé, si nous rassemblons les résultats (2.17), (2.18) et (2.19) nous obtenons le théorème annoncé avec $\sigma = s-1$, s étant le nombre de termes non nuls de la suite $(x_n^o)_{n \geqq 1}$.

III. ÉTUDE DE $E\left(\exp - \frac{1}{2\varepsilon} \phi_f(\sqrt{\varepsilon}\,B)\right)$ QUAND f EST « PROCHE » DE L'ORIGINE ET LINÉAIRE PAR MORCEAUX DYADIQUES

Nous avons ainsi examiné le cas où f est « loin » de l'origine. Pour le cas où f est « proche » de l'origine, nous allons supposer de plus que f est linéaire par morceaux dyadiques. Nous allons constater que le comportement de $E\left(\exp - \frac{1}{2\varepsilon} \phi_f(\sqrt{\varepsilon}\,B)\right)$ n'est plus du type « Schilder ».

f étant linéaire par morceaux, elle s'écrit maintenant $f = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n \varphi_n^{\alpha}$ où tous les η_n sont nuls sauf un nombre fini d'entre eux. Nous allons prouver le théorème suivant :

THÉORÈME 1. — *Supposons que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\eta_n| n^{2\gamma} < \frac{1}{2} \tag{3.1}$$

Soit p le nombre d'indices n tels que $\eta_n \neq 0$. Alors il existe des constantes C *et* K *telles que*

$$E\left(\exp - \frac{1}{2\varepsilon} \phi_f(\sqrt{\varepsilon} B)\right) \underset{\varepsilon \downarrow 0}{\sim} C \varepsilon^{(p/3-2\alpha)-(1/4)} \exp - \left(\frac{K\eta^2}{\varepsilon}\right)^{1/3-2\alpha} \exp - \frac{I(f)}{2\varepsilon}$$

où $\eta := \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{p} |\eta_n| n^{2\gamma}$ *et*

$$I(f) = \inf_{\psi \in \mathscr{C}_\alpha^0} \left(\|f - \psi\|_\alpha + \int_0^1 \dot{\psi}^2(s)\, ds \right) \tag{3.2}$$

Remarque 1. — Lorsque f est « proche » de l'origine, au sens où $\Sigma |\eta_n| n^{2\gamma} < 1/2$, et lorsque f n'est pas linéaire par morceaux, les techniques de démonstration du théorème 3.1 ne permettent pas d'obtenir un équivalent de $E\left(\exp - \frac{1}{2\varepsilon} \phi_f(\sqrt{\varepsilon} B)\right)$. Par contre, elles permettent l'obtention d'un encadrement de cette quantité. Plus précisément :

THÉORÈME 2. — *Supposons que* $f = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n \varphi_n^\alpha$ *appartient à* $\mathscr{C}_\alpha^0$ *et soit* $\eta = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} |\eta_n| n^{2\gamma} > 0$. *Notons* $\sigma_p = \sum_{n>p}^{\infty} |\eta_n| n^{2\gamma}$. *Soit m_p le nombre d'indices i inférieurs ou égaux à p tels que $\eta_i \neq 0$. Alors il existe deux constantes* C *et* K *telles que* :

$$C^{-1} \varepsilon^{(m_p/(3-2\alpha))-(1/4)} \exp - \left(\frac{K(\eta + 2\sigma_p)^2}{\varepsilon}\right)^{1/3-2\alpha} \exp - \frac{I(f)}{2\varepsilon}$$
$$\leqq E\left(\exp - \frac{1}{2\varepsilon} \|\sqrt{\varepsilon} B - f\|_\alpha\right)$$
$$\leqq C \varepsilon^{(m_p/(3-2\alpha))-(1/4)} \exp - \left(\frac{K\eta^2}{\varepsilon}\right)^{1/(3-2\alpha)} \exp - \frac{I(f)}{2\varepsilon}$$

Nous ne démontrerons pas le théorème 3.2 qui s'obtient par une méthode tout à fait analogue à celle utilisée pour la démonstration du théorème 3.1.

