ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

HUBERT HENNION

Dérivabilité du plus grand exposant caractéristique des produits de matrices aléatoires indépendantes à coefficients positifs

Annales de l'I. H. P., section B, tome 27, nº 1 (1991), p. 27-59
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1991__27_1_27_0>

© Gauthier-Villars, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (http://www.elsevier.com/locate/anihpb) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 27, n° 1, 1991, p. 27-59. *Probabilités et Statistiques*

Dérivabilité du plus grand exposant caractéristique des produits de matrices aléatoires indépendantes à coefficients positifs

par

Hubert HENNION

I.R.M.A.R., Université de Rennes I,
Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex, France

RÉSUMÉ. — Soit $(X_n(s))_{n \geq 1}$ une suite de matrices aléatoires indépendantes, identiquement distribuées dont les coefficients sont positifs et dépendent d'un paramètre réel s, les propriétés de quasi-compacité de l'opérateur de transition sur l'espace projectif associé à $X_1(s)$ permettent d'obtenir des conditions suffisantes pour la dérivabilité de l'exposant caractéristique $\gamma(s) = \lim_n \text{p. s.} \frac{1}{n} \log \| X_n(s) \ldots X_1(s) \|$.

Mots clés : Matrices aléatoires, exposants caractéristiques.

ABSTRACT. — Let $(X_n(s))_{n \geq 1}$ be a sequence of independent identically distributed random matrices whose coefficients are positive and depend on a real parameter s, the quasi-compacity properties of the transition operator on the projective space associated to $X_1(s)$ allow us to obtain sufficient conditions for the derivability of the characteristic exposent $\gamma(s) = \lim_n \text{p. s.} \frac{1}{n} \log \| X_n(s) \ldots X_1(s) \|$.

Key words : random matrices, characteristic exponents.

Classification A.M.S. : 60 B 99, 60 F 15, 60 J 15.

Soit $(X_n)_{n \geqq 1}$ une suite stationnaire et ergodique de matrices aléatoires inversibles telle que

$$E[\log^+ \|X_1\|] < +\infty \text{ et } E[\log^+ \|X_1^{-1}\|] < +\infty,$$

le théorème de Furstenberg-Kesten prouve l'existence d'une constante γ, appelée plus grand exposant caractéristique des produits $X_n \ldots X_1$, $n \geqq 1$, telle que

$$\lim_n \text{p. s.} \frac{1}{n} \log \|X_n \ldots X_1\| = \gamma.$$

Lorsque les coefficients des matrices X_n dépendent d'un paramètre la question de la régularité de γ comme fonction de ce paramètre a son importance par exemple dans l'étude de l'opérateur de Schrödinger aléatoire [7] ou en mécanique statistique dans le cas des matrices à coefficients positifs [10]. Dans [10] un résultat d'analyticité est établi pour des suites aléatoires stationnaires et ergodiques prises dans un compact de matrices à coefficients strictement positifs. Considérant ici le cas de suites de matrices aléatoires indépendantes à coefficients positifs ou nuls soumises à des conditions de moments et contenant suffisamment de matrices à coefficients strictement positifs nous prouvons qu'une régularité différentielle d'ordre $k+2$ des coefficients se traduit par une régularité d'ordre k de γ.

ÉNONCÉ DU RÉSULTAT

Soit J un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $(\Omega, \mathscr{F}, p)$ un espace de probabilité et $(s, \omega) \to g_s(\omega)$ une application mesurable de $J \times \Omega$ dans l'ensemble des matrices $d \times d$ inversibles à coefficients positifs de déterminant ± 1.

Nous supposons que les coefficients $a_{ij}(s, \omega)$, $i, j = 1 \ldots d$ de $g_s(\omega)$ s'écrivent

$$a_{ij}(s, \omega) = b_{ij}(\omega) \exp c_{ij}(s, \omega)$$

et satisfont aux conditions suivantes :

(C1) pour tout I compact, $I \subset J$, il existe ε, $\varepsilon > 0$, tel que, pour tout i, $j \in \{1 \ldots d\}$

$$\sup \left\{ \int [\log^+ a_{ij}(s, \omega)]^{1+\varepsilon} dp(\omega) : s \in I \right\} < +\infty,$$

(C2) les variables aléatoires b_{ij} sont telles que

$$p\left(\bigcap_{ij=1}^{d} \{\omega : b_{ij}(\omega) > 0\}\right) > 0,$$

(C3) c_{ij} est mesurable de $J \times \Omega$ dans $\mathbb{R}$,
pour un entier k, $k \geqq 1$, $c_{ij}(.,\omega)$ est $k+2$ continûment dérivable sur J pour tout $\omega \in \Omega$ et, pour tout compact I, $I \subset J$, il existe une variable aléatoire positive w (indépendante de s, $s \in I$) satisfaisant à

$$\int w^{k+2}(\omega)\, dp(\omega) < +\infty$$

telle que, pour tout $i, j = 1 \ldots d$, $l = 1 \ldots k+2$, $s \in I$ et $\omega \in \Omega$,

$$\left| \frac{\partial^l}{\partial s^l} c_{ij}(s, \omega) \right| \leqq w^l(\omega).$$

THÉORÈME. — *Sous les hypothèses précédentes, le plus grand exposant caractéristique $\gamma(s)$ des produits de matrices aléatoires indépendantes de même loi que g_s est k fois continûment dérivable sur* J.

Si le déterminant de g_s n'est pas ± 1, (C1) doit être complétée par

$$\sup\left\{ \int [\log |a'_{ij}(s, \omega)|]^{1+\varepsilon}\, dp(\omega) : s \in I \right\} < +\infty$$

où $a'_{ij}(s, \omega)$ désignent les coefficients de $g_s^{-1}(\omega)$.

Indiquons les grandes lignes de la démonstration.

Dans le cas général ([2], [3], [4]) le calcul du plus grand exposant caractéristique $\gamma(\mu)$ des produits de matrices aléatoires indépendantes de loi μ est lié à l'action des éléments du support de μ sur $\mathbb{R}^d$ et sur l'espace projectif associé $\mathbb{P}_d$, dans le cas où μ est portée par l'ensemble G_+ des matrices à coefficients positifs et où son support contient une matrice à coefficients strictement positifs, nous montrons (§ 1) que l'on peut leur substituer le cône C des vecteurs à composantes strictement positives et son image $\tilde{C}$ dans $\mathbb{P}_d$; ainsi l'on pourra calculer $\gamma(\mu)$ à l'aide des probabilités sur $\tilde{C}$ invariantes par l'opérateur de transition $P(\mu)$ associé à μ. Les matrices de G_+ définissent des contractions de $\tilde{C}$ lorsque celui-ci est muni de la distance de Hilbert, ce fait est exploité pour obtenir (§ 2.2) des propriétés de quasi-compacité de $P(\mu)$ sur l'espace L des fonctions lipschitziennes sur $\tilde{C}$; ces propriétés sont ensuite étendues (§ 2.3) à des espaces de fonctions différentiables choisis de telle façon que le plus grand d'entre eux soit un sous-espace isométrique de L. Dès lors pour étudier la

régularité de γ nous emploierons (§ 3) la méthode de [7] qui consiste à exprimer la probabilité $P(\mu)$-invariante sur $\tilde{C}$ à l'aide de la résolvante $R(z, \mu)$ de $P(\mu)$ et, pour une famille $(\mu_s)_s$ de probabilités, à déduire (§ 3.1) les régularités de $s \to R(z, \mu_s)$ de celles de $s \to P(\mu_s)$ lesquelles seront finalement vérifiées (§ 3.2) à partir des hypothèses faites sur les coefficients.

Dans les études antérieures des propriétés de quasi-compacité pour l'action de $P(\mu)$ sur certains espaces fonctionnels ont été établies en tirant partie d'une hypothèse de densité ou de contraction ([6], [7], [8]). Dans ce dernier cas elles sont vérifiées directement si la distance sous-jacente est bornée et, sinon, obtenue comme conséquence du théorème de Ionescu-Tulcea-Marinescu [9]; nous utiliserons ici un résultat (proposition 2.0) adapté à la situation envisagée.

PREUVE DU THÉORÈME

Notations - Formulaire

Soient $x = (x_i)_{i=1}^d \in \mathbb{R}^d$ et $g \in Gl(d, \mathbb{R})$, on pose

$$\|x\| = \sum_{i=1}^{d} |x_i| \qquad \text{et} \qquad l(g) = \sup\{\log^+ \|g\|, \log^+ \|g^{-1}\|\}.$$

G_+ désigne l'ensemble des matrices à coefficients positifs de $Gl(d, \mathbb{R})$, et, pour $\alpha \geqq 0$, $\mathscr{P}_+^\alpha$ l'ensemble des probabilités μ portées par G_+ telles que $l^\alpha(\mu) = \int l^\alpha(g)\, d\mu(g) < +\infty$ muni de la topologie de la convergence faible.

Le cône

$$C = \{x : x = (x_i)_{i=1}^d \in \mathbb{R}^d, x_i > 0\}$$

est invariant par tout $g \in G_+$, son image $\tilde{C}$ dans l'espace projectif $\mathbb{P}_d$ associé à $\mathbb{R}^d$ sera représentée par

$$M = C \cap \{x : x \in \mathbb{R}^d, \|x\| = 1\}$$

où l'on distinguera le point χ dont toutes les coordonnées sont égales.

