ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

JEAN BERTOIN

# Sur la décomposition de la trajectoire d'un processus de Lévy spectralement positif en son infimum

*Annales de l'I. H. P., section B*, tome 27, nº 4 (1991), p. 537-547

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1991__27_4_537_0>

© Gauthier-Villars, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (http://www.elsevier.com/locate/anihpb) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

*Ann. Inst. Henri Poincaré,*

Vol. 27, n° 4, 1991, p. 537-547. *Probabilités et Statistiques*

# Sur la décomposition de la trajectoire d'un processus de Lévy spectralement positif en son infimum

par

**Jean BERTOIN**

Laboratoire de Probabilités (L.A. n° 224), Tour 56,
Université Pierre-et-Marie-Curie,
4, place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France

RÉSUMÉ. — Soit X un processus de Lévy spectralement positif qui dérive vers $+\infty$. On montre que le processus pré-infimum a même loi que le processus de Lévy obtenu en conditionnant X à dériver vers $-\infty$, et tué quand il atteint l'opposé d'une v. a. exponentielle indépendante. On étend ensuite le théorème de Pitman inverse pour donner une construction trajectorielle du processus X conditionné à dériver vers $-\infty$ à partir du processus post-infinum.

*Mots clés :* Décomposition de trajectoires, processus de Lévy spectralement positif, théorème de Pitman.

ABSTRACT. — Let X be a spectrally positive Lévy process that drifts to $+\infty$. We show that the pre-infimum process has the same law as the Lévy process obtained by conditioning X to drift to $-\infty$, and killed at the first hitting time of the opposite of an independent exponential r. v. Then, we extend the inverse Pitman's Theorem to give a pathwise construction of the process X conditioned to drift to $-\infty$ from the post-infimum process.

*Classification A.M.S. :* 60 J 30.

## 0. INTRODUCTION

Williams [10] a montré que, quand on décompose la trajectoire d'un mouvement brownien avec dérive $\delta > 0$ en l'unique instant en lequel elle atteint son minimum absolu, on obtient deux processus indépendants. Le processus pré-minimum est un mouvement brownien avec dérive $-\delta$ tué au premier temps d'atteinte de l'opposé d'une v. a. exponentielle indépendante, et le processus post-minimum est un mouvement brownien avec dérive $\delta$ conditionné à rester positif. Ce résultat a suscité une abondante littérature, diverses extensions en ont été données, et dans cette direction, un des travaux les plus accomplis est sans doute celui de Millar [6] que nous rappelons partiellement ci-dessous (*voir* également Greenwood-Pitman [4] pour une approche simplifiée par la théorie des excursions).

Soient X un processus de Lévy, et $\underline{X}$ son processus infimum. Quand X dérive vers $+\infty$, c'est-à-dire quand $\lim_{t \uparrow \infty} X_t = +\infty$ p. s., on note $\rho = \sup\{t : X_t = \underline{X}_\infty \text{ ou } X_{t-} = \underline{X}_\infty\}$, le dernier instant en lequel X atteint son infimum (éventuellement comme limite à gauche). On a le

THÉORÈME (Millar). — *Si* X *dérive vers* $+\infty$, *le processus post-infimum* $(X_{\rho+t} - \underline{X}_\infty,\ t \geqq 0)$ *a même loi que* X *conditionné à rester positif. De plus, il est indépendant du processus pré-infimum* $(X_t,\ 0 \leqq t < \rho)$.

Ce théorème n'étend toutefois que partiellement celui de Williams, puisqu'il ne décrit pas le processus pré-infimum.

Nous nous intéressons ici au cas où X est un processus de Lévy spectralement positif (p.L.s.p.), c'est-à-dire que X a des accroissements indépendants et homogènes, et n'a pas de saut négatif. Nous montrons que le théorème de Millar peut alors être complété de la façon suivante : le processus pré-infimum a la même loi qu'un second processus de Lévy (obtenu en conditionnant X à dériver vers $-\infty$) tué en son premier temps d'atteinte de l'opposé d'une v.a. exponentielle indépendante. Ce résultat repose sur la théorie des excursions qui est particulièrement simple à utiliser dans le cas présent, car on dispose de descriptions explicites de la mesure des excursions de X au-dessus de son infimum.

Rogers-Pitman [9] ont donné une approche élégante de la décomposition de Williams à partir d'une extension du théorème de Pitman [7] pour le mouvement brownien avec dérive. Plus précisément, ces auteurs ont montré que si X est un mouvement brownien avec dérive $\delta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, et si $\bar{X}$ est son processus suprémum passé, alors $2\bar{X} - X$ est un mouvement brownien avec dérive $|\delta|$ conditionné à rester positif. De plus, cette transformation des trajectoires est inversible quand $\delta > 0$, car alors $\bar{X}$ est le processus infimum futur de $2\bar{X} - X$, et la transformation inverse permet de reconstruire un mouvement brownien avec dérive $\delta > 0$ à partir du processus conditionné à rester positif. Le théorème de Williams découle alors du fait que la loi du processus conditionné à rester positif ne dépend pas du signe de δ. D'autre part, dans [1], nous avons étendu le théorème de Pitman « direct » de la façon suivante : si X est un p.L.s.p., $\bar{X}$ son processus suprémum passé, $\bar{X}^c$ la partie continue de $\bar{X}$, et $\bar{J}_t$ la somme des sauts effectués par X en les temps $s \leqq t$ en lesquels $\bar{X}$ saute, alors $X-2\bar{X}^c-\bar{J}$ a même loi que X conditionné à rester négatif. On notera qu'il est toujours possible de conditionner un p.L.s.p. à rester négatif (même s'il dérive vers $+\infty$), et que la transformation des trajectoires qui permet d'étendre le théorème de Pitman, n'est pas inversible quand X a des sauts.