Avant de faire la démonstration du théorème 3.1, indiquons le corollaire suivant, obtenu pour $f = 0$ (et donc $p = 0$).

COROLLAIRE 3.

$$E\left(\exp-\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}\|B\|_\alpha\right)\underset{\varepsilon\downarrow 0}{\sim} C\,\varepsilon^{-(1/4)}\exp-\frac{K}{\varepsilon^{1/(3-2\alpha)}} \tag{3.3}$$

Démonstration du théorème 1. — Pour simplifier les notations, nous supposerons dans la suite que seuls les p premiers coefficients η_n ne sont pas nuls. Par ailleurs, comme dans le théorème 2.1, on peut se ramener au cas où tous les η_n sont $\geqq 0$. La relation (2.4) reste alors valable.

Ce qui change ici, c'est que, en vertu de l'hypothèse (3.1) et des remarques (2.7) à (2.9), la fonction Λ_k atteint son minimum en

$$x^k=(\eta_1, \ldots, \eta_p, 0, \ldots, 0)$$

$\left(\text{puisque maintenant } m'(0)=1-2\sum_1^p \eta_n n^{2\gamma}>0\right)$. Notons que dans la situation du théorème 2.1, la fonctionnelle $g\to\varphi_f(g)+\int_0^1 g^2(s)\,ds$ était de classe C^2 en ce minimum, tandis que maintenant cette fonctionnelle n'est plus de classe C^2 en ce point : ses lignes de niveaux sont des cubes ayant leurs sommets en ce minimum. C'est ce qui explique intuitivement le changement qualitatif de comportement entre le théorème 21 et le théorème 31.

Faisant le changement de variables

$$x_n-\eta_n=h_n \qquad (1\leqq n\leqq k),$$

on a :

$$\begin{aligned} E&=E\left(\exp-\frac{1}{2\varepsilon}\|\sqrt{\varepsilon}B-f\|_\alpha\right)\\ &=\lim_{k\to\infty}\frac{\prod_{n\leqq k} n^\gamma}{(2\pi\varepsilon)^{k/2}}\iint\ldots\int_{\mathbf{R}^k}\exp-\frac{1}{2\varepsilon}\left[|h|+\sum_{n=1}^{k}(h_n+\eta_n)^2 n^{2\gamma}\right]dh\end{aligned}$$

où

$$|h|=\sup_{1\leqq n\leqq k}|h_n|$$

$$=\exp-\frac{I(f)}{2\varepsilon}\lim_{k\to\infty}\frac{\prod_{n\leqq k} n^\gamma}{(2\pi)^{k/2}}\iint\ldots\int_{\mathbf{R}^k}$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}\left[|h|+2\sum_{n=1}^{p}h_n\eta_n n^{2\gamma}\right]-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k}h_n^2 n^{2\gamma}\right\}dh \tag{3.4}$$

$\left(\text{Notons que } \mathrm{I}(f)=\sum_{n=1}^{p} \eta_n^2 n^{2\gamma}\right)$. Posons

$$\begin{cases} h^1=(h_1, \ldots, h_p) \\ h^2=(h_{p+1}, \ldots, h_k) \end{cases}$$

et soit $|h^1|$(resp. $|h^2|$)$=\sup_{1 \leqq i \leqq p} |h_i|$ (resp. $\sup_{p+1 \leqq i \leqq k} |h_i|$). Divisons l'intégrale précédente en 2 morceaux, suivant que $|h^1|<|h^2|$ ou $|h^1| \geqq |h^2|$. Remarquons déjà que:

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_2 &= \lim_{k \to \infty} \frac{\prod_{n \leqq k} n^\gamma}{(2\pi)^{k/2}} \iint_{|h^1| \geqq |h^2|} \ldots \int \exp\{\ldots\}\, dh \\
&= \lim_{k \to \infty} \frac{\prod_{n \leqq k} n^\gamma}{(2\pi)^{k/2}} \iint \ldots \int_{\mathbf{R}^p} \exp\left\{-\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}\left[|h^1|+2\right.\right. \\
&\qquad \left.\left. \times \sum_{n=1}^{p} h_n \eta_n n^{2\gamma}\right] - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{p} h_n^2 n^{2\gamma}\right\} dh^1 \\
&\qquad \iint_{|h^2| \leqq |h^1|} \ldots \int \exp - \frac{1}{2} \sum_{n=p+1}^{k} h_n^2 n^{2\gamma}\, dh^2
\end{aligned}$$

Mais:

$$\begin{aligned}
&\lim_{k \to \infty} \frac{\prod_{n>p}^{k} n^\gamma}{(2\pi)^{k-p/2}} \iint_{|h^2| \leqq |h^1|} \ldots \int \exp - \frac{1}{2} \sum_{n>p}^{k} h_n^2 n^{2\gamma}\, dh^2 \\
&\qquad = \lim_{k \to \infty} \mathrm{P}\left(\sup_{p<n \leqq k} |g_n n^{-\gamma}| \leqq |h^1|\right) = \mathrm{P}\left(\sup_{n>p} |g_n n^{-\gamma}| \leqq |h^1|\right)
\end{aligned}$$

Notant φ_p la fonction de répartition du $\sup_{n>p} |g_n n^{-\gamma}|$, on a:

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_2 = \frac{\prod_{n \leqq p} n^\gamma}{(2\pi)^{p/2}} \iint \ldots \int_{\mathbf{R}^p} \varphi_p(|h^1|) \exp\left\{-\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}\left[|h^1|+2\sum_{n=1}^{p} h_n \eta_n n^{2\gamma}\right]\right. \\
\left. - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{p} h_n^2 n^{2\gamma}\right\} dh^1 \quad (3.5)
\end{aligned}$$

Calculons à présent :

$$\mathrm{I}_1 = \lim_{k\to\infty} \frac{\prod_{n\leq k} n^\gamma}{(2\pi)^{k/2}} \iint_{|h^1|<|h^2|} \cdots \int \exp\{\ldots\}\, dh$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{\prod_{n\leq k} n^\gamma}{(2\pi)^{k/2}} \iint \cdots \int_{\mathbf{R}^p} \exp\left\{ -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sum_{n=1}^{p} h_n \eta_n n^{2\gamma} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{p} h_n^2 n^{2\gamma} \right\} dh^1$$

$$\iint_{|h^2|>|h^1|} \cdots \int \exp\left\{ -\frac{|h^2|}{2\sqrt{\varepsilon}} - \frac{1}{2} \sum_{n>p}^{k} h_n^2 n^{2\gamma} \right\} dh^2$$

Mais :

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\prod_{n>p}^{k} n^\gamma}{(2\pi)^{k-p/2}} \iint_{|h^2|>|h^1|} \cdots \int \exp\left\{ -\frac{|h^2|}{2\sqrt{\varepsilon}} - \frac{1}{2} \sum_{n>p}^{k} h_n^2 n^{2\gamma} \right\} dh^2$$

$$= \mathrm{E}\left[\exp\left(-\frac{\mathrm{X}_p}{2\sqrt{\varepsilon}} \right) 1_{(\mathrm{X}_p>|h^1|)} \right]$$

$$(\text{où } \mathrm{X}_p := \sup_{n>p} |g_n n^{-\gamma}|)$$

$$= \int_{|h^1|}^{+\infty} \exp - \frac{x}{2\sqrt{\varepsilon}} \varphi_p'(x)\, dx$$

$$= -\varphi_p(|h^1|) \exp\left(-\frac{|h^1|}{2\sqrt{\varepsilon}} \right) + \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \int_{|h^1|}^{\infty} \exp\left(-\frac{x}{2\sqrt{\varepsilon}} \right) \varphi_p(x)\, dx$$

