

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

BRUNO MASSÉ

Principes d'invariance pour la probabilité d'un dilaté de l'enveloppe convexe d'un échantillon

Annales de l'I. H. P., section B, tome 29, n° 1 (1993), p. 37-55

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1993__29_1_37_0>

© Gauthier-Villars, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Principes d'invariance pour la probabilité d'un dilaté de l'enveloppe convexe d'un échantillon

par

Bruno MASSÉ

Laboratoire de Statistique et Probabilités (M2),
Université des Sciences et Technologies de Lille,
59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France

RÉSUMÉ. — On étudie la vitesse de convergence de l'enveloppe convexe d'un échantillon vers l'enveloppe convexe du support de la loi et on obtient deux majorations, indépendantes de la loi, de l'écart avec 1 de la probabilité d'un dilaté de l'enveloppe convexe d'un échantillon.

Mots clés : Échantillon, estimation, support, enveloppe convexe.

ABSTRACT. — The rate of convergence of the convex hull of a random sample to the convex hull of the support of the underlying distribution is studied. Two distribution-independent bounds are obtained on the probability content of sets parallel to the convex hull.

I. INTRODUCTION

Le problème de l'estimation du support d'une loi de probabilité a été envisagé sous divers aspects : dans le cas d'un support de type

Classification A.M.S. : 60 A 10, 60 E 05.

$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 / 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq f(x)\}$ Geffroy (1964) et Jacob (1984) ont étudié un estimateur de f ; Guilbart (1973) étudie la continuité de l'application qui à toute probabilité sur $\mathbf{R}^N$ associe l'enveloppe convexe fermée de son support; Chevalier (1976) propose l'estimation du support, non nécessairement convexe, d'une probabilité sur $\mathbf{R}^N$ par la « méthode des partitions » et la « méthode des boules », il montre en particulier que certaines conditions sur la mesure des éléments de la partition ou des boules sont nécessaires à la convergence de l'estimateur; Ripley et Rasson (1977) se sont préoccupés de l'estimation du support, supposé convexe, d'un processus de Poisson homogène, ils en proposent en particulier un estimateur sans biais; enfin Jacob et Abbar (1989) ont proposé une méthode d'estimation du support, supposé être défini en coordonnées polaires dans le plan par $\{(\rho, \theta) / 0 \leq \theta \leq 2\pi; 0 \leq \rho \leq \phi(\theta); \phi(0) = \phi(2\pi)\}$, d'un processus ponctuel de Cox.

Dans cet article, on choisit, à la suite de plusieurs auteurs, d'estimer l'enveloppe convexe du support d'une loi de probabilité sur $\mathbf{R}^N$ à l'aide de l'enveloppe convexe d'un échantillon de cette loi; ce qui lie le problème de l'estimation du support à une notion qui a déjà été l'objet de nombreux travaux: les premiers semblent être ceux de Geffroy (1958), Raynaud (1965) et Rényi et Sulanke (1964); Efron (1965) étudie l'espérance mathématique du volume, du nombre de sommets, de faces et d'arêtes de l'enveloppe convexe d'un échantillon de loi quelconque sur $\mathbf{R}^2$ ou $\mathbf{R}^3$; Dwyer (1988), Buchta (1984), Van Wel (1989) et Bárány et Larman (1988) ont étudié divers aspects du comportement asymptotique de l'enveloppe convexe d'un échantillon de loi uniforme à support compact et convexe; Eddy et Gale (1981), dans le cas d'une loi à symétrie sphérique, puis Brozins et de Haan (1987), dans un cadre plus général, ont étudié la loi limite de la fonction de support de l'enveloppe convexe d'un échantillon; Fisher (1969) s'est placé dans le cas d'une loi produit de lois de probabilité sur $\mathbf{R}$; Buchta, Müller et Tichy (1985) ont choisi de tirer l'échantillon à partir d'une loi concentrée sur la frontière d'un convexe compact.

Dans le deuxième paragraphe de cet article, l'écart entre l'enveloppe convexe C_n^ω d'un échantillon de taille n et l'enveloppe convexe C_0 du support de la loi est mesurée à l'aide de l'espérance du volume de $C_0 \setminus C_n^\omega$, où C_n^ω est l'application qui à ω associe C_n^ω , dans le cas où C_0 est compact, et, dans le cas général, à l'aide de $E[P(\mathbf{R}^N \setminus C_n^\omega)]$ où P est la loi de l'échantillon. On obtient, pour ces deux quantités, des encadrements qui constituent une généralisation d'un résultat de Bárány et Larman ([13], p. 275) portant sur une loi uniforme sur un convexe compact. Puis on montre que la vitesse de décroissance vers 0 de ces deux écarts peut être rendue aussi lente que l'on veut en choisissant, pour le premier (resp. pour le deuxième) une loi chargeant peu (resp. beaucoup) un voisinage de la frontière de l'enveloppe convexe de son support.

D'où l'objet du troisième paragraphe qui est de déterminer un borélien peu « distant » de C_n^ω , ici un dilaté de C_n^ω , dont la probabilité tend vers 1 à une vitesse connue indépendante de P . Une réponse est donnée à ce problème par la propriété suivante, par ailleurs d'une portée bien plus générale, due à Geffroy et démontrée, dans le cadre qui nous intéresse, dans [20]: soit $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbf{N}^*$, P_n^* la mesure empirique associée à $\{X_1, \dots, X_n\}$, M le cardinal d'un ensemble de boules de rayon ε dont la réunion est de probabilité supérieure à $1 - \varepsilon/4$ et ρ la distance de Prokhorov; alors $\Pr \{ \rho(P_n^*, P) \geq \varepsilon \} \leq 2(M+1)e^{-2n(\varepsilon/2(M+1))^2}$.

On obtient bien sûr la même majoration pour $\Pr \{ P[\mathbf{R}^N \setminus (C_n^*)^a] \geq a \}$, où $a \in]0, 1[$, et une inégalité du même type pour $\Pr \{ P[\mathbf{R}^N \setminus (C_n^*)^a] \geq b \}$, où $a > 0$ et $b \in]0, 1[$, en adaptant légèrement la démonstration. Mais, dans les deux cas, le nombre M est inconnu, en l'absence de renseignements sur P , et le second membre de l'inégalité n'est assez petit que pour de très grandes valeurs de n ; ce qui semble inévitable pour une propriété portant sur tous les boréliens de $\mathbf{R}^N$ alors que nous ne considérons, ici, que C_n^ω .

Nous montrerons, dans un premier temps, que la probabilité maximale des demi-espaces d'intersection vide avec C_n^ω tend vers 0 à une vitesse indépendante de P . Puis on obtient deux inégalités de type exponentiel pour la probabilité d'un dilaté de C_n^ω ; dans la première l'ampleur de la dilatation dépend de l'« ampleur » de C_n^ω , alors que dans la seconde, elle est indépendante de ω . Dans le cas où l'espace des réalisations est $\mathbf{R}^2$, on obtient des vitesses de convergence particulièrement rapides à l'aide de techniques qui ne s'étendent pas aux espaces de dimension supérieure.