Soient $x, y \in M$, $x \neq y$, et a, b les points d'intersection de la droite (x, y) avec $F_r(M) = \bar{M} \setminus M$, la distance de Hilbert de x à y est définie par

$$d(x, y) = |\log(a, b, x, y)|$$

où (a, b, x, y) est le birapport des points a, b, x, y;

si $x=(1-\lambda_1)\,a+\lambda_1\,b$ et $y=(1-\lambda_2)\,a+\lambda_2\,b$, on a

$$d(x,y)=\left|\log\frac{\lambda_1}{1-\lambda_1}:\frac{\lambda_2}{1-\lambda_2}\right|; \tag{A}$$

si $(x_i)_{i=1}^d$ et $(y_i)_{i=1}^d$ sont des vecteurs de C proportionnels à x, $y\in \mathrm{M}$

$$d(x,y)=\log\max\left\{\frac{x_i\,y_j}{y_i\,x_j}:i,j=1\ldots d\right\}; \tag{B}$$

l'action de $g\in \mathrm{G}_+$ sur M définie par la formule

$$g\,.\,x=\frac{gx}{\|gx\|},$$

où gx est l'image du vecteur x par l'automorphisme g, est homologue à l'action de g sur $\tilde{\mathrm{C}}$ et définit une contraction de l'espace métrique (M,d); plus précisément l'image $g\,.\,\mathrm{M}$ de M par g est un polygône ouvert de M de diamètre $\lambda(g)$ [dans (M,d)] et, en posant

$$c(g)=th\frac{\lambda(g)}{4}\leqq 1,$$

on a, pour tout x, $y\in \mathrm{M}$,

$$d(g\,.\,x,g\,.\,y)\leqq c(g)\,d(x,y). \tag{C}$$

La matrice $g\in \mathrm{G}_+$ a des coefficients strictement positifs si et seulement si $c(g)<1$ (*cf.* [11] ou [1] p. 59 pour les preuves de (A), (B) et (C)).

Soit $\mu\in\mathscr{P}_+^0$, on pose

$$c(\mu)=\int c(g)\,d\mu(g);$$

l'hypothèse $c(\mu)<1$ est vérifiée si et seulement si le support μ contient une matrice à coefficients strictement positifs, elle sera essentielle pour l'étude de l'opérateur de transition défini pour f borélienne bornée sur M par

$$x\in \mathrm{M},\qquad \mathrm{P}(\mu)f(x)=\int f(g\,.\,x)\,d\mu(g).$$

Pour clore ce paragraphe rappelons que

$$\text{si}\quad g=[a_{ij}]_{ij=1\ldots d},\qquad \|g\|=\sup\left\{\sum_{i=1}^{d}|a_{ij}|:j=1\ldots d\right\}, \tag{D}$$

jointe à (B) cette formule permet (*cf.* preuve du théorème 1) d'établir l'inégalité :

$$\text{pour tout } g \in G_+, d(\chi, g.\chi) \leqq 2 \log d + l(g). \tag{E}$$

1. Action de μ sur les éléments positifs de $\mathbb{R}^d$

On pose

$$\bar{C} = \{ x; x = (x_i)_{i=1}^d \in \mathbb{R}^d, x_i \geqq 0 \}$$

et

$$\bar{M} = \bar{C} \cap \{ x : x \in \mathbb{R}^d, \| x \| = 1 \}.$$

La convolée $\mu * \nu$ de la probabilité μ sur G_+ et de la probabilité ν sur $\bar{M}$ est la probabilité sur $\bar{M}$ définie par

$$\mu * \nu(A) = \int 1_A(g.x)\, d\mu(g)\, d\nu(x),$$

si $\mu * \nu = \nu$, ν est dite μ-invariante.

A partir du théorème d'Oseledec [5], on établit le

THÉORÈME 1. — *Soit* $\mu \in \mathscr{P}_+^1$ *et* $X = (X_n)_{n \geqq 1}$ *une suite de matrices aléatoires indépendantes de loi* μ, *alors*

(i) *pour tout* $x \in C$

$$\lim_n \text{p. s.} \frac{1}{n} \log \| X_n \ldots X_1 x \| = \gamma(\mu),$$

(ii) *il existe sur* $\bar{M}$ *une probabilité* ν μ-*invariante telle que*

$$\gamma(\mu) = \int \log \| gx \|\, d\mu(g)\, d\nu(x),$$

si, de plus, le support de μ *contient une matrice à coefficients strictement positifs,*

(i') *la convergence énoncée en* (i) *a lieu pour tout* $x \in \bar{C} \setminus \{0\}$,

(ii') *il n'existe sur* $\bar{M}$ *qu'une probabilité* μ-*invariante, elle est portée par* M *et telle que*

$$\int d(\chi, x)\, d\nu(x) < +\infty.$$

Démonstration. — Soit $(\Omega, \mathscr{F}, P, \theta)$ le système dynamique de la représentation canonique de la suite X. Posons $X^n = X_n \ldots X_1$, d'après le théorème

d'Oseledec joint à l'hypothèse $\mu(G_+)=1$, il existe $N \in \mathscr{F}$, invariant négligeable tel que : à tout $\omega \notin N$ est associé un sous-espace vectoriel strict $V(\omega)$ de $\mathbb{R}^d$ ayant les propriétés suivantes :

$$\text{si} \quad x \notin V(\omega), \qquad \lim_n \frac{1}{n} \log \| X^n(\omega) x \| = \gamma(\mu),$$

$$\text{si} \quad x \in V(\omega) \setminus \{0\}, \qquad \lim_n \frac{1}{n} \log \| X^n(\omega) x \| < \gamma(\mu),$$

d'autre part, pour tout $\omega \notin N$ et tout n, $X^n(\omega) C \subset C$.

Supposons $\omega \notin N$ et $V(\omega) \cap C \neq \emptyset$, alors si $y \in V(\omega) \cap C$ et $x \in C \setminus V(\omega)$, on a

$$\lim_n \frac{\| X^n(\omega) y \|}{\| X^n(\omega) x \|} = 0,$$

choisissons $\varepsilon > 0$ tel que $y - \varepsilon x \in C$, il résulte de la relation

$$X^n(y - \varepsilon x) = \| X^n x \| \left(\frac{X^n y}{\| X^n x \|} - \varepsilon \frac{X^n x}{\| X^n x \|} \right)$$

qu'il existe n tel que $X^n(\omega)(y - \varepsilon x) \notin C$, ce qui est absurde, on conclut que $V(\omega) \cap C = \emptyset$.

Sous l'hypothèse supplémentaire $c(\mu) < 1$, il existe N' négligeable $N' \supset N$, tel que à tout $\omega \notin N'$ on puisse associer un $n_0(\omega)$ satisfaisant à

$$X^{n_0(\omega)}(\omega)(\bar{C} \setminus \{0\}) \subset C,$$

Soit alors $\omega \notin N'$ et $x \in V(\omega) \cap \bar{C} \setminus \{0\}$, puisque

$$\lim_n \frac{1}{n} \log \| X^{n+n_0(\omega)}(\omega) x \| < \gamma(\mu),$$

on a

$$X^{n_0(\omega)}(\omega) x \in V(\theta^{n_0(\omega)}(\omega)), \quad \text{mais} \quad X^{n_0(\omega)}(\omega) x \in C$$

donc $V(\theta^{n_0(\omega)}(\omega)) \cap C \neq \emptyset$, ce qui, compte tenu de l'invariance de N, est en contradiction avec l'assertion précédemment établie, finalement $V(\omega) \cap \bar{C} = \{0\}$.

Établissons maintenant (ii).

Soit $x_0 \in M$, la suite de probabilités sur $\bar{M}$

$$\nu_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu^{*k} * \delta_{x_0}$$

est relativement compacte, soit ν une de ses valeurs d'adhérence, il vient $\mu * \nu = \nu$. Si $\bar{\sigma}$ désigne la fonction continue sur $\bar{M}$

$$\bar{\sigma}(x) = \int \log \| gx \| \, d\mu(g),$$

l'on a d'après (i)

$$\gamma(\mu) = \lim_n \frac{1}{n} \log \| X^n x_0 \| = \lim_n \frac{1}{n} E[\log \| X^n x_0 \|]$$

$$= \lim_k \int \bar{\sigma} \, d\nu_{n_k} = \int \log \| gx \| \, d\mu(g) \, d\nu(x)$$

si $\lim_k \nu_{n_k} = \nu$.

Supposons maintenant $c(\mu) < 1$.

En remarquant que, pour $g \in G_+$, $g^{-1}(\mathrm{Fr}(M)) \subset M^c$ tandis que, si $c(g) < 1$, $g^{-1}(\mathrm{Fr}(M)) \cap \mathrm{Fr}(M) = \varnothing$, on a pour ν μ-invariante sur $\bar{M}$

$$\nu(\mathrm{Fr}(M)) = \int \nu(g^{-1}(\mathrm{Fr}(M)) \cap \mathrm{Fr}(M)) \, d\mu(g) \leqq \nu(\mathrm{Fr}(M)) \, \mu(\{ g : c(g) = 1 \})$$

de sorte que $\nu(\mathrm{Fr}(M)) = 0$.

De l'inégalité

$$x, y \in M, \qquad d(X^n . x, X^n . y) \leqq \prod_{i=1}^{n} c(X_i) \, d(x, y)$$

on déduit

$$\lim_n \text{p. s. } d(X^n . x, X^n . y) = 0;$$

si ν_1 et ν_2 sont deux probabilités μ-invariantes sur M et φ une fonction continue à support compact sur M, un passage à la limite dans l'égalité

$$\nu_1(\varphi) - \nu_2(\varphi) = \int E[\varphi(X^n . x) - \varphi(X^n . y)] \, d\nu_1(x) \, d\nu_2(y)$$

montre que $\nu_1(\varphi) = \nu_2(\varphi)$, ce qui établit l'unicité.

