ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

AI HUA FAN
JEAN-PIERRE KAHANE

Rareté des intervalles recouvrant un point dans un recouvrement aléatoire

Annales de l'I. H. P., section B, tome 29, n° 3 (1993), p. 453-466
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1993__29_3_453_0>

© Gauthier-Villars, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (http://www.elsevier.com/locate/anihpb) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. 29, n° 3, 1993, p. 453-466. *Probabilités et Statistiques*

Rareté des intervalles recouvrant un point dans un recouvrement aléatoire

par

Ai Hua FAN et Jean-Pierre KAHANE
Analyse Harmonique, Mathématiques,
Bât. n° 425, Université de Paris-Sud, 91405 Orsay Cedex, France

RÉSUMÉ. — On considère le modèle de recouvrement de Dvoretzky, c'est-à-dire des intervalles I_n aléatoires, de longueurs l_n données, sur le cercle de longueur 1. La suite des intervalles I_n recouvrant un point t a p. s. certaines propriétés asymptotiques indépendantes de t.

Mots clés : Recouvrement aléatoire, rareté, épaisseur, densité.

ABSTRACT. — We consider the Dvoretzky covering model, *i.e.* random intervals I_n on the circle of length 1, the lengths $l_n = |I_n|$ being given. The sequence of intervals I_n covering a point enjoys a. s. some asymtotic properties uniformly in t.

1. NOTIONS DE (a_n)-RARETÉ, (a_n)-ÉPAISSEUR, (σ_n)-DENSITÉ ET ÉNONCÉS DES RÉSULTATS

Considérons le modèle de recouvrement de Dvoretzky (*cf.* [1], [3]). Soit $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. On se donne une suite d'intervalles $\{I_n\}_{n \geq 1}$ jetés au hasard sur le cercle $\mathbb{T}$ définis par $I_n =]-l_n/2, l_n/2[+ \omega_n$, où $\{l_n\}$ est une suite de positifs décroissante tendant vers zéro et $\{\omega_n\}$ est une suite de variables

Classification A.M.S. : 52 A 22, 52 A 45, 60 D 05.

indépendantes et équiréparties sur $\mathbb{T}$. On se demande quand le cercle $\mathbb{T}$ est recouvert tout entier par la réunion des intervalles I_n, ceci presque sûrement.

Une condition nécessaire et suffisante a été donnée en 1972 par L. Shepp [5]. Elle s'écrit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp (l_1 + \ldots + l_n) = \infty.$$

Cette condition implique même que presque sûrement pour tout point $t \in \mathbb{T}$, il y a un nombre infini d'intervalles qui le recouvrent. Combien y-a-t-il en fait d'intervalles recouvrant un point ? Est-ce une suite rare ou épaisse? Peut-on obtenir des résultats uniformes (valables pour tout point)? C'est une question posée par L. Carleson à l'un d'entre nous. Une première approche se trouve dans [2], chapitre VI. Dans ce travail on essaye de donner une réponse plus complète. Pour l'essentiel, nous nous limitons à des suites $l_n = \frac{\alpha}{n}$ $(n \geqq n_0)$, sans nécessairement supposer $\alpha \geqq 1$, c'est-à-dire que le cercle est recouvert p. s.

Tout naturellement, il nous faut tout d'abord expliciter la rareté. Soit Λ une sous-suite de $\mathbb{N}^+$. Nous introduisons ici deux moyens de décrire la rareté ou l'épaisseur de Λ. Prenons premièrement une série divergente de termes positifs

$$S: \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty \quad (a_n > 0)$$

disons une série étalon. On dit que Λ est S-*rare* ou (a_n)-*rare* si

$$\sum_{n \in \Lambda}^{\infty} a_n < \infty.$$

En cas contraire, on dit que Λ est S-*épaisse* ou (a_n)-*épaisse*. C'est le premier moyen de description. Passons ensuite au deuxième. Au lieu d'utiliser une série étalon, prenons une suite $\{ \sigma_n \}$ positive croissante tendant vers l'infini. Pour la suite Λ, introduisons

$$N_n(\Lambda) = \text{Card} \, (\Lambda \cap [1, n]) \quad (n \geqq 1).$$

La (σ_n)-*densité inférieure* et la (σ_n)-*densité supérieure* de Λ sont définies respectivement par les deux quantités suivantes

$$\underline{d}(\Lambda, \sigma_n) = \liminf_{n \to \infty} \frac{N_n(\Lambda)}{\sigma_n}, \qquad \overline{d}(\Lambda, \sigma_n) = \limsup_{n \to \infty} \frac{N_n(\Lambda)}{\sigma_n}.$$

Grosso modo, plus grandes sont les quantités $\underline{d}$ ou $\overline{d}$, plus dense est la suite Λ.