II. ÉTUDE DE L'ÉCART ENTRE L'ENVELOPPE CONVEXE D'UN ÉCHANTILLON ET L'ENVELOPPE CONVEXE DU SUPPORT DE LA LOI

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$ un espace probabilisé et $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et à valeurs dans $\mathbf{R}^N$, muni de sa tribu borélienne, indépendantes et de même loi P absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^N$ notée λ . On note C_0 l'enveloppe convexe du support de P . Pour tout $n \in \mathbf{N}^* = \mathbf{N} \setminus \{0\}$ et tout $\omega \in \Omega$, on note C_n^ω l'enveloppe convexe fermée de $\{X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)\}$ et C_n^* l'application qui à ω associe C_n^ω . Quel que soit $x \in \mathbf{R}^N$, $\mathcal{K}_x$ désigne l'ensemble des demi-espaces fermés dont la frontière contient x . Pour tout $\varepsilon \in [0, 1]$, on pose $S(\varepsilon) = \{x \in C_0 / \inf_{K \in \mathcal{K}_x} P(K) \leq \varepsilon\}$. Les ensembles $S(\varepsilon)$ ont déjà été

utilisés par Bárány et Larman ([13]) pour une loi P uniforme sur un convexe compact C_0 de $\mathbf{R}^N$; ils ont montré, en particulier, qu'il existe

$n_0, m_1 > 0$ et $m_2 > 0$ tels que

$$\forall n \geq n_0, \quad m_1 \lambda \left(S \left(\frac{1}{n} \right) \right) \leq E(\lambda(C_0 \setminus C_n^*)) \leq m_2 \lambda \left(S \left(\frac{1}{n} \right) \right).$$

La proposition suivante étend leur étude à une loi P continue à support compact d'enveloppe convexe C_0 , sans parvenir à la même précision.

PROPOSITION II. 1. — *Si P est à support compact d'enveloppe convexe C_0 , quel que soit $\varepsilon \in [0, 1]$ et quel que soit $n > N$,*

$$\lambda(S(\varepsilon)) + \lambda(C_0) \binom{n}{N-1} [(1-\varepsilon)^{n-N+1} + \varepsilon^{n-N+1}] \geq E[\lambda(C_0 \setminus C_n^*)] \geq (1-\varepsilon)^n \lambda(S(\varepsilon))$$

■ Soit $\varepsilon \in [0, 1]$ et $n > N$.

Soit v l'application de $\mathbf{R}^N$ dans $[0, 1]$ définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R}^N, \quad v(x) = \inf_{K \in \mathcal{K}_x} P(K).$$

Alors, quel que soit $x \in \mathbf{R}^N$,

$$(1-v(x))^n \leq \Pr(x \notin C_n^*) \leq \binom{n}{N-1} [(1-v(x))^{n-N+1} + (v(x))^{n-N+1}]. \quad (1)$$

Pour démontrer la première inégalité de (1), notons K_x un élément de $\mathcal{K}_x$ vérifiant $P(K_x) = v(x)$. Alors :

$$\bigcap_{i=1}^{i=n} \{ \omega / X_i(\omega) \notin K_x \} \subset \{ \omega / x \notin C_n^* \}.$$

Pour la deuxième inégalité de (1), notons Ω_0 l'ensemble des $\omega \in \Omega$ pour lesquels il n'existe pas $N+1$ points $X_i(\omega)$ ($i \leq n$) contenus dans un même hyperplan. P étant continue, $\Pr(\Omega_0) = 1$. Si $\omega \in \Omega_0$ est tel que $x \notin C_n^*$, alors il existe $N-1$ éléments $X_{i_1}, \dots, X_{i_{N-1}}(\omega)$ de $\{X_i(\omega) / i \geq n\}$ tels qu'un des deux demi-espaces délimités par l'hyperplan contenant $x, X_{i_1}(\omega), \dots, X_{i_{N-1}}(\omega)$ contient $\{X_i(\omega) / i \leq n\}$. Si on note K ce demi-espace,

$$P(K)^{n-N+1} + (1-P(K))^{n-N+1} \leq (v(x))^{n-N+1} + (1-v(x))^{n-N+1}$$

puisque $x \in K$ et la quantité $t^m + (1-t)^m$, pour $m \in \mathbf{R}^{+*} = \{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\}$ fixé et t variant dans $[0, 1]$, est maximale lorsque t ou $1-t$ est minimal. (2)

Or $E[\lambda(C_0 \setminus C_n^*)] = \int_{C_0} \Pr(x \notin C_n^*) dx$. Grâce à (1), on obtient donc :

$$\begin{aligned} \int_{C_0 \setminus S(\varepsilon)} \binom{n}{N-1} [(1-v(x))^{n-N+1} + v(x)^{n-N+1}] dx + \lambda(S(\varepsilon)) \\ \geq E[\lambda(C_0 \setminus C_n^*)] \geq \int_{S(\varepsilon)} (1-v(x))^n dx \end{aligned}$$

Ce qui permet de conclure, compte tenu de (2). ■

On peut aussi caractériser la qualité de C_n^ω , en tant qu'estimateur de l'enveloppe convexe du support de P , par la quantité $P(\mathbf{R}^N \setminus C_n^\omega)$.

On obtient alors la proposition suivante, qui se démontre comme la précédente, mais où on peut se passer de l'hypothèse sur la compacité du support de P .

PROPOSITION II.2. — *Quel que soit $\varepsilon \in [0, 1]$ et quel que soit $n > N$,*

$$P(S(\varepsilon))(1-\varepsilon)^n \leq E[P(\mathbf{R}^N \setminus C_n^\bullet)] \leq P(S(\varepsilon)) + \binom{n}{N-1} [(1-\varepsilon)^{n-N+1} + \varepsilon^{n-N+1}].$$

Remarque. — En prenant $\varepsilon = \frac{1}{n}$, puis $\varepsilon = \frac{1}{n^\alpha}$ où $\alpha \in]0, 1[$, on obtient des résultats comparables à celui, cité plus haut, obtenu par Bárány et Larman dans le cas où P est uniforme. Plus précisément : $\forall n > N$,

$$\frac{1}{4n} \leq \frac{1}{4} P\left(S\left(\frac{1}{n}\right)\right) \leq E[P(\mathbf{R}^N \setminus C_n^\bullet)] \leq P\left(S\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right) + \varphi_\alpha(n)$$

et

$$\frac{1}{4n} \lambda\left(S\left(\frac{1}{n}\right)\right) \leq E[\lambda(C_0 \setminus C_n^\bullet)] \leq \lambda\left(S\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right) + \varphi_\alpha(n) \lambda(C_0)$$

où $\forall n > N$,

$$\varphi_\alpha(n) = \binom{n}{N-1} \left(\exp\left(-\frac{n-N+1}{n^\alpha}\right) + \frac{1}{n^{\alpha(n-N+1)}} \right). \quad \blacksquare$$

Les deux exemples suivants montrent que les vitesses de convergence vers 0 de $E[\lambda(C_0 \setminus C_n^\bullet)]$ et de $E[P(\mathbf{R}^N \setminus C_n^\bullet)]$ peuvent être rendues aussi lentes que l'on veut par un choix adéquat de P .