Cette dernière intégration par parties montre que I_1 se décompose en 2 termes dont le premier n'est rien d'autre que $-\mathrm{I}_2$ (comparer avec (3.5)). Par conséquent :

$$\mathrm{E} = \mathrm{C}_p \exp\left(-\frac{\mathrm{I}(f)}{2\varepsilon} \right) \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \iint \cdots \int_{\mathbf{R}^p} \times \exp\left\{ -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sum_1^p \cdots - \frac{1}{2} \sum_1^p \cdots \right\} dh^1 \int_{|h^1|}^{\infty} \exp\left(-\frac{x}{2\sqrt{\varepsilon}} \right) \varphi_p(x)\, dx \tag{3.6}$$

où

$$\mathrm{C}_p = \frac{\prod_{n\leq p} n^\gamma}{(2\pi)^{p/2}} \tag{3.7}$$

Or, d'après [4] nous savons que

$$\varphi_p(x) \underset{x \downarrow 0}{\sim} \frac{C}{x^{(1/2)+p}} \exp - \frac{K}{x^\rho}$$

C et K étant des constantes et

$$\rho = \frac{2}{1-2\alpha} \tag{3.8}$$

i.e.

$$\varphi_p(x) = \frac{C(x)}{x^{(1/2)+p}} \exp - \frac{K}{x^\rho}$$

où $C(x)$ est une fonction continue telle que

$$\lim_{x \to 0} C(x) = C \tag{3.9}$$

$$C(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} x^{(1/2)+p} \tag{3.10}$$

D'où, intervertissant l'ordre d'intégration dans (3.6), puis faisant le changement de variables

$$\begin{cases} x = \varepsilon^{1/(2(1+\rho))} y \\ h^1 = \varepsilon^{1/(2(1+\rho))} h \end{cases}$$

et posant $\mu = \dfrac{\rho}{2(1+\rho)}$, on obtient:

$$\begin{aligned} E &= C_p \exp\left(-\frac{I(f)}{2\varepsilon}\right) \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \int_0^\infty \frac{C(x)}{x^{(1/2)+p}} \exp - \left(\frac{x}{2\sqrt{\varepsilon}} + \frac{K}{x^\rho}\right) dx \\ &\quad \times \iint_{|h^2| \leq x} \dots \int \exp\left\{-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sum_{n=1}^{p} h_n \eta_n n^{2\gamma} - \frac{1}{2} \sum_1^p\right\} dh^1 \\ &= C_p \exp\left(-\frac{I(f)}{2\varepsilon}\right) \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \varepsilon^{1/(4(1+\rho))} \int_0^{+\infty} \frac{C(\varepsilon^{\mu/\rho} y)}{y^{(1/2)+p}} \exp - \frac{l(y)}{\varepsilon^\mu} J_\varepsilon(y)\, dy \end{aligned} \tag{3.11}$$

avec:

$$l(y) = \frac{y}{2} + \frac{K}{y^\rho} \tag{3.12}$$

$$J_\varepsilon(y) = \iint_{|h| \leq y} \dots \int \exp\left\{-1/\varepsilon^\mu \sum_{n=1}^{p} h_n \eta_n n^{2\gamma} - \frac{\varepsilon^{1/(1+\rho)}}{2} \sum_1^p h_n^2 n^{2\gamma}\right\} dh \tag{3.13}$$