Soit ν l'unique probabilité μ-invariante sur M,

$$\nu = \lim_n \nu_n \qquad \text{où} \quad \nu_n = \frac{1}{n}[\delta_\chi + \mu * \delta_\chi + \ldots + \mu^{*(n-1)} * \delta_\chi].$$

Posons, pour $k \geqq 1$,

$$m_k = \int d(\chi, x)\, d\mu^{*k} * \delta_\chi(x),$$

d'après (E)

$$m_1 = \int d(\chi, g.\chi)\, d\mu(g) \leqq 2 \log d + l^1(\mu) < +\infty,$$

pour $k \geqq 2$, on a successivement

$$\begin{aligned} m_k &= \int d(\chi, (g_1 g_2).\chi)\, d\mu^{*(k-1)}(g_1)\, d\mu(g_2) \\ &\leqq \int d(\chi, g_1.\chi)\, d\mu^{*(k-1)}(g_1) \\ &\quad + \int d(g_1.\chi, (g_1 g_2).\chi)\, d\mu^{*(k-1)}(g_1)\, d\mu(g_2) \\ &\leqq m_{k-1} + \int c(g_1)\, d(\chi, g_2.\chi)\, d\mu^{*(k-1)}(g_1)\, d\mu(g_2) \\ &\leqq m_{k-1} + c(\mu^{*(k-1)})\, m_1 \leqq m_{k-1} + (c(\mu))^{k-1} m_1, \end{aligned}$$

il vient

$$m_k \leqq m_1 [1 + c(\mu) + \ldots + (c(\mu))^{k-1}] < \frac{m_1}{1 - c(\mu)},$$

l'existence d'un moment pour ν résulte alors de ce que, pour tout n,

$$\int d(\chi, x)\, d\nu_n(x) \leqq \frac{m_1}{1 - c(\mu)}.$$

Achevons la preuve de ce théorème en établissant l'inégalité (E).

Soit $(e_i)_{i=1}^d$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$ et g^* la transposée de g,

$$g\chi = \sum_{i=1}^{d} \|g^* e_i\|\, e_i,$$

puisque

$$(d\|g^{-1}\|)^{-1} \leqq \|g^{*-1}\|^{-1} \leqq \|g^* e_i\| \leqq \|g^*\| \leqq d\|g\|$$

il vient, d'après (B),

$$\begin{aligned} d(\chi, g.\chi) &= \log \max \left\{ \frac{\|g^* e_i\|}{\|g^* e_j\|} : i, j = 1 \ldots d \right\} \leqq \log d^2 \|g\| \|g^{-1}\| \\ &= 2 \log d + \log^+ \|g\| . \|g^{-1}\| \leqq 2 \log d + l(g). \end{aligned}$$

Il résulte de ce théorème que les $\mu \in \mathscr{P}_+$ tels que $c(\mu) < 1$ sont des points de continuité de γ, plus précisément :

COROLLAIRE 1. — *Soit* μ, μ_n, $n \in \mathbb{N}$, *des éléments de* $\mathscr{P}_+^1$ *tels que*

(i) $\lim_n \mu_n = \mu$,

(ii) $\lim_{N \to +\infty} \sup \left\{ \int_{\{g : l(g) \geq N\}} l(g)\, d\mu_n(g) : n \in \mathbb{N} \right\} = 0$,

(iii) *le support de* μ *contient une matrice à coefficients strictement positifs, alors* $\lim_n \gamma(\mu_n) = \gamma(\mu)$.

Démonstration. — D'après le point (ii) du théorème 1, pour tout n, il existe ν_n sur $\bar{M}$ μ_n-invariante telle que

$$\gamma(\mu_n) = \int \log \| gx \| \, d\mu_n(g)\, d\nu_n(x),$$

la suite ν_n est relativement compacte et toutes ses valeurs d'adhérence sont des probabilités μ-invariantes sur $\bar{M}$, le point (ii') du théorème 1, permet alors de conclure, le passage à la limite sous le signe intégral se trouvant justifié par la condition (ii).

2. Action de μ sur certains espaces fonctionnels

Dans tout ce paragraphe $\mathscr{K}$ désigne une partie de $\mathscr{P}_+^0$ ayant les propriétés suivantes :

(H1) *il existe* ε, $\varepsilon > 0$, *tel que*

$$\sup \{ l^{1+\varepsilon}(\mu) : \mu \in \mathscr{K} \} = l^{1+\varepsilon}(\mathscr{K}) < +\infty,$$

(H2) $\mathscr{K}$ *est compacte*,

(H3) $\sup \{ c(\mu) : \mu \in \mathscr{K} \} = c(\mathscr{K}) < 1$.

Remarquons que d'après la continuité de c et (H2) cette dernière hypothèse est satisfaite dès que, pour tout $\mu \in \mathscr{K}$, $c(\mu) < 1$.

Les hypothèses ci-dessus impliquent que la famille d'opérateurs $P(\mu)$, $\mu \in \mathscr{K}$, possède sur un espace de fonctions lipschitziennes tout d'abord (§ 2.2) puis par extension sur un espace de fonctions différentiables (§ 2.3) les propriétés de quasi-compacité décrites et étudiées dans un cadre abstrait au (§ 2.1). Le théorème 3 et son corollaire constituent la base des développements ultérieurs.

$\mathscr{L}(B)$ est l'algèbre des endomorphismes continus de l'espace normé B et, pour $T \in \mathscr{L}(B)$, $\sigma(T)$, $\rho(T)$, $R(z, T)$ désignent respectivement le spectre, le rayon spectral et la résolvante de T.

On pose $F(\rho)=\{z : z\in\mathbb{C},\ |z|\leqq\rho\}\cup\{+1\}$.

2.1. *Famille d'opérateur et spectre*

B est un espace de Banach et $\mathscr{S}$ une partie de $\mathscr{L}(B)$ sur laquelle nous ferons l'hypothèse suivante : à tout $P\in\mathscr{S}$ est associé un projecteur continu $N(P)$ sur $\operatorname{Ker}(I-P)$ tel que $N(P)P=PN(P)$, ce qui revient à dire que, pour tout $P\in\mathscr{S}$, B est somme directe topologique de $\operatorname{Ker}(I-P)$ et d'un sous-espace G_P, tous deux stables par P.

DÉFINITION 2.1. — *$\mathscr{S}$ possède la propriété $\Pi(\rho)$, $0\leqq\rho<1$, si*
(i) *pour tout* $P\in\mathscr{S}$, $\rho(P-N(P))\leqq\rho$,
(ii) *pour tout compact* K, $K\subset F(\rho)^c$,

$$\sup\{\|R(z,P)\|,\ z\in K, P\in\mathscr{S}\}<+\infty.$$

Cette propriété sera commodément étudiée en utilisant le

LEMME 2.1. — *Soit* ρ, $0\leqq\rho<1$, *pour que $\mathscr{S}$ satisfasse à $\Pi(\rho)$ il suffit que soit vérifiée la condition $V(\rho)$ suivante : si $(\lambda_n)_n$ est une suite de $\mathbb{C}$ convergeant vers λ, $(P_n)_n$ une suite de $\mathscr{S}$ et $(f_n)_n$, $(\varepsilon_n)_n$ des suites de* B *telles que*

$$\|f_n\|=1, \lim_n\|\varepsilon_n\|=0 \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_n=(\lambda_n-P_n)f_n$$

on a soit
(*a*) $|\lambda|\leqq\rho$ *si la suite $(P_n)_n$ est constante et si, pour tout n,* $N(P_n)f_n=0$;
(*b*) $\lambda\in F(\rho)$.

Démonstration. — Établissons $\Pi(\rho)-(i)$.

Il suffit de prouver que le rayon spectral de la restriction Q de P à l'espace de Banach $\operatorname{Ker}N(P)$ est $\leqq\rho$, or, si $\lambda\in\operatorname{Fr}(\sigma(Q))$ et si (λ_n) est une suite de $\mathbb{C}\setminus\sigma(Q)$ convergeant vers λ on a $\lim_n\|(\lambda_n-Q)^{-1}\|=+\infty$, on en déduit l'existence d'une suite $(f_n)_n$ de $\operatorname{Ker}N(P)$ telle que $\|f_n\|=1$ et $\lim_n\|(\lambda_n-Q)f_n\|=0$, $V(\rho)-(a)$ permet alors de conclure que

$$\operatorname{Fr}(\sigma(Q))\subset F(\rho)\setminus\{1\},$$

comme $\sigma(Q)$ est bornée il vient $\sigma(Q)\subset F(\rho)\setminus\{1\}$.

Établissons maintenant $\Pi(\rho)-$(ii).

Supposons $\sup\{\|R(z,P)\|,\ z\in K, P\in\mathscr{S}\}=+\infty$, alors il existe $(\varepsilon_n)_n$ dans B, $(z_n)_n$ dans K et $(P_n)_n$ dans $\mathscr{S}$ telles que $\lim_n\varepsilon_n=0$ et $\|R(z_n,P_n)\varepsilon_n\|=1$, au prix d'une extraction de sous-suite et en posant $f_n=R(z_n,P_n)\varepsilon_n$ les

hypothèses de $V(\rho)$ sont satisfaites, c'est-à-dire que $(z_n)_n$ a une valeur d'adhérence dans $F(\rho)$, ce qui est absurde.

Sous les hypothèses générales de ce paragraphe, l'on peut en renforçant la condition de contraction du théorème de Ionescu-Tulcea-Marinescu [9], mais sans supposer l'équicontinuité des puissances des opérateurs, expliciter un ρ pour lequel la propriété $\Pi(\rho)$ est satisfaite.