Revenons maintenant au problème initial. Voici deux notations :

$$\Lambda_t = \{ n \in \mathbb{N}^+ : \mathrm{I}_n \ni t \}, \qquad \mathrm{N}_n(t) = \mathrm{N}_n(\Lambda_t) \quad (t \in \mathbb{T}).$$

Λ_t est l'ensemble des indices des intervalles qui recouvrent le point t tandis que $\mathrm{N}_n(t)$ est le nombre des intervalles parmi les n premiers jetés au hasard qui recouvrent le point t.

Du premier point de vue, on a l'énoncé suivant facile à démontrer comme une conséquence du théorème des trois séries.

PROPOSITION 1. — *Soit $\{a_n\}$ une suite de nombres positifs constituant une série étalon. Le point t ($\in \mathbb{T}$) étant fixé, on a*

a) $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n l_n < \infty \quad \Rightarrow \quad p.s.\ \Lambda_t \text{ est } (a_n)\text{-rare}$$

b) $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n l_n = \infty \quad \Rightarrow \quad p.s.\ \Lambda_t \text{ est } (a_n)\text{-épaisse}$$

c) En fait, la condition a) [resp. b)] implique que p.s. pour presque tout point t, Λ_t est (a_n)-rare (resp. épaisse).

Du deuxième point de vue, on a aussi un énoncé qui se démontre aussi facilement, comme une conséquence du théorème des grands nombres.

PROPOSITION 2. — *Supposons que $\sigma_n = l_1 + \ldots + l_n$ tende vers l'infini. Pour $t \in \mathbb{T}$ fixé, on a p.s.*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\mathrm{N}_n(t)}{\sigma_n} = 1.$$

Autrement dit, $\underline{d}(\Lambda_t, \sigma_n) = \overline{d}(\Lambda_t, \sigma_n) = 1$.

Un point t étant fixé, on a déjà de bonnes informations sur la rareté ou l'épaisseur de Λ. Néanmoins le plus intéressant, ce qui est notre préoccupation, est de savoir la rareté uniforme pour tous les points. Dans la suite on va s'engager dans ce problème, mais dans le cas bien particulier où $l_n = \dfrac{\alpha}{n}$. Les résultats obtenus sont énoncés sous la forme des deux théorèmes suivants.

THÉORÈME 1. — *Supposons que $l_n = \dfrac{\alpha}{n}$ $(\alpha > 0)$ et que la suite de positifs $\{a_n\}$ soit décroissante. On a*

$$(1.1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad p.s. \max_{t \in \mathbb{T}} \sum_{n \in \Lambda_t} a_n < +\infty.$$

Si de plus $\alpha > 1$ on a

$$(1.2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad p.s. \min_{t \in \mathbb{T}} \sum_{n \in \Lambda_t} a_n = +\infty.$$

THÉORÈME 2. — *Supposons que* $l_n = \frac{\alpha}{n}$. *Si* $\alpha > 0$, *on a p.s.*

$$(1.3) \qquad \alpha < \limsup_{n \to \infty} \frac{\max_{t \in \mathbb{T}} N_n(t)}{\log n} < \infty.$$

Si $\alpha > 1$, *on a p.s.*

$$(1.4) \qquad 0 < \liminf_{n \to \infty} \frac{\min_{t \in \mathbb{T}} N_n(t)}{\log n} < \alpha.$$

Remarque 1. — La proposition 2 entraîne déjà

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{\min_{t \in \mathbb{T}} N_n(t)}{\log n} \leqq \alpha \leqq \limsup_{n \to \infty} \frac{\max_{t \in \mathbb{T}} N_n(t)}{\log n}.$$

La première inégalité dans (1.3) et la deuxième inégalité dans (1.4) assurent que ces deux inégalités sont strictes, alors que la deuxième inégalité dans (1.3) et la première inégalité (1.4) affirment que p.s. pour tout $t \in \mathbb{T}$

$$N_n(t) \approx \log n.$$

On verra dans la démonstration comment améliorer légèrement ces inégalités

Remarque 2. — Le paramètre α n'émerge pas dans la conclusion de la proposition 1, ni dans celle du théorème 1, tandis qu'il apparaît dans la conclusion de la proposition 2 et dans celle du théorème 2. De ce point de vue, on peut dire que la densité est plus précise que la rareté. En fait, on verra que le théorème 1 peut-être démontré comme une conséquence du théorème 2.