Exemple 1. — Soit $\alpha > 6$ et P la probabilité sur $\mathbf{R}^2$ de densité f vérifiant : $f(x, y) = g(\sqrt{x^2 + y^2})$ où g est définie par

$$g(r) = \frac{4}{\pi} \left(1 - \frac{2\pi}{\alpha+1} \left(\frac{1}{2} \right)^{\alpha+1} \right) \quad \text{si } r \in \left] 0, \frac{1}{2} \right[,$$

$$g(r) = \frac{(1-r)^\alpha}{r} \quad \text{si } r \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right] \quad \text{et} \quad g(r) = 0 \quad \text{si } r > 1.$$

Soit $n > 2$ tel que

$$\frac{1}{n} < \frac{2\pi}{\alpha+1} \left(\frac{1}{2} \right)^{\alpha+1} \quad \text{et} \quad r_n = 1 - \left(\frac{\alpha+1}{2\pi n} \right)^{1/(\alpha+1)}.$$

Alors

$$r_n > \frac{1}{2}$$

et

$$P(B(0, 1) \setminus B(0, r_n)) = \frac{1}{n}$$

et

$$\lambda(B(0, 1) \setminus B(0, r_n)) \geq \pi \left(\frac{\alpha + 1}{2\pi n} \right)^{1/(\alpha + 1)}.$$

Donc $\lambda\left(S\left(\frac{1}{n}\right)\right) \geq \pi \left(\frac{\alpha + 1}{2\pi n} \right)^{1/(\alpha + 1)}$ et, d'après la proposition II.1,

$$\frac{\pi}{4} \left(\frac{\alpha + 1}{2\pi} \right)^{1/(\alpha + 1)} \left(\frac{1}{n} \right)^{1/(\alpha + 1)} \leq E[\lambda(B(0, 1) \setminus C_n^*)].$$

On pose $\beta = \frac{1}{\alpha + 1}$ et $k = \frac{\pi}{4} \left(\frac{1}{2\pi\beta} \right)^\beta$. Alors $\beta \in \left] 0, \frac{1}{7} \right[$ et on a montré que $\frac{k}{n^\beta} \leq E[\lambda(C_0 \setminus C_n^*)]$ pour tout $n > \frac{2^{1/\beta}}{2\pi\beta}$.

Exemple 2. — Soit $\alpha \in]0, 1[$ et h l'application de $]0, 1[$ dans $\mathbf{R}$ définie par

$$\forall r \in]0, 1[, \quad h(r) = \frac{(1 - r^2)^{\alpha/2}}{\pi^{1+\alpha} r^{1+\alpha} (1 - r)}.$$

Alors $h(r)$ est équivalent au voisinage de $r = 1$, à $\frac{2^{\alpha/2}}{\pi^{1+\alpha} (1 - r)^{1 - (\alpha/2)}}$.

Donc, pour tout $x \in]0, 1[$, l'intégrale $\int_x^1 h(r) r dr$ converge.

Soit $a \in]0, 1[$ tel que

$$A = 2\pi \int_a^1 h(r) r dr < 1.$$

Soit P la probabilité sur $\mathbf{R}^2$ de densité f vérifiant $f(x, y) = g(\sqrt{x^2 + y^2})$ où g est l'application de $\mathbf{R}^{+*}$ dans $\mathbf{R}$ définie par $g(r) = \frac{1 - A}{\pi a^2}$ si $r \in]0, a[$, $g(r) = h(r)$ si $r \in [a, 1[$ et $g(r) = 0$ si $r \geq 1$.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $r_n = \frac{n}{\sqrt{n^2 + \pi^2}} \geq a$.

Alors, si on note H une droite tangente à $B(0, r_n)$, $H \cap B(0, 1)$ a une longueur égale à $2\sqrt{1 - r_n^2} = \frac{2\pi}{\sqrt{n^2 + \pi^2}}$. Comme $B(0, r_n)$ a pour périmètre

$\frac{2n\pi}{\sqrt{n^2 + \pi^2}}$, il existe n demi-plans $K_1, \dots, K_n$, dont les frontières sont

tangentes à $B(0, r_n)$, vérifiant : $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}$

$$(K_i \cap B(0, 1)) \cap (K_j \cap B(0, 1)) = \emptyset.$$

Comme P est invariante par rotation, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$P(K_i \cap B(0, 1)) \leq \frac{1}{n}.$$

Ce qui prouve que $S\left(\frac{1}{n}\right)$ contient $B(0, 1) \setminus B(0, r_n)$.

De plus, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\lambda(K_i \cap B(0, 1)) \geq (1 - r_n) \sqrt{1 - r_n^2}$ et $f \geq g(r_n)$ sur $K_i \cap B(0, 1)$.

Donc

$$\begin{aligned} P\left(S\left(\frac{1}{n}\right)\right) &\geq P(B(0, 1) \setminus B(0, r_n)) \\ &\geq \sum_{i=1}^{i=n} P(K_i \cap B(0, 1)) \\ &\geq n(1 - r_n) \sqrt{1 - r_n^2} g(r_n) \\ &\geq n \left(\frac{\sqrt{1 - r_n^2}}{\pi r_n} \right)^{1+\alpha} = \frac{1}{n^\alpha} \end{aligned}$$

Ce qui, d'après la proposition II.2, prouve que : $\frac{1}{4n^\alpha} \leq E[P(\mathbf{R}^N \setminus C_n^*)]$, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $\frac{n}{\sqrt{n^2 + \pi^2}} \geq a$.

III. PROBABILITÉ D'UN DILATÉ DE L'ENVELOPPE CONVEXE D'UN ÉCHANTILLON

L'objet de la proposition III.2 est de montrer que la probabilité maximale des demi-espaces d'intersection vide avec C_n^* tend vers 0 à une vitesse indépendante de P . Sa démonstration utilise le lemme suivant.

LEMME III.1. — Soit A un polyèdre convexe de $\mathbf{R}^N$ et K un demi-espace d'intersection vide avec A . Alors K est contenu dans la réunion d'au plus N demi-espaces dont les frontières contiennent chacune une face de A .

■ Tout demi-espace d'intersection vide avec A étant contenu dans un demi-espace d'appui de A , on peut, sans perte de généralité, supposer que K est un demi-espace d'appui de A . On note H_1 la frontière de K .

Si $\dim(H_1 \cap A) < N - 1$, on considère H_1' l'hyperplan contenant une des faces définissant $H_1 \cap A$ et H_2 l'unique hyperplan d'appui de A ,

distinct de H'_1 , obtenu par rotation de H'_1 autour de $H'_1 \cap H_1$. Alors $\dim(H_2 \cap A) > \dim(H_1 \cap A)$ et K est contenu dans la réunion de deux demi-espaces de frontières H'_1 , qui contient une face de A , et H_2 .

Si $\dim(H_2 \cap A) < N-1$, on applique ce qui précède à $H_2 \cap A$ et K est alors contenu dans la réunion de trois demi-espaces de frontières H'_1 et H'_2 , qui contiennent chacun une face de A , et H_3 .

On parvient ainsi au bout de $m \leq N-1$ étapes, à construire $H'_1, \dots, H'_m$ et H_{m+1} contenant chacun une face de A et délimitant $m+1$ demi-espaces dont la réunion contient K . ■

Pour toute partie A de $\mathbf{R}^N$, on note $\bar{A}$ le complémentaire de A dans $\mathbf{R}^N$. $\mathcal{H}$ désigne l'ensemble des demi-espaces de $\mathbf{R}^N$. Soit $n > N$. Pour toute partie $\{i_1, \dots, i_N\}$ de $\{1, \dots, n\}$, on note $F_0(i_1, \dots, i_N)$ l'ensemble des $\omega \in \Omega$ pour lesquels l'enveloppe convexe fermée de $\{X_{i_1}(\omega), \dots, X_{i_N}(\omega)\}$ est une face de C_n^ω et $F_\varepsilon(i_1, \dots, i_N)$, pour $\varepsilon \in]0, 1/N[$, l'ensemble des $\omega \in F_0(i_1, \dots, i_N)$ pour lesquels le demi-espace d'appui de C_n^ω contenant $\{X_{i_1}(\omega), \dots, X_{i_N}(\omega)\}$ est de probabilité strictement supérieure à ε .