L'on pose $D=\{f: f\in B, \|f\|\leqq 1\}$.

PROPOSITION 2.0. — *Supposons*

(*a*) $\|.\|=J+m$, *où* J *est une norme et* m *une semi-norme sur* B;

(*b*) $\mathcal{S}$ *est une partie compacte de l'espace vectoriel normé des applications linéaires continues de* $(B, \|.\|)$ *dans* (B, J);

(*c*) *r étant un réel*, $0\leqq r<1$, *on a pour tout* $P\in\mathcal{S}$,

(*c*1) $m(f)=0$ *implique* $f\in \operatorname{Ker}(I-P)$,

(*c*2) *pour tout* $f\in B$, $m(Pf)\leqq r\,m(f)$,

(*c*3) P *est un endomorphisme continu de* (B, J),

(*c*4) P (D) *est relativement compact dans* (B, J),

(*c*5) *l'adhérence de* $D\cap \operatorname{Ker} N(P)$ *dans* (B, J) *est incluse dans* $\operatorname{Ker} N(P)$,

alors, pour tout $P\in\mathcal{S}$, $\operatorname{Ker}(I-P)$ *est le sous-espace de dimension finie* $F=\{f: f\in B, m(f)=0\}$ *et* $\mathcal{S}$ *a la propriété* $\Pi(\rho)$ *sur* $(B, \|.\|)$.

Démonstration. — Soit $f\in \operatorname{Ker}(I-P)$, d'après (*c*2), $m(f)=m(Pf)\leqq r m(f)$ et $m(f)=0$, d'où, par (*c*1), $\operatorname{Ker}(I-P)=F$. Des égalités

$$F\cap\{f: J(f)\leqq 1\}=F\cap\{f: \|f\|\leqq 1\}=F\cap\{Pf: \|f\|\leqq 1\}=F\cap P(D)$$

et de (*c*4), on déduit que $F\cap\{f: J(f)\leqq 1\}$ est relativement compact dans (F, J) donc que F est de dimension finie.

Utilisons maintenant le lemme 2.1 dont nous reprenons les notations, en supposant $\lambda\neq 0$.

D'après (*b*) puis (*c*4), il existe une sous-suite $(n_k)_k$, $P\in\mathcal{S}$ et $g\in B$ tels que

$$\limsup_k \{J(P_{n_k}h-Ph): \|h\|\leqq 1\}=0 \qquad \text{et} \qquad \lim_k J(Pf_{n_k}-g)=0,$$

de l'inégalité

$$J(P_{n_k}f_{n_k}-g)\leqq J(P_{n_k}f_{n_k}-Pf_{n_k})+J(Pf_{n_k}-g),$$

il résulte que $\lim_k J(P_{n_k}f_{n_k}-g)=0$, utilisant alors la relation $\lambda_n f_n=P_n f_n+\varepsilon_n$ on conclut à l'existence de $f\in B$ tel que $\lim_k J(f_{n_k}-f)=0$ et donc, d'après (*c*3), tel que $Pf=\lambda f$.

Supposons $f=0$, puisque $\|f_n\|=1$, on a $\lim_k m(f_{n_k})=1$ et, par passage à la limite selon (n_k) dans l'inégalité

$$|\lambda_n|\, m(f_n) \leqq m(P_n f_n)+m(\varepsilon_n) \leqq r m(f_n)+m(\varepsilon_n)$$

il vient $|\lambda| \leqq r$.

Supposons maintenant $f \neq 0$, puisque

$$|\lambda|\, m(f)=m(Pf) \leqq r m(f)$$

on a soit $|\lambda| \leqq r$, soit $m(f)=0$ et, d'après $(c\,1)$, $\lambda=1$. Cette seconde éventualité n'a pas lieu dans les conditions (a) du lemme 2.1; en effet, notant $P=P_n$ et $N=N(P_n)$, on a $f_n \in D \cap \operatorname{Ker} N$ et donc, d'après $(c\,5)$, $N(f)=0$, de sorte que, si $Pf=f$, il vient $f=Nf=0$ ce qui est contraire à l'hypothèse.

La propriété $\Pi(\rho)$ peut se transmettre à un sous-espace.

Soit $(B', \|.\|')$ un espace de Banach tel que: $B' \subset B$ et l'injection canonique de B' dans B est continue, les restrictions à B' des éléments de $\mathscr{S}$ et des projecteurs associés sont dans $\mathscr{L}(B')$.

PROPOSITION 2.1. — *Supposons qu'il existe* R *et* r, $R \geqq 0$, $0 \leqq r < 1$ *telles que, pour tout* $P \in \mathscr{S}$ *et tout* $f \in B'$

$$\|Pf\|' \leqq R\,\|f\| + r\,\|f\|'.$$

alors, si sur B $\mathscr{S}$ *a la propriété* $\Pi(\rho)$, $\mathscr{S}$ *a sur* B' *la propriété* $\Pi(\rho')$, $\rho'=\sup\{\rho, r\}$.

Démonstration. — Utilisons le lemme 2.1. Plaçons nous sous les hypothèses de $V(\rho')$, on a $\lim_n \|\varepsilon_n\|'=0$ et donc $\lim_n \|\varepsilon_n\|=0$. Montrons que $\lim_n \|f_n\|=0$. Deux cas sont à envisager correspondants au (a) et au (b) de $V(\rho')$.

(α) Pour tout n, $P_n=P$ et $f_n \in G'=\operatorname{Ker} N(P) \cap B'$, supposons $|\lambda|>\rho'$. Soit Q la restriction de P à $G=\operatorname{Ker} N(P)$, Q ayant par hypothèse un rayon spectral $\leqq \rho$, il existe n_0 tel que

$$\sup\{\|R(\lambda_n, Q)h\| : h \in G, \|h\|=1, n \geqq n_0\} < +\infty$$

et donc

$$\lim_n \|f_n\| = \lim_n \|R(\lambda_n, Q)\,\varepsilon_n\| = 0.$$

(β) Cas général, supposons $\lambda \notin F(\rho')$. $\lambda \notin F(\rho)$ et, d'après $\Pi(\rho)$-(ii) il existe n_0 tel que

$$\sup\{\|R(\lambda_n, P_n)h\| : h \in B, \|h\|=1, n \geqq n_0\} < +\infty$$

et comme précédemment $\lim_n \|f_n\| = 0$.

Mais $\|f_n\|' = 1$ et des inégalités

$$|\lambda_n| - \|\varepsilon_n\|' \leqq \|\lambda_n f_n - \varepsilon_n\|' = \|P_n f_n\|' \leqq R\|f_n\| + r\|f_n\|' = R\|f_n\| + r$$

il résulte par un passage à la limite en n que $|\lambda| \leqq r$, ce qui contredit les hypothèses faites tant en (α) qu'en (β).

2.2. *Action de* μ *sur les fonctions lipschitziennes*

Pour une fonction numérique sur M, on pose

$$m(f) = \sup\left\{\frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)} : x, y \in M, x \neq y\right\}$$

où d est la distance de Hilbert.

L est l'espace vectoriel des f telles que $m(f) < +\infty$, si $f \in L$, on pose

$$\|f\| = |f(\chi)| + m(f)$$

où χ est le point de M dont toutes les coordonnées sont égales.

$$(L, \|.\|) \quad \text{est un espace de Banach.}$$

Soit $\mu \in \mathscr{K}$ et ν la probabilité μ-invariante sur M, d'après le théorème 1 et l'inégalité.

$$|f(x)| \leqq |f(\chi)| + m(f)\, d(\chi, x) \tag{1}$$

ν induit une forme linéaire continue sur L, on définit alors l'opérateur $Q(\mu)$ par

$$f \in L, \qquad Q(\mu) f = P(\mu) f - \nu(f)\, 1$$

où 1 désigne la fonction constante et égale à 1 sur M et $\nu(f) = \int f d\nu$.

Le résultat de ce paragraphe s'énonce :

THÉORÈME 2. — *Pour tout* $\mu \in \mathscr{K}$, $P(\mu)$ *et* $Q(\mu)$ *sont des endomorphismes continus de* L *tels que* :

$$\rho(Q(\mu) \leqq c(\mathscr{K}),$$

pour tout K *compact*, $K \subset F(c(\mathscr{K}))^c$,
$\sup\{\|R(z, P(\mu))\|,\ z \in K,\ \mu \in \mathscr{K}\} < +\infty$.

Dans la preuve de ce théorème nous substituerons à la norme initiale sur M la norme équivalente $\|.\|_\varepsilon$ définie par

$$f \in \mathrm{L}, \qquad \|f\|_\varepsilon = \mathrm{J}_\varepsilon(f) + m(f)$$
$$\text{où} \quad \mathrm{J}_\varepsilon(f) = \sup\left\{\frac{|f(x)|}{(1+d(\chi,x))^{1+\varepsilon}} : x \in \mathrm{M}\right\}.$$

Notons que, d'après le théorème d'Ascoli, de toute suite $(f_n)_n$ de L telle que $\|f_n\|_\varepsilon \leqq 1$ on peut extraire une sous-suite $(f_{nk})_k$ convergeant uniformément sur tout compact vers une fonction $f \in \mathrm{L}$ telle que $\|f\| \leqq 1$ et donc, d'après (1), on a

$$\lim_k \mathrm{J}_\varepsilon(f_{n_k} - f) = 0.$$

Nous commençons (propositions 2.2 et 2.3) par préciser à l'aide de J_ε et de m l'action de $\mathrm{P}(\mu)$ sur L, puis nous montrons que $\mathrm{P}(\mu)$ possède vis-à-vis des projecteurs $\mathrm{N}(\mu)$ définis par

$$f \in \mathrm{L}, \qquad \mathrm{N}(\mu) f = \nu(f)\, 1$$

les propriétés décrites au paragraphe 2.1.