Nous obtenons ici une extension du théorème de Pitman « inverse » : X étant un p.L.s.p. qui dérive vers $+\infty$, on note $\underline{\underline{X}}$ le processus infimum futur de X, $\underline{\underline{X}}^c$ la partie continue de $\underline{\underline{X}}$, et $\underline{\underline{J}}_t$ la somme des sauts effectués par X en les temps $s \leqq t$ en lesquels $\underline{\underline{X}}$ saute. Le processus $X-2\underline{\underline{X}}^c-\underline{\underline{J}}$ a alors même loi que X conditionné à dériver vers $-\infty$. Ce résultat, associé au théorème de Millar, donne une transformation trajectorielle permettant de passer de la loi de X conditionné à rester positif à celle de X conditionné à dériver vers $-\infty$. Cette fois encore, la transformation n'est pas inversible quand X n'est pas continu. On notera que quand X dérive vers $-\infty$, c'est le processus post-suprémum qu'on construit à partir du processus initial, alors que quand X dérive vers $+\infty$, c'est le processus conditionné à dériver vers $-\infty$ qu'on construit à partir du processus post-infimum. Cette dichotomie apparaissant dans les extensions du théorème de Pitman en présence des sauts de X semble assez intéressante.

Avant d'établir les résultats que nous avons annoncés, il nous faut faire quelques rappels sur les p.L.s.p. Nous renvoyons le lecteur à [1] et [2] pour de plus amples détails.

## I. PROCESSUS DE LÉVY SPECTRALEMENT POSITIF

Soit Ω, l'espace canonique des trajectoires càdlàg ω à durée de vie $\zeta=\zeta(\omega)$, et X, le processus des coordonnées. On munit Ω de la topologie de Skorokhod et de la filtration naturelle $(\mathscr{F}_t,\ t\geqq 0)$. Pour tout $t<\zeta$, on note

$$\bar{X}_t=\sup\{X_s,\ 0\leqq s\leqq t\},\qquad \underline{X}_t=\inf\{X_s,\ 0\leqq s\leqq t\}$$
$$\underline{\underline{X}}_t=\inf\{X_s,\ t\leqq s<\zeta\},\qquad \rho=\sup\{t\geqq 0,\ \underline{\underline{X}}_t=\underline{X}_\infty\}$$

Si A est un borélien de $\mathbb{R}$, on désigne respectivement par $\tau(A)$ et $\sigma(A)$, le premier et le dernier temps de passage en A : $\tau(A)=\inf\{t\geqq 0,\ X_t\in A\}$ et $\sigma(A)=\sup\{t\geqq 0,\ X_t\in A\}$. On munit $(\Omega, \mathscr{F}_\infty)$ d'une loi de probabilité $\mathbb{P}$ qui fait de X un p.L.s.p. issu de 0, et on note $\mathbb{P}_x$ la loi de $X+x$ sous $\mathbb{P}$.

Le cas où $\mathbb{P}$ est la loi d'un subordinateur ne présente aucun intérêt pour notre étude, il sera toujours implicitement écarté.

D'après la formule de Lévy-Khintchine, on a pour $\mathcal{R}e\, z \geqq 0$

$$\mathbb{E}(\exp - z X_t) = \exp t \Psi(z),$$
$$\Psi(z) = az + \frac{1}{2}\sigma_0 z^2 + \int_{]0,\infty[} (e^{-zx} - 1 + zx \mathbf{1}_{\{x<1\}})\, d\Pi(x),$$

où $a \in \mathbb{R}$, $\sigma_0 \geqq 0$ et $\Pi$ est une mesure sur $]0, \infty[$ telle que $\int (1 \wedge x^2)\, d\Pi(x) < \infty$. On appelle $\Psi$ l'exposant caractéristique de $\mathbb{P}$ et $\Pi$, sa mesure de Lévy. On note $\mathfrak{z}$, la plus grande racine réelle de l'équation $\Psi(z) = 0$ (soit $\mathfrak{z} = 0$, soit 0 et $\mathfrak{z}$ sont les seules solutions de l'équation). En appliquant le théorème d'arrêt à la martingale $\exp\{-\alpha X_t - \Psi(\alpha) t\}$ $(\alpha > \mathfrak{z})$ et en utilisant le fait que X n'a pas de saut négatif, il vient :

$$\forall x > 0, \quad \mathbb{P}(\tau(-x) < \infty) = \exp - \mathfrak{z} x. \tag{1}$$

On montre à l'aide de (1) que $\mathbb{P}$ dérive vers $+\infty$ (*i.e.* $\lim_{t\uparrow\infty} X_t = +\infty$ $\mathbb{P}$-p. s.) si et seulement si $\mathfrak{z} > 0$, et que $\mathbb{P}$ dérive vers $-\infty$ (*i.e.* $\lim_{t\uparrow\infty} X_t = -\infty$ $\mathbb{P}$-p. s.) si et seulement si $\mathfrak{z} = 0$ et $\Psi'(0) > 0$.