Soit $\varepsilon \in]0, 1/N[$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on note $Q(\varepsilon, \omega)$ le supremum de $P(K)$ pour les demi-espaces K d'intersection vide avec C_n^ω . Si ω est tel que $Q(\varepsilon, \omega) > N\varepsilon$, il existe une partie $\{i_1, \dots, i_N\}$ de $\{1, \dots, n\}$ vérifiant $\omega \in F_\varepsilon(i_1, \dots, i_N)$.

Ce qui, compte tenu de $\Pr[F_\varepsilon(1, \dots, N)] \leq (1-\varepsilon)^{n-N} + \varepsilon^{n-N}$, démontre la proposition suivante.

PROPOSITION III.2:

$$\forall \varepsilon \in]0, 1/N[, \quad \forall n > N, \\ \Pr \{ \omega / Q(\varepsilon, \omega) > N\varepsilon \} \leq \binom{n}{N} [(1-\varepsilon)^{n-N} + \varepsilon^{n-N}].$$

Remarque. — L'espérance mathématique du nombre de faces de C_n^ω vaut $\binom{n}{N} \Pr(1, \dots, N)$. Donc

$$\Pr(F_0(1, \dots, N)) \geq \frac{N+1}{\binom{n}{N}}$$

D'où

$$\Pr[F_\varepsilon(1, \dots, N) / F_0(1, \dots, N)] \leq \frac{\binom{n}{N}}{N+1} [(1-\varepsilon)^{n-N} + \varepsilon^{n-N}] \quad \blacksquare$$

L'objet des deux théorèmes suivants est de montrer que l'on peut obtenir une vitesse de convergence vers 1 de la probabilité d'un dilaté de C_n^ω indépendante de P , à condition d'adapter l'ampleur de la dilatation de C_n^ω

à l'ampleur de C_n^ω . On utilisera les notations suivantes : pour tout borélien B de $\mathbb{R}^N$, on note ∂B la frontière de B ,

$$\forall n > N \text{ et } \forall \omega \in \Omega, \\ R_n(\omega) = \inf \{ R > 0 / \exists x \in \mathbb{R}^N \text{ tel que } B(x, R) \supset C_n^\omega \},$$

pour toute partie A de $\mathbb{R}^N$ et tout $a > 0$, A^a désigne le dilaté d'ordre a de A , c'est-à-dire $\{x \in \mathbb{R}^N / d(x, A) \leq a\}$ où d désigne la distance euclidienne sur $\mathbb{R}^N$. Le nombre k , figurant dans les deux énoncés, exprime le lien existant entre l'ampleur de la dilatation, $a_n(\omega)$ ou $b_n(\omega)$, et $R_n(\omega)$; plus il est choisi grand et plus $a_n(\omega)$ ou $b_n(\omega)$ est petit, mais plus la vitesse de convergence obtenue est lente. Le second de ces deux théorèmes étudie le cas $N=2$ à l'aide de techniques qui ne semblent pas pouvoir se généraliser au cas $N > 2$ mais qui donnent une majoration nettement plus fine.

THÉORÈME III.3. — Soit $k > 3$. Pour tout $\omega \in \Omega$ et tout $n > N$, on pose $a_n(\omega) = \frac{2 R_n(\omega)}{k-3}$. Alors, quel que soit $\varepsilon \in]0, 1/N[$ et $n > N$,

$$\Pr \{ \omega / P[(C_n^\omega)^{a_n(\omega)}] < 1 - 2 N^2 k^{N-1} \varepsilon \} \leq \binom{n}{N} [(1-\varepsilon)^{n-N} + \varepsilon^{n-N}].$$

■ Soit $\varepsilon \in]0, 1/N[$, $n > N$ et ω tel que $Q(\varepsilon, \omega) \leq N\varepsilon$. Soit

$$S = \left\{ B\left(x_i, \frac{a_n(\omega)}{2}\right) / i \in \{1, \dots, m\} \right\}$$

un ensemble de boules fermées de rayon $\frac{a_n(\omega)}{2}$ centrées sur $\partial(C_n^\omega)^{a_n(\omega)}$ deux à deux disjointes. On suppose que S est maximal, c'est-à-dire que toute boule de rayon $\frac{a_n(\omega)}{2}$ centrée sur $\partial(C_n^\omega)^{a_n(\omega)}$ ne figurant pas dans S rencontre au moins un élément de S .

Soit $y \in \partial(C_n^\omega)^{a_n(\omega)}$. Il existe $i \in \{1, \dots, m\}$ tel que

$$B\left(y, \frac{a_n(\omega)}{2}\right) \cap B\left(x_i, \frac{a_n(\omega)}{2}\right) \neq \emptyset.$$

Donc $y \in B(x_i, a_n(\omega))$. Ce qui montre que

$$\partial(C_n^\omega)^{a_n(\omega)} \subset \bigcup_{i \leq m} B(x_i, a_n(\omega)).$$

Puisque C_n^ω est convexe, $\partial(C_n^\omega)^{a_n(\omega)} = \{x \in \mathbb{R}^N / d(x, C_n^\omega) = a_n(\omega)\}$.

Pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, il existe donc un demi-espace d'appui de C_n^ω , noté K_i , qui contient $B(x_i, a_n(\omega))$. D'où

$$\partial(C_n^\omega)^{a_n(\omega)} \subset \bigcup_{i \leq m} K_i.$$

Le convexe $\bigcap_{i \geq m} \overline{K_i}$ est donc contenu dans le complémentaire de $\partial (C_n^\omega)^{a_n(\omega)}$.

Ce qui prouve que :

$$\mathbf{R}^N \setminus (C_n^\omega)^{a_n(\omega)} \subset \bigcup_{i \leq m} K_i.$$

Or, quel que soit $i \in \{1, \dots, m\}$, l'intérieur de K_i est contenu dans $\overline{C_n^\omega}$.
Donc $P(K_i) \leq N \varepsilon$.

D'où $P[(C_n^\omega)^{a_n(\omega)}] \geq 1 - m N \varepsilon$.

Soit $i \in \{1, \dots, m\}$ et $z \in B\left(x_i, \frac{a_n(\omega)}{2}\right)$. Alors

$$\frac{a_n(\omega)}{2} \leq d(x_i, C_n^\omega) - d(z, x_i) \leq d(z, C_n^\omega) \leq d(x_i, C_n^\omega) + d(z, x_i) \leq \frac{3 a_n(\omega)}{2}.$$

Les boules $B\left(x_i, \frac{a_n(\omega)}{2}\right)$, pour $i \in \{1, \dots, m\}$, sont donc contenues dans $(C_n^\omega)^{(3/2) a_n(\omega)} \setminus (C_n^\omega)^{(1/2) a_n(\omega)}$; comme, de plus, elles sont disjointes,

$$\sum_{i=1}^{i=m} \lambda \left[B\left(x_i, \frac{a_n(\omega)}{2}\right) \right] \leq \lambda [(C_n^\omega)^{(3/2) a_n(\omega)} \setminus (C_n^\omega)^{(1/2) a_n(\omega)}].$$