PROPOSITION 2.2. — *Soit* $\varepsilon > 0$, *il existe des constantes* A_ε *et* B_ε *telles que, pour tout* $\mu \in \mathscr{P}_+^{1+\varepsilon}$ *et* $f \in \mathrm{L}$

$$\mathrm{J}_\varepsilon(\mathrm{P}(\mu) f) \leqq (\mathrm{A}_\varepsilon + \mathrm{B}_\varepsilon l^{1+\varepsilon}(\mu))\, \mathrm{J}_\varepsilon(f),$$
$$m(\mathrm{P}(\mu) f) \leqq c(\mu)\, m(f).$$

Démonstration. — Soit $f \in \mathrm{L}$, $g \in \mathrm{G}_+$, en posant $f \circ g(x) = f(g.x)$ on a

$$m(f \circ g) \leqq m(f)\, c(g),$$
$$\mathrm{J}_\varepsilon(f \circ g) \leqq \mathrm{J}_\varepsilon(f) \sup\left\{\left(\frac{1+d(\chi, g.x)}{1+d(\chi,x)}\right)^{1+\varepsilon} : x \in \mathrm{M}\right\},$$

en utilisant l'action contractante de g sur M puis (E) il vient

$$\begin{aligned} 1 + d(\chi, g.x) &\leqq 1 + d(\chi, g.\chi) + d(g.\chi, g.x) \\ &\leqq (1 + d(\chi, g.\chi))(1 + d(\chi, x)) \leqq (1 + 2\log d + l(g))(1 + d(\chi, x)) \end{aligned}$$

et

$$\mathrm{J}_\varepsilon(f \circ g) \leqq (1 + 2\log d + l(g))^{1+\varepsilon}\, \mathrm{J}_\varepsilon(f) \leqq 2^{1+\varepsilon}((1 + 2\log d)^{1+\varepsilon} + l(g)^{1+\varepsilon})\, \mathrm{J}_\varepsilon(f),$$

il suffit pour conclure d'intégrer en g.

La correspondance $\mu \to \mathrm{P}(\mu)$ a la propriété de continuité suivante :

PROPOSITION 2.3. — *Soit* $(\mu_n)_n$ *une suite d'éléments de* $\mathscr{P}_+^{1+\varepsilon}$ *convergeant vers* μ *et* P_n, P *les opérateurs de transition correspondants, alors,*

si

$$\sup\{l^{1+\varepsilon}(\mu_n):n\}<+\infty \qquad (\mathrm{H}'1),$$

on a

$$\limsup_n\{\mathrm{J}_\varepsilon(\mathrm{P}_nf-\mathrm{P}f):f\in\mathrm{L},\|f\|_\varepsilon\leqq 1\}=0.$$

Démonstration. — Soit $f\in\mathrm{L}$ telle que $\|f\|_\varepsilon\leqq 1$, posons $k_n=\mathrm{P}_nf-\mathrm{P}f$, d'après la proposition 2.2

$$m(k_n)\leqq 2\,m(f)\leqq 2,$$

il en résulte, d'une part que les k_n sont équi-uniformément continues sur M, d'autre part que, pour tout $x\in\mathrm{M}$ et tout n,

$$\frac{|k_n(x)|}{(1+d(\chi,x))^{1+\varepsilon}}\leqq\frac{|k_n(\chi)|}{(1+d(\chi,x))^{1+\varepsilon}}+2\frac{d(\chi,x)}{(1+d(\chi,x))^{1+\varepsilon}};$$

il suffit donc, pour établir que $\lim_n \mathrm{J}_\varepsilon(k_n)=0$ de prouver que, pour tout $x\in\mathrm{M}$, $\lim_n k_n(x)=0$. Pour cela, x étant fixé, posons $h(g)=f(g\,.\,x)$, on a

$$|f(g\,.\,x)-f(x)|\leqq m(f)\,d(g\,.\,x,x)\leqq 2\,d(x,\chi)+d(\chi,g\,.\,\chi),$$

soit, d'après (E), e désignant la matrice identité,

$$|h(g)|\leqq|h(e)|+d(x,\chi)+2\log d+l(g)$$

de (H'1) il résulte alors que $\lim_n \mu_n(h)=\mu(h)$.

Considérons l'espace normé L' obtenu en munissant L de la norme J_ε. D'après le théorème d'Ascoli $\mathrm{B}=\{f:f\in\mathrm{L},\|f\|_\varepsilon\leqq 1\}$ est une partie compacte de L', nous venons d'établir que la suite $(\mathrm{P}_n)_n$ converge simplement vers P sur B, puisque d'après la proposition 2.2 et (H'1) les opérateurs P_n sont équicontinus sur L', cette convergence est uniforme, ce qu'il fallait établir.

Démonstration du théorème 2. — Vérifions que les hypothèses de la proposition 2.0 sont satisfaites avec

$$\mathrm{B}=\mathrm{L},\qquad \mathrm{J}=\mathrm{J}_\varepsilon\qquad\text{et}\qquad \mathscr{S}=\{\mathrm{P}(\mu):\mu\in\mathscr{K}\}.$$

La compacité de $\mathscr{K}$ et la proposition 2.3 impliquent (*b*). Si $m(f)=0$, f est constante donc $f\in\mathrm{Ker}\,(\mathrm{I}-\mathrm{P})$, d'où (*c*1).(*c*3) résulte de la proposition 2.2 qui prouve également (*c*2) avec $r=c(\mathscr{K})$. (*c*4) se déduit du théorème d'Ascoli et de la continuité de $\mathrm{P}(\mu)$ sur $(\mathrm{L},\|\,.\,\|)$. Enfin pour établir (*c*5) considérons une suite (f_n) de $\mathrm{D}\cap\mathrm{Ker}\,\mathrm{N}(\mathrm{P}(\mu))$, $\mu\in\mathscr{K}$, et $f\in\mathrm{L}$, telles que

$\lim_n J_\varepsilon(f_n - f) = 0$, on a , pour tout n et $x \in M$,

$$|f_n(x)| \leq \sup_n |f_n(\chi)| + d(\chi, x) = h(x),$$

puisque h est intégrable par rapport à la probabilité $P(\mu)$-invariante ν, il vient

$$0 = \lim_n N(P(\mu)) f_n = \left(\lim_n \int f_n \, d\nu\right) 1 = \int f \, d\nu \, . \, 1 = N(P(\mu)) f.$$

Nous pouvons donc conclure comme indiqué.

2.3. *Action de* μ *sur les fonctions différentiables*

2.3.1. *Les espaces* $\mathscr{C}^k$

On note $\mathscr{C}^k(M)$ l'espace des fonctions k fois continûment différentiables sur M et l'on désigne par $d_x^k f$ la différentielle d'une telle fonction.

L'hyperplan d'équation $\sum_{i=1}^{d} v_i = 0$ est tangent à M, $\mathscr{V}$ désignera l'ensemble des éléments non nuls de cet hyperplan et $\mathscr{V}_1$ sa boule unité.

Si $v \in \mathscr{V}$, $S(v)$ est l'ensemble des segments ouverts de direction v dans M *i.e.* des $]a, b[= \{(1-\lambda) a + \lambda b : 0 < \lambda < 1\}$ où $a, b \in \mathrm{Fr}(M)$ et $\|v\| (b-a) = \|b-a\| v$.

On désigne par V le champ de vecteurs sur M dont les courbes intégrales, indexées par les couples (a, b) tels que $]a, b[\in S(v)$ sont les isométries de $\mathbb{R}$ sur $]a, b[$ définies par

$$\Psi_{ab}(t) = \frac{1}{1+e^t}(a + e^t b).$$

L'application réciproque de Ψ_{ab} est définie par

$$x \in]a, b[, \qquad x = (1-\lambda) a + \lambda b,$$
$$\Phi_{ab}(x) = \log \frac{\lambda}{1-\lambda}$$

de sorte que, pour $x \in]a, b[\in S(v)$ et $f \in \mathscr{C}^1(M)$,

$$Vf(x) = (f \circ \Psi_{ab})'(\Phi_{ab}(x)).$$

On remarquera que le champ de vecteurs V ne dépend que de la direction du vecteur v : si $w = kv$, $k > 0$, $W = V$. L'intérêt de considérer un tel champ de vecteurs apparaît dans le corollaire 2, conséquence du point

(*i*) de la proposition suivante qui donne également une formule intrinsèque pour le calcul de $\mathrm{V}f(x)$.

PROPOSITION 2.4. — *Soit* $f \in \mathscr{C}^1(\mathrm{M})$ *et* $v \in \mathrm{V}$

(i) *pour tout* x, $y \in]a, b[\in \mathrm{S}(v)$, *il existe* z *dans le segment ouvert d'extrémités* x, y *tel que*

$$|f(x)-f(y)| = d(x, y)\,|\mathrm{V}f(z)|,$$

(ii) *si* $x \in]a, b[\in \mathrm{S}(v)$ *s'écrit* $x = (1-\lambda)\,a + \lambda\, b$, *l'on a*

$$\mathrm{V}f(x) = \alpha(x, v)\, d_x f(v)$$

où

$$\alpha(x, v) = \lambda(1-\lambda)\frac{\|b-a\|}{\|v\|} = \lim_{t \to 0_+} \frac{t}{d(x, x+tv)},$$

α *est une fonction continue strictement positive et majorée sur* $\mathrm{M} \times \mathscr{V}_1$.