Quand $\mathbb{P}$ dérive vers $+\infty$, on introduit pour tout $x > 0$, la loi conditionnelle $\mathbb{P}_x^\uparrow = \mathbb{P}_x(\,.\,|\,\underline{X}_\infty > 0)$. Si de plus 0 est régulier pour $]0, \infty[$, il est facile de voir que $\mathbb{P}_x^\uparrow$ converge au sens de Skorokhod quand $x \downarrow 0$ vers une loi notée $\mathbb{P}^\uparrow$, et que $\mathbb{P}^\uparrow$ est la loi du processus post-infimum intervenant dans le théorème de Millar. De même, quand $\mathbb{P}$ dérive vers $-\infty$, on note $\mathbb{P}_x^\downarrow = \mathbb{P}_x(\,.\,|\,\underline{X}_\infty < 0)\,(x < 0)$. Cette fois, le point 0 est toujours régulier pour $]-\infty, 0[$, et $\mathbb{P}_x^\downarrow$ converge au sens de Skorokhod, quand $x_\uparrow 0$ vers une loi notée $\mathbb{P}^\downarrow$ (qui, bien sûr, est la loi du processus post-suprémum). Dans les deux cas, les lois $\mathbb{P}^\uparrow$ et $\mathbb{P}^\downarrow$ sont fortement markoviennes. On peut calculer leurs résolvantes grâce à la factorisation de Wiener-Hopf (qui est explicite pour les p.L.s.p.) et au théorème de Spitzer-Rogozin.

Dans le cas où $\mathbb{P}$ dérive vers $-\infty$ on a l'extension suivante du théorème de Pitman [7] déjà mentionnée en Introduction : si $\bar{X}^c$ désigne la partie continue du processus croissant $\bar{X}$, et $\bar{J}$, la somme des sauts de X à travers son ancien suprémum, c'est-à-dire $\bar{J}_t = \sum_{s \leqq t} (X_s - X_{s-}) \mathbf{1}_{\{X_s > \bar{X}_{s-}\}}$, alors

$$\text{sous } \mathbb{P}, \text{ le processus } X - 2\bar{X}^c - \bar{J} \text{ a pour loi } \mathbb{P}^\downarrow. \tag{2}$$

Plus généralement, (2) reste vrai même si $\mathbb{P}$ ne dérive pas vers $-\infty$ (il faut alors définir la loi conditionnelle $\mathbb{P}^\downarrow$ au moyen d'une *h*-transformation).

Enfin, nous utiliserons quelques résultats sur le processus réfléchi $X - \bar{X}$. Pour simplifier, nous supposerons jusqu'à la fin de ce paragraphe que 0 est régulier pour $]0,\infty[$ sous $\mathbb{P}$ $\left[\text{ce qui équivaut à } \sigma_0 \neq 0 \text{ ou } \int (1 \wedge x)\, d\Pi(x) = \infty\right]$, et que $\mathbb{P}$ dérive vers $+\infty$. Le processus $X-\bar{X}$ est fortement markovien, et le point 0 est régulier et récurrent. D'une façon générale, on ne peut pas reconstruire X à partir de $X-\bar{X}$, car la trajectoire de $X-\bar{X}$ a oublié les parties des sauts de $X_t$ au-dessus de $\bar{X}_{t-}$. Afin de remédier à cette perte d'information, on décide de noter $\bar{\mu}$, la mesure d'excursion de $X-\bar{X}$, mais où on a remplacé la valeur de 0 prise par l'excursion à son temps de mort $\zeta$ par la quantité $X_\zeta - \bar{X}_{\zeta-}$ par laquelle X dépasse son ancien suprémum. Autrement dit, $\bar{\mu}$ est la mesure d'excursion du processus $(X_t - \bar{X}_{t-},\ t \geqq 0)$. Si $\mathbb{P}$ n'a pas de partie brownienne, c'est-à-dire si $\sigma_0 = 0$, alors $\bar{\mu}$ est décrite par

$$(a) \quad \begin{cases} \bar{\mu}(\omega(\zeta)-\omega(\zeta-)=0)=0 \\ \bar{\mu}(-\omega(\zeta)\in dx,\ \omega(\zeta)-\omega(\zeta-)\in dy) = e^{-\mathfrak{z}x}\, dx\, d\Pi(y) \\ (0<x<y) \end{cases}$$

(b) sous $\bar{\mu}(\,.\,|-\omega(\zeta-)\in dx)$,

$$\begin{gathered} \text{l'excursion retournée } (\omega((\zeta-t)-),\ 0 \leqq t < \zeta) \\ \text{a même loi que } (-X_t,\ 0 \leqq t < \tau(0)) \text{ sous } \mathbb{P}_x(\,.\,|\,\tau(0)<\infty), \end{gathered} \tag{3}$$

*voir* [1], corollaire 1. La partie 3 (*a*) est un cas particulier du théorème 1 de Rogers [8].