La formule de Steiner ([21], p. 220) prouve, en particulier, que, si C_1 et C_2 sont deux convexes vérifiant $C_1 \subset C_2$ et α_1 et α_2 sont deux réels positifs tels que $\alpha_1 < \alpha_2$, alors $\lambda(C_1^{\alpha_2} \setminus C_1^{\alpha_1}) \leq \lambda(C_2^{\alpha_2} \setminus C_2^{\alpha_1})$. Donc, si x est tel que $B(x, R_n(\omega)) \supset C_n^\omega$,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{i=m} \lambda \left[B\left(x_i, \frac{a_n(\omega)}{2}\right) \right] \\ \leq \lambda \left[B\left(x, R_n(\omega) + \frac{3}{2} a_n(\omega)\right) \setminus B\left(x, R_n(\omega) + \frac{1}{2} a_n(\omega)\right) \right]. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} m \left(\frac{a_n(\omega)}{2} \right)^N &\leq \left(R_n(\omega) + \frac{3}{2} a_n(\omega) \right)^N - \left(R_n(\omega) + \frac{1}{2} a_n(\omega) \right)^N \\ &\leq a_n(\omega) N \left(R_n(\omega) + \frac{3}{2} a_n(\omega) \right)^{N-1} \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$m \leq 2 N \left(\frac{R_n(\omega) + (3/2) a_n(\omega)}{a_n(\omega)/2} \right)^{N-1} = 2 N k^{N-1}.$$

Donc

$$\{\omega/Q(\varepsilon, \omega) \leq N \varepsilon\} \subset \{\omega/P[(C_n^\omega)^{a_n(\omega)}] \geq 1 - 2 N^2 k^{N-1} \varepsilon\}.$$

Ce qui, avec la proposition III.2, permet de conclure. ■

THÉORÈME III.4. — Ici $N=2$. Soit $k > 2\pi + 4$. Pour tout $\omega \in \Omega$ et tout $n > 2$, on pose $b_n(\omega) = \frac{4\pi^2 R_n(\omega)}{(k-4)^2 - 4\pi^2}$. Alors, quel que soit $\varepsilon \in]0, 1/N[$ et $n > 2$,

$$\Pr \{ \omega / P [((C_n^\omega)^{b_n(\omega)}) < 1 - 2k\varepsilon] \leq \binom{n}{2} [(1-\varepsilon)^{n-2} + \varepsilon^{n-2}] \}.$$

■ On utilise les notations et le vocabulaire usuels de la géométrie affine. Soit $\varepsilon \in]0, 1/2[$, $n > 2$ et $\omega \in \Omega$ tels que $Q(\varepsilon, \omega) \leq 2\varepsilon$.

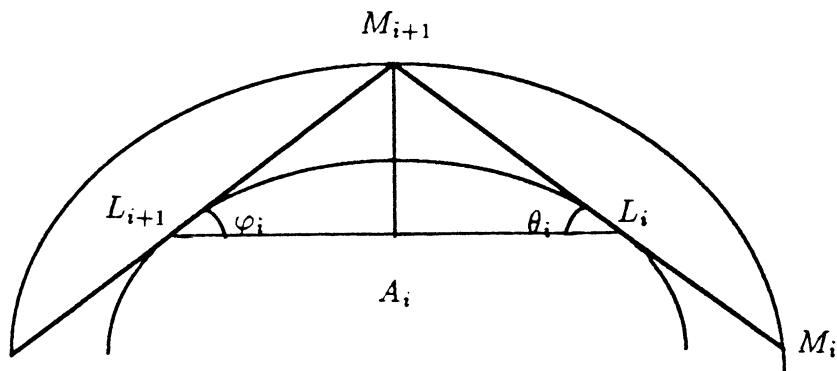
Soit M_1 un point de $\partial(C_n^\omega)^{b_n(\omega)}$. Il existe exactement deux droites d'appui de C_n^ω qui contiennent M_1 . Soit L_1 (resp. M_2) un point d'intersection de l'une d'entre elles, notée D_1 , avec ∂C_n^ω [resp. $\partial(C_n^\omega)^{b_n(\omega)}$]. Il n'existe qu'une seule droite d'appui de C_n^ω , notée D_2 , distincte de D_1 , qui contient M_2 . On note L_2 (resp. M_3) un point d'intersection de D_2 avec la frontière de C_n^ω [resp. $(C_n^\omega)^{b_n(\omega)}$]. On répète cette procédure jusqu'à obtenir une droite D_m délimitant un demi-plan d'appui de C_n^ω contenant M_1 .

Pour tout $i \in \{1, \dots, m-1\}$, notons A_i le projeté orthogonal de M_{i+1} sur la droite $(L_i L_{i+1})$ et θ_i (resp. φ_i) l'angle géométrique formé par les droites $(L_i L_{i+1})$ et $(L_i M_{i+1})$ [resp. $(M_{i+1} L_{i+1})$]. Alors :

$$\sum_{i=1}^{m-1} (\theta_i + \varphi_i) \leq 2\pi$$

et

$$\sum_{i=1}^{m-1} (L_i M_{i+1} + M_{i+1} L_{i+1}) \leq 2\pi (R_n(\omega) + b_n(\omega))$$



Si A_i est intérieur à C_n^ω , alors :

$$b_n(\omega) \leq M_{i+1} A_i \leq M_{i+1} L_i \times \sin \theta_i \leq \theta_i \times M_{i+1} L_i$$

et

$$b_n(\omega) \leq M_{i+1} A_i \leq L_{i+1} M_{i+1} \times \sin \varphi_i \leq \varphi_i \times L_{i+1} M_{i+1}.$$

Sinon, $\theta_i + \varphi_i > \pi/2$; ce qui ne peut pas se produire pour plus de trois indices i .

Si $m > 4$, nous disposons d'au moins $2m - 2 - 2 \times 3 = 2m - 8$ nombres ψ_i et d'au moins $2m - 8$ nombres d_i vérifiant :

$$\sum_{i=1}^{i=2m-8} \psi_i \leq 2\pi$$

$$\sum_{i=1}^{i=2m-8} d_i \leq 2\pi (R_n(\omega) + b_n(\omega))$$

et

$$\forall i \in \{1, \dots, 2m-8\}, \quad b_n(\omega) \leq \psi_i d_i$$

Il existe nécessairement une partie $\{d_{j_1}, \dots, d_{j_{m-4}}\}$ de $m-4$ éléments de $\{d_1, \dots, d_{2m-8}\}$ vérifiant :

$$\forall i \in \{1, \dots, m-4\}, \quad d_{j_i} \leq \frac{2\pi (R_n(\omega) + b_n(\omega))}{m-4}.$$

Donc

$$\forall i \in \{1, \dots, m-4\}, \quad \psi_{j_i} \geq \frac{(m-4)b_n(\omega)}{2\pi (R_n(\omega) + b_n(\omega))}.$$

Ce qui entraîne :

$$2\pi \geq \sum_{i=1}^{i=2m-8} \psi_i \geq \sum_{i=1}^{i=m-4} \psi_{j_i} \frac{(m-4)^2 b_n(\omega)}{2\pi (R_n(\omega) + b_n(\omega))}.$$

$$\text{Donc } m \leq 2\pi \sqrt{\frac{R_n(\omega)}{b_n(\omega)}} + 1 + 4.$$

Ce qui permet de conclure puisque, si pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$ on note K_i le demi-plan d'appui de C_n^ω délimité par D_i ,

$$\mathbf{R}^2 \setminus (C_n^\omega)^{b_n(\omega)} \subset \bigcup_{i=1}^{i=m} K_i. \quad \blacksquare$$

Remarques. — 1) Pour $N > 2$, un nombre m suffisant de demi-espaces d'appui de C_n^ω recouvrant $\mathbf{R}^N \setminus (C_n^\omega)^a$ peut s'exprimer en fonction de a et de $\lambda[(C_n^\omega)^a \setminus C_n^\omega]$.

$$\text{Plus précisément } m \frac{2\pi^{N/2}}{N\Gamma(N/2)} \left(\frac{a}{2}\right)^N \leq \lambda[(C_n^\omega)^a \setminus C_n^\omega].$$

Pour calculer un majorant de m et lui faire jouer le rôle de $2Nk^{N-1}$ dans le théorème III.3, il faudrait être en mesure, connaissant C_n^ω , d'exprimer $\lambda[(C_n^\omega)^a \setminus C_n^\omega]$ en fonction de a . La formule de Steiner ([21], p. 220) le permet, mais son utilisation nécessite la connaissance de caractéristiques de C_n^ω difficiles à calculer.