Pour trouver un équivalent, quand $\varepsilon \to 0$ de l'intégrale

$$H_\varepsilon = \int_0^\infty \frac{C(\varepsilon^{\mu/\rho} y)}{y^{1/2+p}} \exp - \frac{l(y)}{\varepsilon^\mu} J_\varepsilon(y)\, dy,$$

nous encadrons $J_\varepsilon(y)$:

$$J_\varepsilon(y) \leqq \frac{\varepsilon^{\mu p}}{\prod_{n=1}^{p} \eta_n n^{2\gamma}} \prod_{n=1}^{p} \left(\exp \frac{y\eta_n n^{2\gamma}}{\varepsilon^\mu} - \exp - \frac{y\eta_n n^{2\gamma}}{\varepsilon^\mu}\right)$$

$$= \frac{\varepsilon^{\mu p}}{C'_p} \Sigma(-1)^j \exp \frac{1}{\varepsilon^\mu} \sum_{n=1}^{p} \pm \eta_n n^{2\gamma} y \tag{3.14}$$

(la dernière somme étant obtenue en développant le produit plus haut) et

$$J_\varepsilon(y) \geqq \frac{\varepsilon^{\mu p}}{C'_p} (\Sigma \ldots) \exp - \frac{\varepsilon^{1/(1+\rho)}}{2} \sum_{1}^{p} n^{2\gamma} y^2 \tag{3.15}$$

Pour achever la démonstration de notre théorème, nous aurons besoin du

Lemme 4. — *Soit* $a>0$ *et* $b \geqq 0$. *Posons*

$$l_a(x) = ax + \frac{K}{x^\rho} \qquad (\forall x > 0)$$

Alors

$$S_\varepsilon = \int_0^\infty \frac{C(\varepsilon^{\mu/\rho} x)}{x^{(1/2)+p}} \exp - \frac{l_a(x)}{\varepsilon^\mu} \exp(-\varepsilon^{1/(1+\rho)} bx^2)\, dx$$

$$\underset{\varepsilon \downarrow 0}{\sim} C'' \varepsilon^{\mu/2} \exp - \frac{l_a(x_0)}{\varepsilon^\mu} \tag{3.16}$$

où x_0 *est le point auquel* l_a *atteint son minimum.*

Démonstration du lemme 4. — Soit $t > x_0$. On écrit:

$$S_\varepsilon = \int_0^t + \int_t^{+\infty}$$

Il est clair que le premier terme est équivalent, quand ε tend vers 0 à

$$\int_0^t \frac{C}{x^{(1/2)+p}} \exp - \frac{l_a(x)}{\varepsilon^\mu} dx$$

et donc, d'après le théorème de Laplace [5] à $C'' \varepsilon^{\mu/2} \exp - \frac{l_a(x_0)}{\varepsilon^\mu}$. Le deuxième terme est négligeable devant le premier car en utilisant la convexité de l_a et (3.10) on a:

$$\int_t^\infty \frac{C(\varepsilon^{\mu/\rho} x)}{x^{(1/2)+p}} \exp - \frac{l_a(x)}{\varepsilon^\mu} \exp(-\varepsilon^{1/(1+\rho)} bx^2)\, dx$$

$$\leqq C''' \exp - \frac{l_a(t)}{\varepsilon^\mu} \int_t^\infty \exp - \frac{l'_a(t)(x-t)}{\varepsilon^\mu} dx$$

$$= \mathrm{C}''' \exp - \frac{l_a(t)}{\varepsilon^\mu} \int_0^\infty \exp - \frac{l'_a(t)\, v}{\varepsilon^\mu}\, dv$$
$$= \frac{\mathrm{C}'''\,\varepsilon^\mu}{l'_a(t)} \exp - \frac{l_a(t)}{\varepsilon^\mu}$$

Comme $l_a(t) > l_a(x_0)$, le lemme est démontré.

Utilisant l'encadrement de $\mathrm{J}_\varepsilon(y)$ on obtient une majoration et une minoration de H_ε. Mais d'après le lemme, il est clair que les intégrales majorante et minorante ont même équivalent quand ε tend vers 0, à savoir

$$\mathrm{C}\,\varepsilon^{\mu p}\,\varepsilon^{\mu/2} \exp - \frac{l_n(x_0)}{\varepsilon^\mu} \tag{3.17}$$

où

$$\eta = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{p} \eta_n n^{2\gamma}$$

et $x_0$est le point où l_n atteint son minimum.