## II. DESCRIPTION DU PROCESSUS PRÉ-INFIMUM

Nous supposons dorénavant que $\mathbb{P}$ dérive vers $+\infty$. Il existe donc un unique réel $\mathfrak{z}>0$ tel que $\Psi(\mathfrak{z})=0$. Nous savons qu'alors $\exp(-\mathfrak{z} X_t)$ est une $\mathbb{P}$-martingale positive, et nous introduisons la loi $\mathbb{P}^*$ :

$$d\mathbb{P}^*_{|\mathscr{F}_t} = \exp(-\mathfrak{z} X_t)\, d\mathbb{P}_{|\mathscr{F}_t}.$$

Notons que quand $\mathbb{P}$ est la loi du mouvement brownien avec dérive $\delta>0$, $\mathbb{P}^*$ est la loi du mouvement brownien avec dérive $-\delta$ d'après la formule de Cameron-Martin. D'autre part, pour la théorie du potentiel, la fonction $h(x)=e^{-\mathfrak{z}x}$ est harmonique (même invariante) positive sous $\mathbb{P}$, et $\mathbb{P}^*$ est la loi du *h*-processus correspondant. Nous dirons que $\mathbb{P}^*$ est obtenue en conditionnant $\mathbb{P}$ à dériver vers $-\infty$.

Le point important est que $\mathbb{P}^*$ est la loi d'un nouveau processus de Lévy. En effet, si $s \leqq t$ et si $\Lambda \in \mathscr{F}_s$, nous avons

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}^*(1_\Lambda \exp\{-i\alpha(X_t-X_s)\}) \\ &\quad = \mathbb{E}(1_\Lambda \exp\{-i\alpha(X_t-X_s)\} \exp\{-\mathfrak{z}X_s\} \exp\{-\mathfrak{z}(X_t-X_s)\}) \\ &\quad = \exp\{(t-s)\Psi(i\alpha+\mathfrak{z})\}\, \mathbb{E}(1_\Lambda \exp\{-\mathfrak{z}X_s\}) \\ &\quad = \exp\{(t-s)\Psi(i\alpha+\mathfrak{z})\}\, \mathbb{E}^*(1_\Lambda). \end{aligned}$$

Donc $\mathbb{P}^*$ est la loi du p.L.s.p. d'exposant caractéristique $\Psi^*(z)=\Psi(z+\mathfrak{z})$. Cette mesure de probabilité a été introduite par Doney [3]. Notons encore que $\Psi^*>0$ sur $]0, \infty[$ et que la dérivée à l'origine de $\Psi^*$ vaut $\Psi'(\mathfrak{z}+)>0$, et donc que $\mathbb{P}^*$ dérive vers $-\infty$. Ses éléments caractéristiques sont :

$$a^*=a+\mathfrak{z}\,\sigma_0^2+\int_{]0,\,1[} x(1-e^{-\mathfrak{z}x})\,d\Pi(x),$$
$$\sigma_0^*=\sigma_0, \qquad d\Pi^*(x)=e^{-\mathfrak{z}x}\,d\Pi(x).$$

Le lemme suivant justifie la terminologie « $\mathbb{P}^*$ est la loi du processus de Lévy initial conditionné à dériver vers $-\infty$ » :

LEMME 1. — *Pour tout* $x>0$, *le processus* $(X_t,\ 0\leqq t<\tau(-x))$ *a même loi sous* $\mathbb{P}(\,.\,|\,\tau(-x)<\infty)$ *que sous* $\mathbb{P}^*$.

*Preuve.* — Pour tout $\Lambda\in\mathscr{F}_t$, on a $\mathbb{P}^*(\Lambda)=\mathbb{E}(1_\Lambda \exp\{-\mathfrak{z}X_t\})$. Il en découle que pour tout $y>0$ et $\Lambda\in\mathscr{F}_{\tau(-x)\wedge\tau([y,\,\infty[)}$, on a

$$\mathbb{P}^*(\Lambda)=e^{\mathfrak{z}x}\,\mathbb{P}(\Lambda\cap\{\tau(-x)<\tau([y,\,\infty[)\})$$
$$+\mathbb{E}(1_{\Lambda\cap\{\tau([y,\,\infty[)<\tau(-x)\}}\exp\{-\mathfrak{z}X_{\tau([y,\,\infty[)}\}).$$

Quand on fait tendre $y$ vers l'infini, le terme de droite dans la somme converge vers 0, et celui de gauche vers $\mathbb{P}(\Lambda\,|\,\tau(-x)<\infty)$. □

Nous avons maintenant tous les ingrédients pour énoncer le

THÉORÈME 2. — *Sous* $\mathbb{P}$, *le processus pré-infimum* $(X_t,\ 0\leqq t<\rho)$ *a même loi que le processus* $(X_t,\ 0\leqq t<\tau(-\mathfrak{e}))$ *sous* $\mathbb{P}^*$ *où* $\mathfrak{e}$ *est une v. a. exponentielle de paramètre* $\mathfrak{z}$, *indépendante de* X.