Démonstration. — (i) Par application de la formule des accroissements finis, il existe s entre $\Phi_{ab}(x)$ et $\Phi_{ab}(y)$ tel que

$$f(x)-f(y) = f \circ \Psi_{ab}(\Phi_{ab}(x)) - f \circ \Psi_{ab}(\Phi_{ab}(y)) = (\Phi_{ab}(x) - \Phi_{ab}(y))\,(f \circ \Psi_{ab})'(s)$$

mais

$$(f \circ \Psi_{ab})'(s) = (f \circ \Psi_{ab})'(\Phi_{ab}(\Psi_{ab}(s))) = \mathrm{V}f(\Psi_{ab}(s)),$$

puisque Φ_{ab} est une isométrie de $]a, b[$ sur $\mathbb{R}$, on conclut en posant $z = \Psi_{ab}(s)$.

(ii) $\Psi'_{ab}(t) = \dfrac{e^t}{(1+e^t)^2}(b-a)$ donc $\Psi'_{ab}(\Phi_{ab}(x)) = \lambda(1-\lambda)(b-a)$ et

$$\mathrm{V}f(x) = d_x f(\Psi'_{ab}(\Phi_{ab}(x))) = \lambda(1-\lambda)\, d_x f(b-a) = \lambda(1-\lambda)\frac{\|b-a\|}{\|v\|}\, d_x f(v).$$

Les propriétés de α sur $\mathrm{M} \times \mathscr{V}_1$ sont claires. Supposons $v_i \neq 0$ et appliquons la formule de (i) à la fonction $f(x) = x_i$, pour $t > 0$ il existe θ, $0 < \theta < 1$ tel que

$$x_i - (x_i + tv_i) = d(x, x+tv)\,\alpha(x + \theta\, tv, v)\, v_i$$

d'où la définition de α comme limite.

Soit $v \in \mathscr{V}$ et $l \geqq 1$, V^l désigne le l-ième itéré de V, et pour $f \in \mathscr{C}^l(\mathrm{M})$, on pose

$$\mathrm{V}_l f(x) = [\alpha(x, v)]^l\, d_x^l f(v^l)$$

où v^l est le vecteur $(v, \ldots, v)$ de $\mathscr{V}^l$.

A ces opérateurs sont associées les semi-normes sur $\mathscr{C}^k(\mathrm{M})$, $k \geqq 1$, définies par

$$f \in \mathscr{C}^k(\mathrm{M}), \qquad \|f\|_k = |f(\chi)| + \sum_{l=1}^{k} \mathrm{J}_l(f),$$

$$\|f\|'_k = |f(\chi)| + \sum_{l=1}^{k} \mathrm{J}'_l(f)$$

où

$$\mathrm{J}_l(f) = \sup\{|\mathrm{V}_l f(x)| : x \in \mathrm{M}, v \in \mathscr{V}\},$$
$$\mathrm{J}'_l(f) = \sup\{|\mathrm{V}^l f(x)| : x \in \mathrm{M}, v \in \mathscr{V}\}.$$

$\mathscr{C}^k$ est l'espace vectoriel des $f \in \mathscr{C}^k(\mathrm{M})$ telles que $\|f\|_k < +\infty$.

COROLLAIRE 2. — *Pour* $f \in \mathscr{C}^1(\mathrm{M})$, $\mathrm{J}_1(f) = m(f)$. $(\mathscr{C}^1, \|.\|_1)$ *est un sous-espace isométrique de* $(\mathrm{L}, \|.\|)$.

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate de la proposition 2.4.

PROPOSITION 2.5. — *Sur* $\mathscr{C}^k(\mathrm{M})$ *les semi-normes* $\|.\|_k$ *et* $\|.\|'_k$ *sont équivalentes.* $(\mathscr{C}^k, \|.\|_k)$ *est un espace de Banach.*

Démonstration. — L'équivalence des semi-normes repose sur le

LEMME 2.1. — *Les opérateurs* V^k *et* V_l *sont liés par les relations*

$$\mathrm{V}^k = \sum_{l=1}^{k-1} a_{kl} \mathrm{V}_l + \mathrm{V}_k,$$
$$\mathrm{V}_k = \sum_{l=1}^{k-1} b_{kl} \mathrm{V}^l + \mathrm{V}^k,$$

où a_{kl} *et* b_{kl} *désignent des fonctions bornées sur* M.

Démonstration du lemme. — La seconde formule est une conséquence immédiate de la première.

Soit $]a, b[\in \mathrm{S}(v)$, la fonction λ de $]a, b[$ dans $]0, 1[$ définie par $x = (1 - \lambda(x))\, a + \lambda(x)\, b$ est affine et sa différentielle est telle que $d\lambda(b - a) = 1$. Si p est un polynôme $\mathrm{V}p \circ \lambda$ est définie sur $]a, b[$ et

$$\mathrm{V}p \circ \lambda(x) = \alpha(x, v)\, d_x p \circ \lambda(v) = \lambda(x)(1 - \lambda(x)) \frac{\|b - a\|}{\|v\|} p'(\lambda(x))\, d\lambda(v)$$
$$= \lambda(x)(1 - \lambda(x))\, p' \circ \lambda(x)$$

en particulier

$$\mathrm{V}\,\alpha(.,v)(x)=\lambda(x)(1-\lambda(x))(1-2\lambda(x))\frac{\|b-a\|}{\|v\|}=(1-2\lambda(x))\,\alpha(x,v).$$

Par suite

$$\begin{aligned}\mathrm{VV}_l f(x)&=\mathrm{V}\,[\alpha(.,v)]^l(x)\,d_x^l f(v^l)+[\alpha(x,v)]^l\,\mathrm{V}\,d^l.\,f(v^l)(x)\\&=l\,[\alpha(x,v)]^{l-1}(1-2\lambda(x))\,\alpha(x,v)\,d_x^l f(v^l)+[\alpha(x,v)]^{l+1}\,d_x^{l+1}f(v^{l+1}),\\\mathrm{VV}_l f(x)&=l(1-2\lambda(x))\,\mathrm{V}_l f(x)+\mathrm{V}_{l+1}f(x).\end{aligned}$$

On a $\mathrm{V}^1=\mathrm{V}=\mathrm{V}_1$.

Faisons l'hypothèse que, pour $x\in]a,b[$,

$$\mathrm{V}^k f(x)=\sum_{l=1}^{k-1}p_{kl}\circ\lambda(x)\,\mathrm{V}_l f(x)+\mathrm{V}_k f(x)$$

où p_{kl} est un polynôme de degré $\leqq k-1$ dont les coefficients ne dépendent pas de v, il vient

$$\begin{aligned}\mathrm{V}^{k+1}f(x)&=\sum_{l=1}^{k-1}\mathrm{V}\,p_{kl}\circ\lambda(x)\,\mathrm{V}_l f(x)\\&\quad+\sum_{l=1}^{k-1}p_{kl}\circ\lambda(x)\,\mathrm{VV}_l f(x)+\mathrm{VV}_k f(x)\\&=\sum_{l=1}^{k-1}\lambda(x)(1-\lambda(x))\,p'_{kl}\circ\lambda(x)\,\mathrm{V}_l f(x)\\&\quad+\sum_{l=1}^{k-1}p_{kl}\circ\lambda(x)\,[l(1-2\lambda(x))\,\mathrm{V}_l f(x)+\mathrm{V}_{l+1}f(x)]\\&\qquad+k(1-2\lambda(x))\,\mathrm{V}_k f(x)+\mathrm{V}_{k+1}f(x)\end{aligned}$$

donc

$$\mathrm{V}^{k+1}f(x)=\sum_{l=1}^{k}p_{k+1,l}\circ\lambda(x)\,\mathrm{V}_l f(x)+\mathrm{V}_{k+1}f(x)$$

où les $p_{k+1\,l}$ sont des polynômes de degré $\leqq k$ indépendants de v.

On conclut en remarquant que $0<\lambda(x)<1$.

Prouvons maintenant que $\mathscr{C}^k$ est un espace de Banach.

Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy dans $(\mathscr{C}^k,\|.\|_k)$, puisque, pour $v\in\mathscr{V}_1$ et x dans un ouvert relativement compact U de M, α est minorée par un réel >0, une identité de polarisation classique montre que, pour $l=0\ldots k$, $(d^l f_n)_n$ est une suite de Cauchy pour la métrique de la convergence uniforme des fonctions sur $\mathrm{U}\times\mathscr{V}_1^{\wedge l}$, de sorte qu'il existe $f\in\mathscr{C}^k(\mathrm{M})$ telle que $(d^l f_n)_n$

converge vers $d^l f$ uniformément sur $U \times \mathscr{V}_1^l$. De l'arbitraire de U on conclut que $f \in \mathscr{C}^k$ et que $(f_n)_n$ converge vers f dans $\mathscr{C}^k$.