Remarque 3. — Notre méthode présentée ne s'adapte pas dans le cas $\alpha = 1$ pour (1.2) et (1.4). En fait, (1.2) et (1.4) sont incorrectes pour $\alpha = 1$. Nous donnerons quelques indications sur ce cas dans la partie 6.

2. DÉMONSTRATIONS DES PROPOSITIONS 1 ET 2

Démonstration de la proposition 1. — Si l'on veut adopter la première description de rareté, on a la bonne expression suivante

$$(2.1) \qquad \sum_{n \in \Lambda_t} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n(t - \omega_n)$$

où χ_n est la fonction indicatrice de l'intervalle $]-l_n/2, l_n/2[$. Elle nous dit que la (a_n)-rareté [resp. la (a_n)-épaisseur] de Λ_t correspond justement à la convergence (resp. la divergence) de la série se trouvant à droite de (2.1). Comme les termes de cette série sont bornés, il suffit d'envisager, d'après le théorème des trois séries, les deux séries suivantes :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n l_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 l_n - a_n^2 l_n^2) \approx \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 l_n$$

d'où résultent *a*) et *b*), car la première série majore la deuxième. Quant à *c*), il résulte du théorème de Fubini.

C.Q.F.D.

Démonstration de la proposition 2. — Si on adopte la deuxième description de la rareté, l'expression suivante de $N_n(t)$ est commode

$$N_n(t) = \sum_{j=1}^{n} \chi_j(t-\omega_j). \tag{2.2}$$

Puisque les χ_j sont majorées par 1, la proposition 2 provient directement du théorème des grands nombres car $l_j = \mathbb{E}\chi_j$.

C.Q.F.D.

3. DEUX LEMMES

Soit $\xi > 1$ un réel. $[x]$ désignant la partie entière du réel x, posons

$$N_j = 2^{[\xi^j]}$$

$$S_j(t) = \sum_{N_j+1}^{N_{j+1}} \chi_n(t-\omega_n)$$

$$X_j = \max_{t \in \mathbb{T}} S_j(t), \qquad Y_j = \min_{t \in \mathbb{T}} S_j(t).$$

Le premier lemme nous dira que la suite de variables $\{X_j\}$ est majorée par un multiple de $\{\log_2 N_j\}$ et le deuxième nous dira que la suite de variables $\{Y_j\}$ est minorée par un multiple de $\{\log_2 N_j\}$. Voici les énoncés exacts.

LEMME 1. — *Si* $\alpha > 0$, *il existe une constante* $C = C(\alpha)$ *telle que*

$$\sum_{j=1}^{\infty} P(X_j \geqq C \log_2 N_j) < \infty.$$

Il suffit que C *satisfasse, pour un certain* $\lambda > 0$, *à*

$$\frac{\lambda C}{\log 2} > \xi + \alpha(\xi - 1)(e^{\lambda} - 1).$$

LEMME 2. — *Si* $\alpha > 1$, *il existe une constante* $C = C(\alpha)$ *telle que*

$$\sum_{j=1}^{\infty} P(Y_j \leqq C \log_2 N_j) < \infty.$$

Il suffit que C *satisfasse, pour un couple* (α', α'') *tel que* $1<\alpha''<\alpha'<\alpha$, *à*

$$C \log_2 \frac{\alpha'}{\alpha'-\alpha''} \leqq \alpha''(\xi-1)+\xi.$$

Preuve du Lemme 1. — Soit $\alpha^*>\alpha$. Pour $j \geqq 1$, posons

$$S_j^*(t)=\sum_{N_j+1}^{N_{j+1}} \chi_n^*(t-\omega_n)$$

où χ_j^* est l'indicatrice de l'intervalle dilaté $]-\alpha^*/(2n), \alpha^*/(2n)[$. Établissons d'abord la relation suivante entre S_j^* et X_j, ω étant fixé :

$$|\{t: S_j^* \geqq X_j\}| \geqq \frac{\alpha^*-\alpha}{N_{j+1}}$$

$|\,.\,|$ signifiant la mesure de Lebesgue. En effet, X_j est le nombre des intervalles $I_n\,(N_j<n\leqq N_{j+1})$ qui recouvrent un certain point $t_0=t_0(\omega)$. Il est clair que l'intervalle de centre t_0 et de rayon $(\alpha^*-\alpha)/N_{j+1}$ est recouvert par les intervalles I_n^* correspondants.