*Preuve.* — Sous $\mathbb{P}$ comme sous $\mathbb{P}^*$, $X-\underline{X}$ est un processus de Markov fort, et $-\underline{X}$ est son temps local (canonique) en 0. De plus, 0 est un point récurrent pour $X-\underline{X}$ sous $\mathbb{P}^*$, mais pas sous $\mathbb{P}$. Si on désigne respectivement par $\underline{\mu}$ et $\underline{\mu}^*$ les mesures d'excursion correspondantes, le lemme 1 se traduit par l'identité

$$1_{\{\zeta<\infty\}}\,\underline{\mu}=\underline{\mu}^*.$$

La théorie des excursions entraîne alors que la loi de $((X-\underline{X})_t,\ 0\leqq t<\rho)$ sous $\mathbb{P}$ est la même que celle de $((X-\underline{X})_t,\ 0\leqq t<\tau(-\mathfrak{e}))$ sous $\mathbb{P}^*$, où $\mathfrak{e}$ est une variable exponentielle indépendante de $X-\underline{X}$. Le temps local étant en particulier une fonctionnelle additive, on peut reconstruire $\underline{X}$ à partir du processus réfléchi $X-\underline{X}$, et donc, les lois de $(X_t,\ 0\leqq t<\rho)$ sous $\mathbb{P}$ et de $(X_t,\ 0\leqq t<\tau(-\mathfrak{e}))$ sous $\mathbb{P}^*$ sont les mêmes. Enfin, le fait que le paramètre de $\mathfrak{e}$ est $\mathfrak{z}$ découle de (1). □

*Remarques.* — 1. On serait tenté de penser par analogie que sous $\mathbb{P}^*$, le processus pré-suprémum a même loi que $(X_t,\ 0\leqq t<T)$ sous $\mathbb{P}$, où T est le premier instant en lequel le temps local en 0 de $X-\bar{X}$ atteint une certaine v. a. exponentielle indépendante. En fait, même si ces deux lois se

ressemblent beaucoup [si $\bar{\mu}$ et $\bar{\mu}^*$ sont les mesures d'excursion de $X-\bar{X}$ sous $\mathbb{P}$ et sous $\mathbb{P}^*$ respectivement, on vérifie que pour tout $x>0$, les lois conditionnelles $\bar{\mu}(\,.\,|\,\omega(\zeta-)=-x)$ et $\bar{\mu}^*(\,.\,|\,\omega(\zeta-)=-x)$ sont identiques], elles sont différentes :

$$\bar{\mu}(-\omega(\zeta-)\in dx,\ \omega(\zeta)-\omega(\zeta-)\in dy)$$
$$e^{-\mathfrak{z}x}\,dx\,d\Pi(y)\neq e^{-\mathfrak{z}y}\,dx\,d\Pi(y)$$
$$=\bar{\mu}^*(-\omega(\zeta-)\,dx,\ \omega(\zeta)-\omega(\zeta-)\in dy).$$

Le processus pré-suprémum ne semble pas avoir de description simple sous $\mathbb{P}^*$.

2. P. Vallois m'a fait remarquer qu'on peut également montrer le théorème 2 en calculant la projection duale prévisible de la masse de Dirac en $\rho$.

En appliquant le lemme 1 à la description de la mesure des excursions de X hors de 0 obtenue dans [1], on remarquera encore l'identité suivante pour le processus canonique tué en son dernier temps de passage en 0 :

COROLLAIRE 3. — *Le processus* $(X_t,\ 0\leq t<\sigma(0))$ *a même loi sous* $\mathbb{P}$ *que sous* $\mathbb{P}^*$.

*Preuve.* — Supposons tout d'abord que $\mathbb{P}$ n'a pas de partie brownienne. On vérifie en appliquant le lemme 1 et la remarque qui suit le corollaire 1 de [1], que les mesures d'excursion $\mu$ et $\mu^*$ de X respectivement sous $\mathbb{P}$ et sous $\mathbb{P}^*$, coïncident sur l'ensemble $\{\zeta<\infty\}$ des excursions à durée de vie finie, et que $\mu(\{\zeta=\infty\})=\mu^*(\{\zeta=\infty\})$. Le point 0 n'étant jamais collant, ceci établit le corollaire 3. Enfin, le cas général $(\sigma_0\neq 0)$ en découle par approximation. □

## III. UNE EXTENSION DU THÉORÈME DE PITMAN INVERSE

L'extension du théorème de Pitman « inverse » que nous obtenons ici, repose en partie sur une version renforcée du lemme de dualité liant $X-\underline{\underline{X}}$ et $\bar{X}-X$ (rappelons que $\underline{\underline{X}}$ est le processus infimum futur). L'énoncé peut paraître un peu compliqué, mais c'est sous cette forme qu'il nous sera utile. Signalons encore qu'il est vérifié de façon générale par tous les processus de Lévy dérivant vers $+\infty$ (sans hypothèse particulière sur le support de la mesure de Lévy). Nous introduisons tout d'abord les notations suivantes :