2) A l'aide des théorèmes III.3 et III.4, on obtient: $\forall \varepsilon \in]0, 1/N[$ et $\forall n > N$,

$$E[P(\mathbf{R}^N \setminus (C_n^{a_n(\cdot)}))] \leq \binom{n}{N} [(1-\varepsilon)^{n-N} + \varepsilon^{n-N}] + 2N^2 k^{N-1} \varepsilon \quad (1)$$

et, si $N=2$,

$$E[P(\mathbf{R}^2 \setminus (C_n^{b_n(\cdot)}))] \leq \binom{n}{2} [(1-\varepsilon)^{n-2} + \varepsilon^{n-2}] + 2k\varepsilon \quad (2)$$

où les nombres k sont définis dans l'énoncé des théorèmes.

Si on prend $\varepsilon = \frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha \in]0, 1[$, on obtient: $\forall n > N$,

$$E[P(\mathbf{R}^N \setminus (C_n^{a_n(\cdot)}))] \leq \binom{n}{N} \left[\exp\left(\frac{n-N}{n^\alpha}\right) + \frac{1}{n^{\alpha(n-N)}} \right] + 2N^2 k^{N-1} \frac{1}{n^\alpha}$$

et

$$E[P(\mathbf{R}^2 \setminus (C_n^{b_n(\cdot)}))] \leq \binom{n}{2} \left[\exp\left(\frac{n-2}{n^\alpha}\right) + \frac{1}{n^{\alpha(n-2)}} \right] + 2k \frac{1}{n^\alpha}. \quad \blacksquare$$

L'objet du théorème III.6 est de donner une majoration de $E[P(\mathbf{R}^N \setminus (C_n^a))]$ où a est indépendant de ω ; on obtient de plus des majorants qui, dans certains cas, sont plus petits que ceux figurant dans (1) et (2). Sa démonstration utilise le lemme suivant.

Pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$, on note $\mathcal{K}(\varepsilon)$ l'ensemble des demi-espaces d'intersection vide avec $T(\varepsilon) = \mathbf{R}^N \setminus S(\varepsilon)$

LEMME III.5:

$$\forall \varepsilon \in]0, 1/N[, \quad \sup_{K \in \mathcal{K}(\varepsilon)} P(K) \leq N\varepsilon.$$

■ Soit $\varepsilon \in]0, 1/N[$.

Remarquons d'abord que $T(\varepsilon)$ est convexe. En effet considérons x et y deux points distincts de $T(\varepsilon)$; s'il existait un point z du segment $[x, y]$ tel que $z \in S(\varepsilon)$, alors le demi-espace K contenant z sur sa frontière et vérifiant $P(K) \leq \varepsilon$ contiendrait soit x , soit y , soit les deux; ce qui est impossible.

Remarquons ensuite que tout demi-espace K d'appui de $T(\varepsilon)$ en un point régulier x de sa frontière vérifie $P(K) \leq \varepsilon$. En effet tout autre hyperplan passant par x traverse l'intérieur de $T(\varepsilon)$; il délimite donc un demi-espace de probabilité strictement supérieure à ε .

Soit $a > 0$ et $\{B(x_i, a/2) / i \in \{1, \dots, m\}\}$ un recouvrement fini de $\partial T(\varepsilon)$ à l'aide de m boules centrées sur $\partial T(\varepsilon)$ où on impose à m d'être strictement supérieur à N .

L'ensemble des points irréguliers de $\partial T(\varepsilon)$ ayant un projeté, sur une sphère intérieure à $T(\varepsilon)$, de mesure de Lebesgue nulle ([22], p. 136), pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, il existe $y_i \in B(x_i, a/2)$ point régulier de $\partial T(\varepsilon)$. Pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, on note H_i l'unique hyperplan d'appui de $T(\varepsilon)$ en y_i ,

V_i le vecteur normal unitaire orienté vers $T(\varepsilon)$ de H_i , H'_i l'image de H_i par la translation de vecteur aV_i , K_i le demi-espace d'appui de $T(\varepsilon)$ de frontière H_i et K'_i le demi-espace ouvert de frontière H'_i contenant $B(y_i, a)$.

Soit A le polyèdre convexe défini par $A = \bigcap_{i=1}^m (\mathbf{R}^N \setminus K'_i)$.

Soit $K \in \mathcal{K}(\varepsilon)$, alors, puisque $\partial T(\varepsilon) \subset \bigcup_{i=1}^m B(y_i, a)$, $K \cap A = \emptyset$ et, d'après le lemme III.1, $K \subset \bigcup_{j=1}^{n_0} K'_{i_j}$ où $n_0 \leq N$ et, pour $j=1$ à $j=n_0$, $i_j \in \{1, \dots, m\}$.

Donc

$$P(K) \leq \sum_{j=1}^{j=n_0} P(K'_{i_j}) \leq \sum_{j=1}^{j=n_0} [P(K_{i_j}) + P(K'_{i_j} \setminus K_{i_j})] \leq N\varepsilon + N \sup_{B \in \beta_a} P(B) \quad (1)$$

où β_a désigne l'ensemble des bandes de $\mathbf{R}^N$ de largeur a . Or $\lim_{a \rightarrow 0} \sup_{B \in \beta_a} P(B) = 0$ car P est continue ([20], p. 66). Grâce à (1), a étant arbitraire,

$$P(K) \leq N\varepsilon. \quad \blacksquare$$

Soit $\varepsilon \in]0, 1/N[$, $x_0 \in \mathbf{R}^N$, $R \in \mathbf{R}^{+*}$ et $r \in \mathbf{R}^{+*}$ tels que

$$B(x_0, r) \subset T(\varepsilon) \subset B(x_0, R).$$

On pose de nouveau $v(x_0) = \inf_{K \in \mathcal{K}_{x_0}} P(K)$ où $\mathcal{K}_{x_0}$ est l'ensemble des demi-espaces de frontière contenant x_0 .