Calculons alors la transformée de Laplace de S_j^*. Pour $\lambda>0$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \exp \lambda\, S_j^* &= \prod_{N_j+1}^{N_{j+1}} \left(1-\frac{\alpha^*}{n}+\frac{\alpha^*}{n} e^{\lambda}\right) \\ &\leqq \exp\left(\left(\sum_{N_j+1}^{N_{j+1}} \frac{\alpha^*}{n}\right)(e^{\lambda}-1)\right) \\ &\leqq \left(\frac{N_{j+1}}{N_j}\right)^{\alpha^*(e^{\lambda}-1)}.\end{aligned}$$

D'autre part, tenant compte de la relation établie entre S_j^* et X_j on a

$$\exp \lambda X_j \leqq \frac{N_{j+1}}{\alpha^*-\alpha} \int \exp \lambda S_j^*\, dt.$$

On a enfin une majoration de la transformée de Laplace de X_j

$$\mathbb{E} \exp \lambda X_j \leqq \frac{N_{j+1}}{\alpha^*-\alpha} \left(\frac{N_{j+1}}{N_j}\right)^{\alpha^*(e^{\lambda}-1)}.$$

Ceci, avec l'inégalité de Tchebychev (ou Chernoff-Chebyshev, ou Bienaymé-Tchebycheff), donne alors

$$\begin{aligned}P(X_j \geqq C \log_2 N_j) &\leqq \frac{1}{\alpha^*-\alpha}\, 2^{[\xi^{j+1}]+\alpha^*(e^{\lambda}-1)([\xi^{j+1}]-[\xi^j])-C\lambda[\xi^j]} \\ &= \frac{1}{\alpha^*-\alpha} \left(\frac{1}{N_j}\right)^{((C\lambda/\log 2)-(\log N_{j+1}/\log N_j)-((\log N_{j+1}/\log N_j)-1))\,\alpha^*(e^{\lambda}-1))}\end{aligned}$$

Pour terminer la preuve du lemme il suffit de remarquer que

$$\frac{\log N_{j+1}}{\log N_j} \to \xi \quad (j \to \infty).$$

Preuve du lemme 2. — Soit $1 < \alpha'' < \alpha' < \alpha$. N_j étant défini comme avant, posons

$$S'_j(t) = \sum_{N_j+1}^{N_{j+1}} \chi'_n(t-\omega_n)$$

où χ'_n est l'indicatrice de l'intervalle contracté, de centre 0 et de longueur α'/n. On a maintenant

$$|\{t : S'_j \leqq Y_j\}| \geqq \frac{\alpha - \alpha'}{N_{j+1}}$$

ce qui nous permet d'avoir pour $\lambda > 0$

$$\exp -\lambda Y_j \leqq \frac{N_{j+1}}{\alpha - \alpha'} \int \exp -\lambda S'_j \, dt.$$

Or

$$\mathbb{E} \exp -\lambda S'_j = \prod_{N_j+1}^{N_{j+1}} \left(1 - \frac{\alpha'}{n} + \frac{\alpha'}{n} e^{-\lambda}\right).$$

On observe alors que si λ est assez grand, tel que $\lambda \geqq \log(\alpha'/(\alpha' - \alpha''))$, le produit précédent est majoré par

$$\prod_{N_j+1}^{N_{j+1}} \left(1 - \frac{\alpha''}{n}\right) \approx \exp(-\alpha''(\xi - 1) \log N_j).$$

On a ainsi

$$\mathbb{E} \exp -\lambda Y_j \leqq O(1) \exp(-(\alpha''(\xi-1) - \xi) \log N_j)$$

$O(1)$ dépendant de $\alpha - \alpha'$. Choisissons ξ tel que $\alpha''(\xi - 1) - \xi > \gamma > 0$. D'autre part, on a

$$\mathbb{E} \exp -\lambda Y_j \geqq \exp(-C\lambda \log_2 N_j) P(Y_j \leqq C \log_2 N_j).$$

Par conséquent

$$P(Y_j \leqq C \log_2 N_j) = O(1) \left(\frac{1}{N_j}\right)^{\gamma - (C\lambda/\log 2)}$$

Donc il suffit de prendre un C tel que

$$C\lambda < \gamma \log 2.$$

4. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1

Démonstration de (1.1). Grâce à la proposition 1, il suffit de démontrer l'implication « $\Rightarrow$ ». Comme a_n est décroissante on a l'équivalence

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{\infty} \xi^j a_{N_j} < +\infty.$$

Or

$$\max_{t \in T} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi_n (t-\omega_n) \leqq \sum_{j=0}^{\infty} a_{N_j} X_j.$$

Il suffit alors d'appliquer le lemme 1 et le lemme de Borel-Cantelli et d'observer que $\log_2 N_j = [\xi^j]$.