Finalement, comme

$$l_\eta(x_0) = \mathrm{K}\,\eta^{\rho/(1+\rho)} = \mathrm{K}\,\eta^{2\mu}$$

et comme $\mu = \dfrac{\rho}{(2(1+\rho)} = \dfrac{1}{3-2\alpha}$ d'après (3.8) on trouve que

$$\mathrm{E} \underset{\varepsilon\downarrow 0}{\sim} \mathrm{C}_p \exp\left(-\frac{\mathrm{I}(f)}{2\varepsilon}\right) \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \varepsilon^{1/(4(1+\rho))}\, \varepsilon^{\mu p}\, \varepsilon^{\mu/2} \exp - \mathrm{K}\left(\frac{\eta^2}{\varepsilon}\right)^\mu$$
$$= \mathrm{C}_p\, \varepsilon^{\mu p - (1/4)} \exp - \mathrm{K}\left(\frac{\eta^2}{\varepsilon}\right)^{1/(3-2\alpha)} \exp - \frac{\mathrm{I}(f)}{2\varepsilon}$$

Remarque 2. – Nous avons ainsi observé dans le cas où f est « proche » de l'origine un comportement de $\mathrm{E}\left(\exp - \dfrac{1}{2\varepsilon} \phi_f(\sqrt{\varepsilon}\,\mathrm{B})\right)$ distinct de celui du théorème de Schilder. En revanche, le théorème de Varadhan est bien vérifié puisque

$$\varepsilon \operatorname{Log} \mathrm{E}\left(\exp - \frac{1}{2\varepsilon} \phi_f(\sqrt{\varepsilon}\,\mathrm{B})\right)$$
$$= \varepsilon \operatorname{Log} \mathrm{C}_p\, \varepsilon^{\mu p - (1/4)} - \mathrm{K}\,\varepsilon \left(\frac{\eta^2}{\varepsilon}\right)^{1/(3-2\alpha)} - \frac{\mathrm{I}(f)}{2}$$
$$= \varepsilon \operatorname{Log} \mathrm{C}_p\, \varepsilon_{\mu - p\, 1/4} - \mathrm{K}\,(\eta^2)^{1/(3-2\alpha)}\, \varepsilon^{2(1-\alpha)/3-2\alpha} - \frac{\mathrm{I}(f)}{2}$$
$$\underset{\varepsilon\downarrow 0}{\sim} - \frac{\mathrm{I}(f)}{2}$$

Notons enfin que la dichotomie de comportement entre f proche ou éloignée de l'origine provient du fait que, dans le premier cas, ϕ_f n'est pas de classe C^2 au voisinage du minimum de $g \rightarrow \phi_f(g) + \int_0^1 \dot{g}^2(s)\,ds$, tandis qu'elle est de classe C^2 dans le second cas.

RÉFÉRENCES

[1] J. D. DEUSCHEL, D. STROOCK, *Large Deviations*. Academic Press, Boston, 1988.

[2] M. SCHILDER, Some Asymptotic Formular for Wiener Integrals, *Trans. of the Amer. Math. Soc.*, vol. **125**, n° 1, 1966, p. 63-85.

[3] Z. CIESIELSKI, On the Isomorphisms of the spaces H_α and *m*. *Bull. Acad. Pol. Sc.*, vol. **8**, 1960, p. 217-222.

[4] P. BALDI, B. ROYNETTE, Some Exact Equivalents for the Brownian Motion in Hölder, *Norm. Probab. Theory Rel. Fields*, vol. **93**, 1992, p. 457-484.

[5] J. DIEUDONNÉ, Calcul infinitésimal, Hermann, Paris, 1968.

(*Manuscrit reçu le* 21 *février* 1992,
révisé le 28 *janvier* 1993.)