2.3.2. *Action de* P *sur* $\mathscr{C}^k$

On prouve le

THÉORÈME 3. — *Pour tout* $\mu \in \mathscr{K}$, $P(\mu)$ *et* $Q(\mu)$ *sont des endomorphismes continus de* $\mathscr{C}^k$ *tels que*:

$$\rho(Q(\mu) \leqq c(\mathscr{K}),$$

pour tout compact K, $K \subset F(c(\mathscr{K}))^c$,

$$\sup\{\| R(z, P(\mu)) \| : z \in K, \mu \in \mathscr{K}\} < +\infty.$$

COROLLAIRE 3. — *Soit* Γ *le cercle de centre* 1 *et de rayon* $\frac{1}{2}(1-c(\mathscr{K}))$ *dans* $\mathbb{C}$, *intégrant dans* $\mathscr{L}(\mathscr{C}^k)$ *on a, pour tout* $\mu \in \mathscr{K}$,

$$N(\mu) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma R(z, P(\mu))\, dz.$$

Démonstration du corollaire. — En effet, on vérifie aisément que, pour $|z| > c(\mathscr{K})$, on a dans $\mathscr{L}(\mathscr{C}^k)$,

$$R(z, P(\mu)) = \frac{1}{z-1} N(\mu) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} Q(\mu)^n.$$

La preuve du théorème 3 repose sur la

PROPOSITION 2.6. — *Soit* $\mu \in \mathscr{P}_+^{1+\varepsilon}$ *alors*

(i) *si* $f \in \mathscr{C}^k$, $P(\mu) f \in \mathscr{C}^k$ *et, pour* $l = 1 \ldots k$,

$$V^l P(\mu) f(x) = \int V^l f \circ g(x)\, d\mu(g),$$

(ii) *pour* $k \geqq 2$, *il existe une constante* R_k *ne dépendant que de* $l^{1+\varepsilon}(\mu)$ *telle que, pour tout* $f \in \mathscr{C}^k$,

$$\| P(\mu) f \|_k' \leqq R_k \| f \|_{k-1}' + c_k(\mu) \| f \|_k'$$

où

$$c_k(\mu) = \int c(g)^k\, d\mu(g).$$

Démonstration. — Ici g désigne la transformation projective associée à $g \in G_+$.

Puisque d'après (E) et le corollaire 2

$$|f(g.\chi)| \leqq |f(\chi)| + m(f)\, d(\chi, g.\chi) \leqq |f(\chi)| + J_1(f)\,[2 \operatorname{Log} d + l(g)],$$

l'essentiel est contenu dans le

LEMME 2.2. — *Il existe des constantes c_{kl}, $l = 1 \ldots k-1$, telles que, pour tout $g \in G_+$ et $f \in \mathscr{C}^k(M)$,*

$$J'_k(f \circ g) \leqq \sum_{l=1}^{k-1} c_{kl} J'_l f + [c(g)]^k J'_k f.$$

Démonstration du lemme. — Soient $v \in \mathscr{V}$, $]a, b[\in S(v)$, $g \in G_+$ et a_1, $b_1 \in \operatorname{Fr}(M)$ tels que $g(]a, b[) \subset]a_1, b_1[$, on pose

$$\Psi = \Psi_{ab}, \qquad \Phi = \Phi_{ab}, \qquad \Psi_1 = \Psi_{a_1 b_1},$$
$$\Phi_1 = \Phi_{a_1 b_1} \qquad \text{et} \qquad h = \Phi_1 \circ g \circ \Psi.$$

Si $x \in]a, b[$, en notant $t = \Phi(x)$, on a

$$\begin{aligned} V^k f \circ g(x) &= (f \circ g \circ \Psi)^{(k)}(t) = (f \circ \Psi_1 \circ h)^{(k)}(t) \\ &= \sum_{l=1}^{k-1} (f \circ \Psi_1)^{(l)}(h(t))\, r_{kl}(t) + (f \circ \Psi_1)^{(k)}(h(t))\,(h'(t))^k \\ &= \sum_{l=1}^{k-1} r_{kl}(t)\, W^l f(g.x) + (h'(t))^k W^k f(g.x) \end{aligned}$$

où r_{kl} est un polynôme en $h^{(l)}$, $l = 1 \ldots k$ et $w = b_1 - a_1$, il suffit donc de déterminer des bornes pour les dérivées $h^{(l)}$.

Soit $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, α, β, γ, $\delta \geqq 0$, la matrice dans les bases (a, b) et (a_1, b_1), de la restriction de l'endomorphisme g au sous-espace engendré par a et b, l'on a

$$h(t) = \log \frac{\gamma + \delta e^t}{\alpha + \beta e^t}.$$

De

$$h'(t) = \frac{\delta e^t}{\gamma + \delta e^t} - \frac{\beta e^t}{\alpha + \beta e^t}$$

il vient

$$\sup_t |h'(t)| = th \left| \frac{r}{4} \right|$$

où

$$|r| = \left| \log \frac{\delta}{\beta} - \log \frac{\gamma}{a} \right| = d(g.a, g.b) \leqq \operatorname{diam}(g.\mathrm{M}) = \lambda(g)$$

soit

$$\sup_t |h'(t)| \leqq th \frac{\lambda(g)}{4} = c(g),$$

d'après (C).

En remarquant que la fonction φ définie par $\varphi(t) = \dfrac{ue^t}{v + ue^t}$,

$u > 0$, $v \geqq 0$, satisfait à $0 < \varphi(t) \leqq 1$ et $\varphi'(t) = \varphi(t)(1 - \varphi(t))$

on concluera que les dérivées $h^{(l)}$ sont bornées par des constantes indépendantes de $g \in \mathrm{G}_+$.

Soit $f \in \mathscr{C}^k$, la fonction $f \circ g$ est k fois continûment différentiable sur M et les lemmes 2.1 et 2.2 montrent que les différentielles $d_x^l f \circ g$ sont bornées en norme pour $g \in \mathrm{G}_+$ et x dans un ouvert relativement compact de M, de sorte que, pour tout $u \in \mathscr{V}^l$ et $x \in \mathrm{M}$,

$$d_x^l \mathrm{P}(\mu) f(u) = \int d_k^l f \circ g(u)\, d\mu(g)$$

et

$$\mathrm{V}_l \mathrm{P}(\mu) f(x) = \int \mathrm{V}_l f \circ g(x)\, d\mu(g),$$

et, par le lemme 2.1,

$$\mathrm{V}^l \mathrm{P}(\mu) f(x) = \int \mathrm{V}^l f \circ g(x)\, d\mu(g),$$

le point (ii) est alors établi par application du lemme 2.2.

Démonstration du théorème 3. — D'après la proposition 2.2 et le corollaire 2, il existe une constante R telle que, pour tout $\mu \in \mathscr{K}$ et $f \in \mathscr{C}^1$,

$$\|\mathrm{P}(\mu) f\|_1 = \|\mathrm{P}(\mu) f\| \leqq \mathrm{R}\, \|f\| + 0\, \|f\|_1.$$

Il résulte alors du théorème 2 et de la proposition 2.1 que $(\mathrm{P}(\mu))\ \mu \in \mathscr{K}$ a sur $\mathscr{C}^1$ la propriété $\Pi(c(\mathscr{K}))$; cette propriété s'étend de proche en proche à tous les espaces $\mathscr{C}^k$ en utilisant la proposition 2.6 et la proposition 2.1.

3. Régularité différentielle de γ

Nous commençons par étudier la régularité de $\gamma(\mu_s)$ lorsque $(\mu_s)_s$ est une famille de probabilités sur G_+ dépendant d'un paramètre réel, ce résultat est ensuite appliqué au cas où les coefficients des matrices eux-mêmes dépendent d'un paramètre.

3.1. *Famille de probabilités dépendant d'un paramètre*

Les arguments de ce paragraphe sont empruntés à [7], lemmes 7 et 8.

Il est commode d'introduire ici $\mathscr{C}^\infty = \bigcap_{k \geqq 1} \mathscr{C}^k$ qui muni des normes $\|.\|_i$, $i \geqq 1$, est un espace de Fréchet et l'espace $\mathscr{L}$ des endomorphismes continus de $\mathscr{C}^\infty$.

Pour $i, j \geqq 1$ et $P \in \mathscr{L}$, on pose

$$\|P\|_{ij} = \sup\left\{\frac{\|Pf\|_j}{\|f\|_i} : f \in \mathscr{C}^\infty \setminus \{0\}\right\},$$

si $r \geqq 0$, $\mathscr{L}_r$ désigne alors le sous-espace des $P \in \mathscr{L}$ tels que, pour tout $i \geqq 1$, $\|P\|_{i+r,i} < +\infty$, muni des normes $\|.\|_{i+r,i}$, $i \geqq 1$. Comme les normes $\|.\|_i$ forment une suite croissante, $\mathscr{L}_r$ est inclus dans $\mathscr{L}_{r+1}$ et l'injection canonique est continue.

Dans ce qui suit, E et F étant des ensembles munis des structures convenables, $\mathscr{C}^k(E, F)$ désigne l'espace des fonctions k fois continûment dérivables de E dans F, si $k \geqq 1$, continues de E dans F, si $k = 0$.

Soit maintenant $(\mu_s)_{s \in J}$ une famille de probabilités sur G_+ indexée par l'intervalle ouvert J de $\mathbb{R}$, on note P_s l'opérateur de transition associé sur M, l'on pose

$$\bar{\sigma}_s(x) = \int \log \|gx\| \, d\mu_s(g) \qquad \text{et} \qquad \gamma(s) = \gamma(\mu_s).$$

PROPOSITION 3.1. — *Supposons que, pour tout* I *intervalle ouvert relativement compact dans* J,

(i) $\{\mu_s : s \in \bar{I}\}$ *satisfait à* (H1), (H2), (H3),

(ii) *il existe* q *tel que* $P. \in \mathscr{C}^k(I, \mathscr{L}_q)$,

(iii) $\bar{\sigma}. \in \mathscr{C}^k(I, \mathscr{C}^\infty)$

alors $\gamma \in \mathscr{C}^k(J, \mathbb{R})$.