C.Q.F.D.

Démonstration de (1.2). – De même il suffit de démontrer l'implication « $\Rightarrow$ ». Remarquons que

$$\min_{t \in \mathbb{T}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n (t-\omega_n) \geqq \sum_{j=1}^{\infty} a_{N_{j+1}} Y_{N_j}.$$

L'application du lemme 2 et du lemme de Borel-Cantelli termine la preuve.

C.Q.F.D.

Remarquons d'ailleurs que le théorème 1 est une conséquence du théorème 2. Soit en effet $a(x)$ une fonction positive décroissante telle que $a(n)=a_n$ et $N_t(x)$ la fonction de répartition de Λ_t définie par $\operatorname{card}\{n \leqq x : I_n \ni t\}$. Observons que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \approx I = \int_1^{\infty} \frac{a(x)}{x}\, dx, \qquad \sum_{n \in \Lambda_t} a_n \approx J_t = \int_1^{\infty} a(x)\, dN_t(x)$$

et que

$$I = \lim_{x \to \infty} a(x) \log x + \int_1^{\infty} \log x\, d(-a(x))$$

$$J_t = \lim_{x \to \infty} a(x) N_t(x) + \int_1^{\infty} N_t(x)\, d(-a(x)).$$

Observons encore que (1.3) implique $N_t(x) = O(\log x)$ d'où le fait que $I < \infty$ entraîne $J_t < \infty$, et que (1.4) implique $\log x = O(N_t(x))$ d'où le fait que $I = \infty$ entraîne $J_t = \infty$.

5. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2

Démonstration de la deuxième inégalité dans (1.3). – N_j étant toujours les mêmes, selon le lemme 1, on a p.s. que pour j suffisamment grand

$$X_j \leqq C \xi^j.$$

Supposons que $N_m \leqq n < N_{m+1}$ et remarquons alors que $\xi^m < \log_2 n \leqq \xi^{m+1}$. On a donc p. s.

$$\max_{t \in \mathbb{T}} N_n(t) \leqq C \sum_{j=0}^{m} \xi^j + O(1) = C \frac{\xi}{\xi - 1} \log_2 n + O(1)$$

d'où

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{\max_{t \in \mathbb{T}} N_n(t)}{\log_2 n} \leqq C \frac{\xi}{\xi - 1}$$

où C est défini dans le lemme 1. La deuxième inégalité dans (1.3) se trouve ainsi établie, et on peut la préciser en prenant pour majorant la borne inférieure en ξ et λ de la fonction

$$A(\lambda, \xi) = \frac{\xi + \alpha(\xi - 1)(e^\lambda - 1)}{\lambda} \frac{\xi}{\xi - 1}.$$

C.Q.F.D.

Démonstration de la première inégalité dans (1.4). — Supposons que $N_m \leqq n < N_{m+1}$. D'après le lemme 2 on a p. s.

$$\min_{t \in \mathbb{T}} N_n(t) \geqq C \sum_{j=0}^{m-1} \xi^j + O(1) = C \frac{1}{\xi(\xi - 1)} \log_2 n + O(1)$$

d'où la première inégalité dans (1.4). Pour l'améliorer on maximise la fonction

$$B = \frac{\alpha''(\xi - 1) - \xi}{\xi(\xi - 1)} \frac{\log 2}{\log \alpha' - \log(\alpha' - \alpha'')}.$$

C.Q.F.D.

Pour démontrer les deux autes inégalités on a besoin du lemme suivant dont la preuve est dans [2], p. 136-137. Pour la commodité de lecture, on reproduit ici la preuve.