Pour tout $t>0$, on désigne par $g(t)=\sup\{s<t,\ X_s=\bar{X}_s\}$ et $d(t)=\inf\{s>t,\ X_s=\bar{X}_s\}$, les extrémités gauche et droite de l'intervalle d'excursion de $X-\bar{X}$ hors de 0 qui enjambe $t$. On note $\mathscr{R}(\bar{X}-X)$, le processus obtenu en retournant une à une les excursions de $\bar{X}-X$, *i. e.*

$$\mathcal{R}(\bar{X}-X)_t=(\bar{X}-X)_{(d(t)+g(t)-t)-} \qquad \text{si} \quad d(t)>g(t)$$
$$=0 \qquad \text{sinon.}$$

LEMME 4. — *Sous* $\mathbb{P}$, *les processus* $([X-\underline{X}, \underline{X}-\underline{X}_0]_{\rho+t}, t\geqq 0)$ *et* $([\mathcal{R}(\bar{X}-X)_t, \bar{X}_{d(t)}], t\geqq 0)$ *ont même loi.*

*Preuve.* — Considérons $\varepsilon>0$, et notons $\mathbb{P}^\varepsilon$, la loi de X tué en un temps exponentiel indépendant de paramètre $\varepsilon$ sous $\mathbb{P}$. Nous travaillerons sous $\mathbb{P}^\varepsilon$ jusqu'à mention du contraire. Nous savons que les processus $(X_t, 0\leqq t<\zeta)$ et $(X_{\zeta-}-X_{(\zeta-t)-}, 0\leqq t<\zeta)$ ont même loi. Nous en déduisons que

$$([(X-\underline{X})_t, \underline{X}_t-\underline{X}_0], 0\leqq t<\zeta) \overset{\mathcal{L}}{=} ([(\bar{X}-X)_{(\zeta-t)-}, \bar{X}_{\zeta-}-\bar{X}_{(\zeta-t)-}], 0\leqq t<\zeta). \tag{4}$$

Soient L un temps local en 0 pour $\bar{X}-X$, et $L^{-1}$, son inverse continu à droite. Le processus qui à $t<L(\zeta)$ associe

$$([(\bar{X}-X)_{L^{-1}(t-)+r}, \bar{X}_{L^{-1}(t)}-\bar{X}_{L^{-1}(t-)}], 0\leqq r\leqq L^{-1}(t)-L^{-1}(t-)),$$

est un processus de Poisson ponctuel tué en temps exponentiel indépendant (*voir* par exemple Greenwood-Pitman [4]). Il a donc même loi que son retourné. Rappelons encore que, 0 étant régulier pour $]-\infty, 0[$, toutes les excursions de $\bar{X}-X$ quittent 0 continûment (*voir* Rogers [8]) c'est-à-dire que les sauts éventuels de $\bar{X}$ ont nécessairement lieu à la fin des excursions de $\bar{X}-X$. Il découle alors des mêmes arguments que ceux développés dans Greenwood-Pitman [4], § 4, que les processus

$$([(\bar{X}-X)_{(g(\zeta)-t)-}, \bar{X}_{\zeta-}-X_{(g(\zeta)-t)-}], 0\leqq t<g(\zeta))$$

et

$$([\mathcal{R}(\bar{X}-X)_t, \bar{X}_{d(t)}], 0\leqq t<g(\zeta))$$

ont même loi. Comme $\rho$ est le premier instant en lequel $X-\underline{X}$ vaut 0, nous déduisons de (4) que

$$([(X-\underline{X})_{\rho+t}, \underline{X}_{\rho+t}-\underline{X}_0], 0\leqq t<\zeta-\rho)$$

et

$$([\mathcal{R}(\bar{X}-X)_t, \bar{X}_{d(t)}], 0\leqq t<g(\zeta))$$

ont eux aussi même loi sous $\mathbb{P}^\varepsilon$. Il ne reste plus qu'à faire tendre $\varepsilon$ vers 0. $\square$

*Remarques.* — 1. Un résultat plus simple (et plus classique) consiste à énoncer que les processus $\bar{X}-X$ et $X-\underline{X}$ sont markoviens sous $\mathbb{P}$, et que leurs semi-groupes sont en dualité faible par rapport à une loi de probabilité $\eta$ ($\eta$ est la mesure invariante obtenue comme limite de la loi de

$(\bar{X}-X)_{\zeta-}$ sous $\mathbb{P}^{\varepsilon}$ quand $\varepsilon \downarrow 0$, sa transformée de Laplace est donnée dans la proposition 1 (*b*) de Bingham [2]). Nous renvoyons le lecteur à Le Jan [5] pour une étude générale de cette relation de dualité et pour le lien avec le retournement du temps.