THÉOREME III.6. — *Quel que soit $a \in]0, r[$ et quel que soit $n > N$, $E[P(\mathbf{R}^N \setminus (C_n^*)^a)]$*

$$\leq 2 \binom{n}{N-1} [(1-\varepsilon)^{n-N+1} + \varepsilon^{n-N+1}] + 2N^2 \left(\frac{2R^2}{ar} + 3 \right)^{N-1} \varepsilon,$$

et, si $N=2$,

$$E[P(\mathbf{R}^2 \setminus (C_n^*)^a)] \leq 2n[(1-\varepsilon)^{n-1} + \varepsilon^{n-1}] + \left(4\pi \sqrt{\frac{R^2}{ar}} + 1 + 10 \right) \varepsilon.$$

■ Soit $a \in]0, r[$ et $n > N$.

$$\text{Soit } T_a(\varepsilon) = \left\{ y = x + a \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|} \mid x \in T(\varepsilon) \setminus \{x_0\} \right\}.$$

La majoration de

$$E[P(\mathbf{R}^N \setminus (C_n^*)^a)] = \int_{\mathbf{R}^N} \Pr(x \notin (C_n^*)^a) dP(x)$$

se fait en trois étapes.

$$1) \text{ Majoration de } \int_{B(x_0, a)} \Pr(x \notin (C_n^*)^a) dP(x)$$

Si $x \in B(x_0, a)$, alors $\Pr[(x \notin (C_n^*)^a)/(x_0 \in C_n^*)] = 0$. Donc

$$\begin{aligned} & \int_{B(x_0, a)} \Pr(x \notin (C_n^*)^a) dP(x) \\ &= \int_{B(x_0, a)} \Pr[(x \notin (C_n^*)^a)/(x_0 \notin C_n^*)] \Pr(x_0 \notin C_n^*) dP(x) \\ &\leq \Pr(x_0 \notin C_n^*) \times P(B(x_0, a)) \\ &\leq \binom{n}{N-1} [(1-v(x_0))^{n-N+1} + v(x_0)^{n-N+1}] \times P(B(x_0, a)) \\ &\leq \binom{n}{N-1} [(1-\varepsilon)^{n-N+1} + \varepsilon^{n-N+1}] \times P(B(x_0, a)) \end{aligned}$$

Car $x_0 \in T(\varepsilon)$ et la quantité $t^m + (1-t)^m$, pour $m \in \mathbf{R}^{+*}$ fixé et t variant dans $[0, 1]$, est maximale lorsque t ou $(1-t)$ est minimal.

$$2) \text{ Majoration de } \int_{T_a(\varepsilon)} \Pr(x \notin (C_n^*)^a) dP(x)$$

D'une part

$$\begin{aligned} & \int_{T_a(\varepsilon)} \Pr[(x \notin (C_n^*)^a) \cap (x_0 \notin C_n^*)] dP(x) \\ &\leq \int_{T_a(\varepsilon)} \Pr(x_0 \notin C_n^*) dP(x) \\ &\leq \binom{n}{N-1} [(1-\varepsilon)^{n-N+1} + \varepsilon^{n-N+1}] \times P(T_a(\varepsilon)). \end{aligned}$$

D'autre part, si x et ω sont tels que $x \notin (C_n^\omega)^a$, alors $x - a \frac{x-x_0}{\|x-x_0\|} \notin C_n^\omega$;

de plus, quel que soit $x \in T_a(\varepsilon)$, $x - a \frac{x-x_0}{\|x-x_0\|} \in T(\varepsilon)$. Donc

$$\begin{aligned} & \int_{T_a(\varepsilon)} \Pr[(x \notin (C_n^*)^a) \cap \{x_0 \in C_n^*\}] dP(x) \\ &\leq \int_{T_a(\varepsilon)} \Pr\left(x - a \frac{x-x_0}{\|x-x_0\|} \notin C_n^\omega\right) dP(x) \\ &\leq \binom{n}{N-1} [(1-\varepsilon)^{n-N+1} + \varepsilon^{n-N+1}], \end{aligned}$$

grâce aux arguments figurant dans la démonstration de la proposition II. 1.

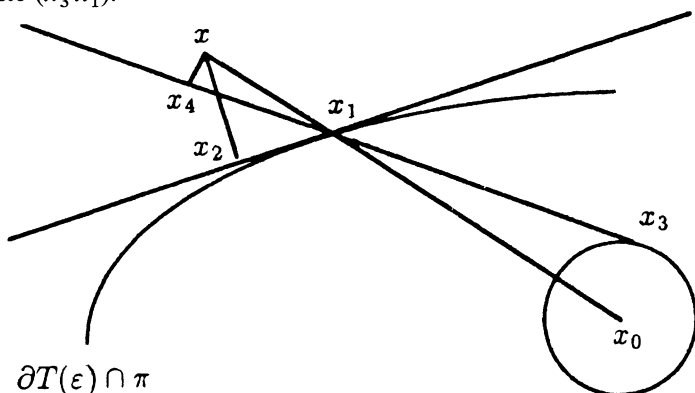
3) Majoration de $\int_{\mathbf{R}^N \setminus T_a(\varepsilon)} \Pr(x \notin (C'_n)^a) dP(x)$

On se contente de majorer $P(\mathbf{R}^N \setminus T_a(\varepsilon))$.

Remarquons d'abord que $T_a(\varepsilon) \supset (T(\varepsilon))^{ar/R}$ (1)

En effet: soit $x \in \partial T_a(\varepsilon)$, $x_1 \in \partial T(\varepsilon)$ tel que $x - x_1 = a \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|}$, H un hyperplan d'appui de $T(\varepsilon)$ en x_1 et x_2 le projeté orthogonal de x sur H .

Si $x_2 \neq x_1$, soit π le sous-espace affine de dimension 2 contenant x , x_1 et x_2 (si $N=2$, $\pi = \mathbf{R}^2$). Comme π contient x_0 , il existe $x_3 \in \partial B(x_0, r)$ tel que $x - x_0$ est orthogonal à $x_3 - x_0$ et l'intersection des droites $(x_3 x_1)$ et (xx_2) appartient au segment $[x, x_2]$. Soit x_4 le projeté orthogonal de x sur la droite $(x_3 x_1)$.



$$\text{Alors } \|x - x_2\| \geq \|x - x_4\| = \|x_3 - x_0\| \times \frac{\|x_1 - x\|}{\|x_1 - x_0\|} \geq \frac{ra}{R}.$$

Si $x_2 = x_1$, alors $\|x - x_2\| = a$.

Or la distance de x à $T(\varepsilon)$ est supérieure à celle de x à H .

a) Si $N > 2$, en procédant comme dans la démonstration du théorème III.3, on recouvre $\mathbf{R}^N \setminus (T(\varepsilon))^{ar/R}$ à l'aide de $m \leq 2N \left(\frac{2R^2}{ar} + 3 \right)^{N-1}$ demi-espaces contenus dans $\mathbf{R}^N \setminus T(\varepsilon)$. Le lemme III.5, et (1) prouvent alors que:

$$P(\mathbf{R}^N \setminus T_a(\varepsilon)) \leq 2N^2 \left(\frac{2R^2}{ar} + 3 \right)^{N-1} \varepsilon.$$

b) Si $N=2$, en procédant comme dans la démonstration du théorème III.4, on recouvre $\mathbf{R}^2 \setminus (T(\varepsilon))^{ar/R}$ à l'aide de $m \leq 2\pi \sqrt{\frac{R^2}{ar} + 1} + 5$

demi-plans contenus dans $\mathbf{R}^2 \setminus T(\varepsilon)$. Le lemme III.5, et (1) prouvent alors que :

$$P(\mathbf{R}^2 \setminus T_a(\varepsilon)) \leq \left(4\pi \sqrt{\frac{R^2}{ar}} + 1 + 10 \right) \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Si la densité f de P est telle qu'il existe une application g de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}^+$ vérifiant $f(x) = g(\|x\|)$ pour tout $x \in \mathbf{R}^N$, tous les ensembles $T(\varepsilon)$, pour $\varepsilon \in]0, 1[$, sont des boules et on peut prendre $r = R$. Pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$, notons $R(\varepsilon)$ le rayon de $T(\varepsilon)$. On obtient le corollaire suivant :