LEMME. — *Étant donné $a > 0$, considérons la martingale indexée*

$$Q_n^a(t) = \prod_{j=1}^{n} \frac{a^{\chi_j(t - \omega_j)}}{1 + \alpha(a - 1)/j} \quad (t \in \mathbb{T},\ n \geqq 1).$$

(i) $\int Q_n^a(t)\, dt$ *converge dans* $L^2 \Leftrightarrow \alpha(1 - a)^2 < 1$;

(ii) $Q_n^a(t) \approx n^{\alpha(1 - a)} a^{N_n(t)}$.

Preuve du lemme. — (ii) est évident. $\int Q_n^a(t)\, dt$ étant une martingale, pour qu'elle converge dans L^2 il faut et il suffit que

$$\mathbb{E}\left(\int Q_n^a(t)\, dt\right)^2 = \iint \mathbb{E}\, Q_n^a(t)\, Q_n^a(s)\, dt\, ds = O(1).$$

Remarquons que

$$\mathbb{E}\,Q_n^a(t)\,Q_n^a(s) \approx n^{2\alpha(1-a)} \prod_{j=1}^{n} \mathbb{E}\,a^{\chi_j(t)+\chi_j(s)}$$

$$\mathbb{E}\,a^{\chi_j(t)+\chi_j(s)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\log a)^m}{m!}\,\mathbb{E}\,(\chi_j(t)+\chi_j(s))^m$$

et que χ_j ne prend que deux valeurs 0 et 1, ce qui implique que si $m \geqq 2$,

$$\mathbb{E}\,(\chi_j(t)+\chi_j(s))^m = \mathbb{E}\,\chi_j(t) + \mathbb{E}\,\chi_j(s) + \sum_{k=1}^{m-1} C_m^k\,\mathbb{E}\,\chi_j(t)\,\chi_j(s).$$

Finalement remarquons que

$$\mathbb{E}\,\chi_j(t) = \frac{\alpha}{j}, \qquad \mathbb{E}\,\chi_j(t)\,\chi_j(s) = \left(\frac{\alpha}{j} - |t-s|\right)_+.$$

Ainsi on peut obtenir

$$\mathbb{E}\,Q_n^a(t)\,Q_n^a(s) \approx \exp\left((a-1)^2 \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\alpha}{j} - |t-s|\right)_+\right).$$

Pour terminer la preuve il suffit d'observer que le membre à droite tend en croissant vers le noyau du potentiel de Riesz d'ordre $\alpha(a-1)^2$.

C.Q.F.D.

Démonstration de la première inégalité dans (1.3). — Selon la loi de zéro-un, on sait

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\max_{t\in T} N_n(t)}{\log n} = \gamma\,(=\mathrm{Cte})\ \text{p. s.}$$

Quel que soit $\eta > 0$, on a alors

$$\max_{t\in T} N_n(t) \leqq \log n^{\gamma+\eta} \quad (n \geqq n(\omega)).$$

Supposons que $a > 1$ et écrivons $a = 1+\varepsilon$. On a alors

$$Q_n^{1+\varepsilon}(t) = O(1)\,n^{-\alpha\varepsilon+(\gamma+\eta)\log(1+\varepsilon)}.$$

D'après le lemme (i), la martingale $\int Q_n^{1+\varepsilon}(t)\,dt$ doit converger dans L^2 dès que $\varepsilon^2 < \frac{1}{\alpha}$. Sous cette condition, on doit avoir

$$-\alpha\varepsilon + (\gamma+\eta)\log(1+\varepsilon) > 0$$

car sinon, la martingale indexée sera uniformément convergente vers 0. Or, la dernière inégalité implique que

$$\gamma \geqq \frac{\alpha\varepsilon}{\log(1+\varepsilon)} \quad \text{si} \quad \varepsilon^2 < \frac{1}{\alpha}.$$

Donc $\gamma > \alpha$.

C.Q.F.D.

Démonstration de la deuxième inégalité de (1.4). — Supposons que la limite envisagée soit égale à γ. Quel que soit $\eta > 0$, on aurait

$$\min_{t \in T} N_n(t) \geqq \log n^{\gamma-\eta} \quad (n \geqq n(\omega)).$$

En posant $a = 1 - \varepsilon$ on a

$$Q_n^{1-\varepsilon}(t) = O(1)\, n^{\alpha\varepsilon + (\gamma-\eta)\log(1-\varepsilon)}.$$

De même, on peut déduire de cette dernière expression que

$$\gamma \leqq \frac{\alpha\varepsilon}{-\log(1-\varepsilon)} \quad \text{si} \quad \varepsilon^2 < \frac{1}{\alpha}.$$

Donc $\gamma < \alpha$.