2. Il est intéressant de noter que quand 0 est régulier sous $\mathbb{P}$, ce lemme permet de transposer l'identité de Fristedt (*voir* par exemple [4]) à la loi $\mathbb{P}^{\uparrow}$ : si $\underline{\underline{L}}^{-1}$ désigne l'inverse continu à droite d'un temps local en 0 pour $X-\underline{\underline{X}}$, on a

$$\log \mathbb{E}^{\uparrow}[\exp\{-\alpha \underline{\underline{L}}^{-1}(1)-\beta \underline{\underline{X}}(\underline{\underline{L}}^{-1}(1))\}] \\ = \mathrm{Cte}.\exp\left\{\int_0^{\infty}\int_{[0,\infty[}(e^{-t}-e^{-\alpha t-\beta x})\,t^{-1}\,\mathbb{P}(X_t\in dx)\,dt\right\}.$$

Notons maintenant $\underline{\underline{X}}^c$, la partie continue du processus croissant $\underline{\underline{X}}$ [par convention, $\underline{\underline{X}}^c(0)=0$]. Désignons encore par $\underline{\underline{J}}_t$, la somme des sauts effectués par X en les temps $s \leqq t$ en lesquels $\underline{\underline{X}}$ saute :

$$\underline{\underline{J}}_t = \sum_{0<s\leqq t}(X_s - X_{s-})\,1_{\{\underline{\underline{X}}_s > X_{s-}\}}.$$

Nous avons le

THÉORÈME 5. — *Sous* $\mathbb{P}$, *le processus* $X-2\underline{\underline{X}}^c-\underline{\underline{J}}$ *a pour loi* $\mathbb{P}^*$.

*Preuve.* — Le théorème 5 découle d'arguments très proches de ceux de [1]. Nous nous contentons d'indiquer les principales étapes sans entrer dans les détails (le lemme 4 ramène en particulier tous les calculs à ceux déjà effectués dans [1]). Sauf mention du contraire, nous travaillons sous $\mathbb{P}$.

Supposons tout d'abord qu'il n'y a pas de partie brownienne, *i.e.* $\sigma_0=0$. L'ensemble des temps $t \geqq 0$ en lesquels $(X-\underline{\underline{X}})_{\rho+t}=0$ ou $(X-\underline{\underline{X}})_{\rho+t-}=0$ est régénératif (d'après le lemme 4). Notons $\underline{\mu}$ la mesure d'excursion de $(X_{\rho+t-}-\underline{\underline{X}}_{\rho+t},\ t\geqq 0)$, c'est-à-dire la mesure d'excursion de $(X-\underline{\underline{X}})_{\rho+.}$, mais où on a remplacé la valeur initiale de l'excursion par l'opposé du saut de $\underline{\underline{X}}$ au début de cette excursion. D'après les lemmes 1 et 4 et (3), on a

$$(a)\qquad \begin{cases} \underline{\mu}(\omega(0+)-\omega(0)=0)=0 \\ \underline{\mu}(\omega(0+)\in dx,\ \omega(0+)-\omega(0)\in dy)=e^{-\delta x}\,dx\,d\Pi(y) \\ (0<x<y). \end{cases}$$

(*b*) sous $\underline{\mu}(\,.\,|\,\omega(0+)=x)$,

le processus $(\omega(t),\ 0<t<\zeta)$

a même loi que $(X_t,\ 0<t<\tau(0))$ sous $\mathbb{P}^*_x$ (5)

De façon heuristique, on recolle bout-à-bout les excursions (indépendantes) de $(X-\underline{\underline{X}})_{\rho+.}$ en supprimant le saut au début de chaque excursion. Le processus ainsi obtenu est $(X-\underline{\underline{J}})_{\rho+.}-\underline{\underline{X}}_{\infty}$. Il a pour loi $\mathbb{P}^*$ d'après 5 (*b*) et la propriété forte de Markov pour les processus de Lévy. Nous renvoyons le lecteur à [1], lemme 3, pour une formulation rigoureuse de ces arguments. On applique le théorème 2 et le théorème de Millar pour recoller le processus pré-infimum $(X_t, 0 \leqq t < \rho)$ à $(X - \underline{\underline{J}})_{\rho+.}$, et on voit que $X - \underline{\underline{J}}$ a pour loi $\mathbb{P}^*$. Or, quand $\sigma_0 = 0$, $\bar{X}$ est un processus purement discontinu, et d'après le lemme 4, c'est aussi le cas pour $\underline{\underline{X}}$. Le théorème 5 est donc établi.