COROLLAIRE III.7. — *Quel que soit $\varepsilon \in]0, 1[$, $n > N$ et $a \in]0, R(\varepsilon)[$,*

$$E[P(\mathbf{R}^N \setminus (C_n^a))] \leq 2 \binom{n}{N-1} [(1-\varepsilon)^{n-N+1} + \varepsilon^{n-N+1}] + 2N^2 \left(\frac{2R(\varepsilon)}{a} + 3 \right)^{N-1} \varepsilon,$$

et, si $N = 2$,

$$E[P(\mathbf{R}^2 \setminus (C_n^a))] \leq 2n[(1-\varepsilon)^{n-1} + \varepsilon^{n-1}] + \left(4\pi \sqrt{\frac{R(\varepsilon)}{a}} + 1 + 10 \right) \varepsilon,$$

IV. CONCLUSIONS

Les arguments qui précèdent l'énoncé de la proposition III.2, montrent que $\Pr(T(\varepsilon) \subset C_n^a) \geq 1 - \binom{n}{N} [(1-\varepsilon)^{n-N} + \varepsilon^{n-N}]$. Ce qui permet l'estimation d'un majorant du nombre R du théorème III.6 et du nombre $R(\varepsilon)$ du corollaire III.7, à l'aide du rayon minimal des boules contenant C_n^a .

Les théorèmes III.3 et III.4 permettent d'estimer un majorant du nombre M , figurant dans l'énoncé de la propriété de Geffroy citée dans l'introduction, qui est la seule quantité dépendant de P qui intervient dans cette propriété. Il suffit pour cela de choisir ε et k de sorte que $2N^2 k^{N-1} \varepsilon < \frac{\alpha}{4}$, ou, si $N = 2$, $2k\varepsilon < \frac{\alpha}{4}$, et de déterminer un nombre suffisant de boules de rayon α dont la réunion contient $(C_n^a)^{a_n(\omega)}$, ou $(C_n^a)^{b_n(\omega)}$ si $N = 2$.

Si on ne dispose pas de renseignement sur P , il est impossible de calculer directement $P(\mathbf{R}^N \setminus C_n^a)$; en revanche, dès que l'on a pu caractériser C_n^a (ce qui, si N est grand, demande des calculs lourds) on connaît le nombre de ses sommets. Efron ([4], p. 335) a démontré que

$$E\left(\frac{M_{n+1}}{n+1}\right) = E[P(\mathbf{R}^N \setminus C_n)]$$

où M_{n+1} désigne le nombre de sommets de C_{n+1} . Mais, si ces espérances sont grandes, l'écart entre $\frac{M_{n+1}(\omega)}{n+1}$ et $E[P(\mathbf{R}^N \setminus C_n^*)]$ peut, *a priori*, être important avec une probabilité non négligeable. Il serait donc intéressant de connaître des majorants, indépendants de P , de la variance de M_n ou des quantités $\Pr(|M_n - E[P(\mathbf{R}^N \setminus C_{n-1})]| > \varepsilon)$ et $\Pr(|M_n - P(\mathbf{R}^N \setminus C_{n-1}^*)| \geq \varepsilon)$.

REMERCIEMENTS

L'auteur tient à remercier sincèrement le referee pour les améliorations et les nombreuses corrections qu'il a apportées au manuscrit.

RÉFÉRENCES

- [1] GEFFROY, Contribution à la théorie des valeurs extrêmes, *Thèse d'État*, Faculté des Sciences de Paris, 958.
- [2] RÉNYI et SULANKE, Über die konvexe Hülle von n zufällig gewählten Punkten II, *Z. W.*, vol. **3**, p. 138-147.
- [3] GEFFROY, Sur un problème d'estimation géométrique, *Pub. I.S.U.P.*, vol. **13**, 1964, p. 191-200.
- [4] EFRON, The Convex Hull of a Random Set of Points, *Biometrika*, vol. **52**, 3 and 4, 1965, p. 331-343.
- [5] RAYNAUD, Sur le comportement asymptotique de l'enveloppe convexe d'un nuage de points tirés au hasard dans $\mathbf{R}^n$, *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. **262**, série A, 1965, p. 617-623.
- [6] GUILBART, Étude de la continuité de l'application H qui à toute mesure de probabilité définie sur $\mathbf{R}^N$ fait correspondre l'enveloppe convexe fermée du support de cette mesure, *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. **277**, série A, 1973, p. 999-1002.
- [7] CHEVALIER, Estimation du support et du contour du support d'une loi de probabilité, *Ann. Inst. Henri Poincaré B. III*, vol. **4**, 1976, p. 339-364.
- [8] RIPLEY et RASSON, Finding the Edge of a Poisson Forest, *J. Appl. Prob.*, vol. **14**, 1977, p. 483-491.
- [9] EDDY et GALE, The Convex Hull of a Spherically symmetric Sample, *Adv. Appl. Prob.*, vol. **13**, 1981, p. 751-763.
- [10] BUCHTA, Stochastic Approximation Konvexer Polygone, *Z. W.*, vol. **67**, 1984, p. 283-304.
- [11] JACOB, Estimation du contour discontinu d'un processus ponctuel sur le plan, *Pub. I.S.U.P.*, vol. **XXIX**, 3-4, 1984, p. 1-25.
- [12] BROZIUS et DE HAAN, On Limiting Laws for the Convex Hull of a Sample, *J. Appl. Prob.*, vol. **24**, 1987, p. 852-862.
- [13] BARÁNY et LARMAN, Convex Bodies, Economic Cap Coverings, Random Polytopes, *Mathematika*, vol. **35**, 1988, p. 274-291.
- [14] JACOB et ABBAR, Estimating the Edge of a Cox Process Area, *Pub. I.R.M.A., Lille*, vol. **13**, VII, 1988, p. 1-17.
- [15] VAN WEL, The Convex Hull of a Uniform Sample from the Interior of a Simple d -Polytope, *J. Appl. Prob.*, vol. **26**, 1989, p. 259-273.

- [16] GRÜBER, Approximation of Convex Bodies. Dans *Convexity and its Applications*, GRÜBER et WILLS éd., Birkhäuser, 1983.
- [17] DWYER, On the Convex Hull of a Random Points in a Polytope, *J. Appl. Prob.*, vol. **25**, 1988, p. 688-699.
- [18] BUCHTA, MÜLLER et TICHY, Stochastical Approximation of Convex Bodies, *Math. Ann.*, vol. **271**, 1985, p. 225-235.
- [19] FISHER, Limiting Sets and Convex Hulls of Samples from Product Measures, *Ann. Math. Stat.*, vol. **40**, 5, 1969, p. 1824-1832.
- [20] MASSÉ, Concentration des mesures bornées sur $\mathbf{R}^N$ et problèmes statistiques associés, *Statistique et Analyse des Données*, vol. **13**, 1, 1988, p. 59-113.
- [21] SANTALO, *Integral Geometry and Geometric Probability*, Addison-Wesley Publishing, 1976.
- [22] VALENTINE, *Convex Sets*, McGraw Hill, New-York, 1964.

(Manuscrit reçu le 11 février 1991;
révisé le 20 mai 1992.)