C.Q.F.D.

6. REMARQUE SUR LE CAS $\alpha = 1$

Montrons que (1.2) est incorrecte dans ce cas. Il en résulte, par la remarque faite après la démonstration du théorème 1, que la première inégalité de (1.4) est également incorrecte. En fait, nous allons établir

$$(6.1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n \log n} < \infty \quad \Rightarrow \quad \text{p.s.} \min_{t \in \mathbb{T}} \sum_{n \in \Lambda_t} a_n < \infty$$

en supposant ici la suite (a_n) positive, mais non nécessairement décroissante. La démonstration montrera qu'en réalité, sous la condition exprimée par le premier membre de (6.1), la série du second membre converge p. s. pour un ensemble non dénombrable (aléatoire) de valeurs de t.

Démonstration de (6.1). — Nous utiliserons la théorie de la multiplication de poids aléatoires indépendants telle qu'elle est exposée dans plusieurs articles du second auteur et dans la thèse du premier [2]. Les poids sont ici

$$P_n(t) = -\alpha_n \chi_n(t-\omega_n) + \beta_n \quad (\chi_n = 1_{[0, l_n]})$$

avec $0 < \alpha_n \leqq \beta_n$ (condition de positivité) $-\alpha_n l_n + \beta_n = 1$ (normalisation). Les mesures

$$Q_n(t)\, dt \,(= P_1(t) P_2(t) \ldots P_n(t))$$

convergent faiblement p. s. vers une mesure aléatoire $Q(dt)$. Si on a

$$\mathbb{E}\iint Q_n(t)\,dt\,ds = O(1) \tag{6.2}$$

la mesure $Q(dt)$ est non nulle avec probabilité strictement positive. Or (6.2) se traduit facilement en conditions explicites sur les coefficients α_n, moyennant la formule

$$\mathbb{E}(P_n(t)\,P_n(s)) = 1 + \alpha_n^2\,\Delta_n(t-s) - \alpha_n^2\,l_n^2$$

où $\Delta_n = \chi_n * \chi_n$, que nous laissons au lecteur le soin de vérifier. Constatons seulement que

$$\int \exp \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2\,\Delta_n(t)\,dt < \infty \tag{6.3}$$

entraîne (6.2), et que l'hypothèse de départ sur la suite (α_n) est

$$0 < \alpha_n(1-l_n) \leqq 1 \tag{6.4}$$

Remarquons maintenant que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\int \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,\chi_n(t-\omega_n)\,Q(dt) &= \int \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,\mathbb{E}(\chi_n(-\omega_n)\,P_n(t))\,dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\beta_n-\alpha_n)\,l_n\end{aligned}$$

Si donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(\beta_n-\alpha_n)\,l_n < \infty \tag{6.5}$$

en plus des conditions (6.3) et (6.4), la série $\sum a_n\,\chi_n(t-\omega_n)$ [autrement dit, la série du second membre de (6.1)] converge $Q(dt)$-presque partout presque sûrement. D'après la loi du zero-un, on a bien le second membre de (6.1), avec le complément annoncé, qui résulte du fait que la mesure $Q(dt)$ est p. s. diffuse, et non nulle avec probabilité positive.

Pour avoir (6.3), il suffit que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2\,\Delta_n(t) \leqq \log\frac{1}{t} - 2\log\log\frac{1}{t} + O(1) \quad (t\downarrow 0)$$

et, pour cela, il suffit que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2\,\Delta_n'(t) \leqq -\frac{1}{t} + \frac{2}{t\log(1/t)} + O(1) \quad (t\downarrow 0)$$

c'est-à-dire, compte tenu que $\Delta_n'(t) = -\chi_n(t)$ pour $t>0$,

$$\frac{1}{l_m} - \frac{2}{l_m\log(1/l_m)} \leqq \sum_{n=1}^{m} \alpha_n^2 + O(1) \quad (m\to\infty)$$

soit, puisque nous sommes dans le cas $l_m = 1/m$,

$$m - \frac{2m}{\log m} \leqq \sum_{n=1}^{m} \alpha_n^2 + O(1) \quad (m \to \infty)$$

et le choix

$$\alpha_n = 1 - \frac{\delta}{\log n} \quad (0 < \delta < 1 \text{ fixé, } n \geqq 3)$$

convient pour avoir (6.3) et (6.4). Alors (6.5) s'exprime comme le premier membre de (6.1), et nous avons vu qu'il entraine le second membre de (6.1).