Enfin, on passe au cas $\sigma_0 = 1$ par approximations. On note B, la partie brownienne de X, et on approche B p. s. uniformément sur tout compact, par une suite $B^n$, où $(1/\varepsilon_n) B^n$ est un processus de Poisson compensé d'intensité $(1/\varepsilon_n)^2$, avec $\varepsilon_n \downarrow 0$ et $\Pi(\{\varepsilon_n\}) = 0$. Notons $X^0 = X - B$, la partie non brownienne de X, qui est indépendante de B. On pose $X^n = X^0 + B^n$, et on note avec un exposant $n$ tout ce qui est relatif à $X^n$. On décompose $\underline{\underline{J}}^n = K^n + L^n + M^n + N^n$, en développant le produit

$$[(\underline{\underline{X}}^n_s - X^n_{s-}) + (X^n_s - \underline{\underline{X}}^n_s)]\,[1_{\{\underline{\underline{X}}^n_s > X^n_{s-},\, X^n_s - X^n_{s-} \neq \varepsilon_n\}} + 1_{\{\underline{\underline{X}}^n_s > X^n_{s-},\, X^n_s - X^n_{s-} = \varepsilon_n\}}],$$

c'est-à-dire que $K^n$ (resp. $M^n$) est la somme des sauts de $\underline{\underline{X}}^n$ provenant des sauts de $X^0$ (resp. de $B^n$), et $L^n$ (resp. $N^n$) est la somme des parties des sauts de $X^n$ dépassant $\underline{\underline{X}}^n$, sur l'ensemble des temps en lesquels $\underline{\underline{X}}^n$ saute, quand on ne prend en compte que les sauts provenant des sauts de $X^0$ (resp. de $B^n$). On montre aisément que $K^n$ (resp. $L^n$) converge p. s. uniformément sur tout compact vers la partie discontinue de $\underline{\underline{X}}$, *i.e.* $\underline{\underline{X}} - \underline{\underline{X}}^c - \underline{\underline{X}}_0$ (resp. vers la somme des sauts de $X_t$ au-dessus de $\underline{\underline{X}}_t$ quand $\underline{\underline{X}}$ saute), *voir* [1], lemme 4. Comme $\underline{\underline{X}}^n = K^n + M^n + \underline{\underline{X}}^n_0$, on en déduit que $M^n$ converge p. s. uniformément sur tout compact vers $\underline{\underline{X}}^c$. Le point délicat de la démonstration consiste à montrer que $M^n - N^n$ converge p. s. uniformément sur tout compact vers 0 (il est crucial ici de connaître précisément grâce à 5 (*a*) la loi du saut initial de l'excursion, $\omega(0+) - \omega(0)$, sous $\underline{\underline{\mu}}$, *voir* [1], lemme 5). Nous avons finalement obtenu que

$$\underline{\underline{J}}^n \text{ converge p. s. uniformément sur tout compact vers } \underline{\underline{J}} + 2\,\underline{\underline{X}}^c.$$

Nous avons montré le théorème 5 pour les lois $\mathbb{P}^n$. On vérifie immédiatement que $(\mathbb{P}^n)^*$ converge au sens de Skorokhod vers $\mathbb{P}^*$, ce qui établit le théorème pour $\mathbb{P}$. □

On déduit finalement du théorème de Millar et des théorèmes 2 et 5, l'extension suivante du théorème de Pitman « inverse » [comparer avec (2)] :

COROLLAIRE 6. — *Si* 0 *est régulier pour lui-même sous* $\mathbb{P}$, *alors sous* $\mathbb{P}^{\uparrow}$, *le processus* $X - 2\,\underline{\underline{X}}^c - \underline{\underline{J}}$ *a pour loi* $\mathbb{P}^*$.

## RÉFÉRENCES

[1] J. BERTOIN, An Extension of Pitman's Theorem for Spectrally Positive Lévy Processes, *Ann. Prob.* (à paraître).

[2] N. H. BINGHAM, Fluctuation Theory in Continuous Time, *Adv. Appl. Prob.*, vol. **7**, 1975, p. 705-766.

[3] R. A. DONEY, Hitting Probabilities for Spectrally Positive Lévy Processes, *J. London Math. Soc.* (à paraître).

[4] P. GREENWOOD et J. PITMAN, Fluctuation Identities for Lévy Processes and Splitting at the Maximum, *Adv. Appl. Prob.*, vol. **12**, 1980, p. 893-902.

[5] Y. LE JAN, Dual Markovian Semigroups and Processes, *in* M. FUKUSHIMA éd., *Functional Analysis in Markov Processes; Proceeding*, Kataka and Kyoto, 1981; *Lect. Notes Math.*, n° **923**, Springer Verlag, 1981, p. 47-75.

[6] P. W. MILLAR, Zero-One Laws and the Minimum of a Markov Process, *Trans. Am. Math. Soc.*, vol. **226**, 1977, p. 365-391.

[7] J. W. PITMAN, One-Dimensional Brownian Motion and the Three-Dimensional Bessel Process, *Adv. Appl. Prob.*, vol. **7**, 1975, p. 511-526.

[8] L. C. G. ROGERS, A New Identity for Real Lévy Processes, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, vol. **20**, n° 1, 1984, p. 21-34.

[9] L. C. G. ROGERS et J. PITMAN, Markov Functions, *Ann. Prob.*, vol. **9**, 1981, p. 573-581.

[10] D. WILLIAMS, Path Decomposition and Continuity of Local Time for One-Dimensional Diffusions, *Proc. London Math. Soc.*, vol. **28**, 1974, p. 738-768.

(*Manuscrit reçu le* 11 *juin* 1990.)