C.Q.F.D.

Dans le cas $\alpha = 1$, on est donc très loin de la dichotomie qu'exprime le théorème 1 pour $\alpha > 1$: on peut très bien avoir p. s. divergence de $\sum_{t \in \Lambda_t} a_n$ pour presque tout t, et convergence sur un ensemble ayant la puissance du continu; c'est le cas si

$$a_n \downarrow, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} = \infty, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n \log n} < \infty.$$

Nous ne connaissons pas, dans le cas $\alpha = 1$, l'analogue de la formule $N_n(t) \approx \log n$ établie dans le cas $\alpha > 1$. Cependant la démonstration du théorème de Shepp telle qu'elle est exposée dans [4] fournit une information. Considérons les intervalles I_n tels que $A < n < B$, et soit τ ($\tau = \tau(A, B)$) l'extrémité droite du plus grand intervalle non recouvert contenant 0; on convient que $\tau = 1$ si tout le cercle est recouvert. Il résulte des parties 6 et 10 de [4] une estimation de la loi de τ qui, dans le cas présent, donne

$$P\left(\tau > \varepsilon \frac{1}{A} \log \frac{B}{A}\right) > \varepsilon$$

pour une constante $\varepsilon > 0$ convenable. Choisissons une suite A_j très rapidement croissante, de façon que $A_{j+1} \geqq \exp A_j$, et appliquons cette inégalité aux variables indépendantes $\tau(A_j, B_j)$. Il en résulte que p. s. l'ensemble des j tels que

$$\forall t \in (0, \varepsilon), \quad N_{A_{j+1}}(t) - N_{A_j}(t) > 0$$

a une densité positive. En translatant l'intervalle $(0, \varepsilon)$, et en choisissant une suite croissante d'entiers $n(j)$ telle que $n(j+1) - n(j)$ tende vers l'infini, on obtient que p. s.

$$\inf_{t \in \mathbb{T}} (N_{A_{n(j+1)}}(t) - N_{A_{n(j)}}(t)) > 0 \tag{6.6}$$

pour tout j assez grand. Le résultat est substentiellement inaméliorable, comme on s'en assure à partir des formules (57) de [4] : si $A_{j+1} = \exp A_j + O(1)$ et si $\liminf ((j+1) - n(j)) < \infty$, p. s. (6.6) est violée pour une infinité de valeurs de j.

Voici deux questions auxquelles (1.2) et (1.4) répondent dans le cas $l_n = \alpha/n$ avec $\alpha > 1$, et qui restent ouvertes pour $l_n = 1/n$:

1. Pour quelles suites (a_n) positives décroissantes a-t-on

$$\text{p.s.}\quad \min_{t \in \mathbb{T}} \sum_{n \in \Lambda_t} a_n = \infty \,?$$

$\left[\text{on sait seulement, d'après (6.1), que } \sum \frac{a_n}{n \log n} = \infty \text{ est une condition}\right.$

$\left.\text{nécessaire}\right].$

2. Pour quelles fonctions croissantes φ et ψ a-t-on

$$\text{p.s.}\quad \liminf_{n \to \infty} \frac{\min_{t \in \mathbb{T}} N_n(t)}{\varphi(n)} > 0$$

$$\text{p.s.}\quad \liminf_{n \to \infty} \frac{\min_{t \in \mathbb{T}} N_n(t)}{\psi(n)} < \infty$$

[l'information donnée par (6.6) est très faible relativement à cette question].

RÉFÉRENCES

[1] A. DVORETZKY. On Covering a Circle by Randomly placed Arcs, *Pro. Nat. Acad. Sci. USA*, vol. **42**, 1956, p. 199-203.

[2] Ai Hua FAN, Décompositions de mesures et recouvrement aléatoires, *Publication Mathématique d'Orsay*, 1989-03.

[3] J. P. KAHANE, *Some random series of functions*, 1st éd., Heath, 1968, 2nd éd., Cambridge Univ. Press, 1985.

[4] J. P. KAHANE, Recouvrements aléatoires et théorie potentiel, *Colloq. Math.*, vol. **50-51**, 1990, p. 387-411.

[5] L. A. SHEPP, Covering the circle with random arcs, *Israel J. Math.*, **11**, 1972, p. 163-170.

(*Manuscrit reçu le* 6 *avril* 1992;
révisé le 31 *août* 1992.)