Démonstration. — Soit I comme dans l'énoncé, le théorème 3 s'applique à l'action sur tous les espaces $\mathscr{C}^l$ de $\mathscr{K} = \{\mu_s : s \in \bar{I}\}$, en particulier, en

posant $U = F(c(\mathscr{K}))^c$, $R(z, s) = R(z, P_s)$ est définie et bornée sur tout compact de $U \times I$. Remarquons qu'alors $R(z, s) \in \mathscr{L}_0$.

LEMME 3.1. — *Il existe $r \geqq 0$ tel que*
(i) *pour* $z \in U$, $R(z, .) \in \mathscr{C}^k(I, \mathscr{L}_r)$,
(ii) *pour* $j = 0 \ldots k$, $\dfrac{\partial^j R}{\partial s^j} \in \mathscr{C}^0(U \times I, \mathscr{L}_r)$.

Démonstration du lemme. — (*a*) Prouvons l'assertion pour $k = 1$ en faisant usage de l'équation résolvante

$$R(z, s) - R(z_0, s_0) = R(z, s)((z_0 - P_{s_0}) - (z - P_s)) R(z_0, s_0).$$

Pour $i \geqq 1$

$$\| R(z, s) - R(z_0, s_0) \|_{i+q, i} \leqq \| R(z, s) \|_{i, i} \| (z_0 - P_{s_0}) - (z - P_s) \|_{i+q, i} \| R(z_0, s_0) \|_{i+q, i+q},$$

puisque $\| R(z, s) \|_{i, i}$ est bornée sur tout compact de $U \times I$, on conclut que

$$R \in \mathscr{C}^0(U \times I, \mathscr{L}_q).$$

Par un argument similaire, on voit que

$$\frac{1}{s - s_0}[R(z, s) - R(z, s_0)] = R(z, s) \frac{1}{s - s_0}(P_s - P_{s_0}) R(z, s_0)$$

a une limite dans $\mathscr{L}_{2q}$ lorsque s tend vers s_0, donc $R(z, .)$ est dérivable de I dans $\mathscr{L}_{2q}$ et

$$\frac{\partial}{\partial s} R(z, s) = R(z, s) \frac{dP}{ds}(s) R(z, s),$$

comme $(u, v, w) \to uvw$ est continue de $(\mathscr{L}_q)^3$ dans $\mathscr{L}_{3q}$,

$$\frac{\partial R}{\partial s} \in \mathscr{C}^0(U \times I, \mathscr{L}_{3q}).$$

On posera $r = 3q$.

(*b*) Supposons le lemme établi pour l'entier $j, j \geqq 1$.

Si $P. \in \mathscr{C}^{j+1}(I, \mathscr{L}_q)$, $P. \in \mathscr{C}^j(I, \mathscr{L}_q) \subset \mathscr{C}^1(I, \mathscr{L}_q)$ et, d'après l'hypothèse de récurrence, il existe r tel que la fonction $(R(z, .), \dfrac{dP}{ds}(.), R(z, .))$ est j fois dérivable de I dans $\mathscr{L}_r \times \mathscr{L}_q \times \mathscr{L}_r$, que ses dérivées sont continues sur $U \times I$ et l'on a $\dfrac{\partial R}{\partial s} = R \dfrac{dP}{ds} R$, comme la fonction $(u, v, w) \to uvw$ est indéfiniment différentiable de $\mathscr{L}_r \times \mathscr{L}_q \times \mathscr{L}_r$, dans $\mathscr{L}_{2r+q}$ l'assertion du lemme est prouvée pour l'entier $j + 1$.

Nous achevons maintenant la preuve de la proposition.

D'après le corollaire 3, on a par intégration dans $\mathscr{L}_0$ donc dans $\mathscr{L}_r$

$$\nu_s(.)\,1 = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma R(z,s)\,dz$$

et il résulte du lemme qu'il existe r tel que le second membre est une fonction k fois continûment différentiable de I dans $\mathscr{L}_r$, c'est-à-dire que $\nu.$ est k fois continûment dérivable de I dans le dual $(\mathscr{C}^r)'$ de $\mathscr{C}^r$. Comme $\bar{\sigma} \in \mathscr{C}^k(\mathrm{I}, \mathscr{C}^\infty) \subset \mathscr{C}^k(\mathrm{I}, \mathscr{C}^r)$ et que en faisant usage du crochet de dualité $((\mathscr{C}^r)', \mathscr{C}^r)$ on a $\gamma(s) = \langle \nu_s, \bar{\sigma}_s \rangle$, on conclut que $\gamma \in \mathscr{C}^k(\mathrm{I}, \mathbb{R})$.

3.2. *Famille de matrices dépendantes d'un paramètre*

Dans ce paragraphe pour achever la preuve du théorème nous vérifions que sous les conditions (C1), (C2), (C3) les lois μ_s de g_s satisfont aux hypothèses de la proposition 3.1.

Pour alléger l'écriture des matrices ou de leurs coefficients on s'autorise lorsque cela ne crée pas d'ambiguïté à omettre la variable ω.

3.2.1. *Vérification de* (i)

Pour des matrices de déterminant ± 1, (H1) se réduit à

$$\sup\left\{\int [\log^+ \|g_s\|]^{1+\varepsilon}\,dp : s \in \mathrm{I}\right\} < +\infty$$

qui d'après (D), équivaut à (C1).

La continuité de $g_0(\omega)$ montre que μ_s est une fonction continue de s, puisque I est relativement compact dans J, on en déduit (H2) et également (H3) car, d'après (C2), $c(\mu_s) < 1$.

3.2.2. *Définition des espaces $\mathscr{C}^k$ à l'aide des coordonnées*

On vérifiera plus commodément les points (ii) et (iii) en utilisant la représentation de M et les normes équivalentes aux $\|.\|_k$ suivants.

On pose $m = d-1$ et l'on identifie M à $(\mathbb{R}_+^*)^m$ à l'aide de la bijection affine :

$$(\mathbb{R}_+^*)^m \ni (x_1, \ldots, x_m) \to \left(\sum_{i=1}^m x_i + 1\right)^{-1} (x_1, \ldots, x_m, 1) \in \mathrm{M},$$

$\mathscr{V}$ s'identifie alors à $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$. Pour tout multi-entier $r = (r_1, \ldots, r_m) \in \mathbb{N}^m$, on pose $|r| = r_1 + \ldots + r_m$ et l'on définit sur $\mathscr{C}^\infty$ les opérateurs ∂_r et D_r

par

$$\partial_r f(x) = \frac{\partial^{|r|} f}{\partial x_1^{r_1} \ldots \partial x_m^{r_m}}(x), \qquad \mathrm{D}_r f(x) = x_1^{r_1} \ldots x_m^{r_m} \partial_r f(x),$$

auxquels on associe, pour $k \geqq 1$, les semi-normes sur $\mathscr{C}^\infty$

$$|||f|||_k = |f(\chi)| + \sum_{r : |r| \leqq k} \sup \{ |\mathrm{D}_r f(x)| : x \in \mathrm{M} \}.$$

PROPOSITION 3.2. — *$\mathscr{C}^k$ est l'espace vectoriel des $f \in \mathscr{C}^k(\mathrm{M})$ telles que $|||f|||_k < +\infty$, sur $\mathscr{C}^k$ les normes $\|.\|_k$ et $|||.|||_k$ sont équivalentes.*

Démonstration. — Nous utiliserons le

LEMME 3.2. — *Pour $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathrm{M}$ et $v = (v_1, \ldots, v_m) \in \mathscr{V}$, on a*

$$\alpha(x, v) = [\tau(x, v) + \tau(x, -v)]^{-1}$$

où $\tau(x, v) = \max \left\{ 0, \frac{v_1}{x_1}, \ldots, \frac{v_m}{x_m} \right\}$.

Démonstration du lemme. — Soit $t > 0$, on a, d'après (B), en posant $x_d = 1$ et $v_d = 0$,

$$\begin{aligned} d(x, x+tv) &= \log \max \left\{ \left(1 + t\frac{v_i}{x_i}\right)\left(1 + t\frac{v_j}{x_j}\right)^{-1} : i, j = 1 \ldots d \right\} \\ &= \log[1 + t\tau(x, v)] - \mathrm{Log}[1 - t\tau(x, -v)] \end{aligned}$$

et

$$\alpha(x, v) = \lim_{t \to 0+} \frac{t}{d(x, x+tv)} = [\tau(x, v) + \tau(x, -v)]^{-1}.$$

Pour $v = (v_1, \ldots, v_m) \in \mathscr{V}$, $l \geqq 1$ et $f \in \mathscr{C}^\infty$, on a

$$\mathrm{V}_l f(x) = \alpha(x, v)^l \left\{ \sum_{r : |r| = l} v_1^{r_1} \ldots v_m^{r_m} \partial_r f(x) \right\}$$

et en posant $\alpha_i(x, v) = \alpha(x, v) \dfrac{v_i}{x_i}$

$$\mathrm{V}_l f(x) = \sum_{r : |r| = l} \alpha_1(x, v)^{r_1} \ldots \alpha_m(x, v)^{r_m} \mathrm{D}_r f(x).$$

Puisque $|\alpha_i(x, v)| \leqq 1$, il vient

$$\mathrm{J}_l f \leqq \sum_{r : |r| = l} \sup \{ |\mathrm{D}_r f(x)| : x \in \mathrm{M} \}$$

de sorte que $|||.|||_k$ est plus fine que $\|.\|_k$.

D'autre part, x étant fixé, définissons $v \in \mathscr{V}$ par $v_m = x_m$ et $v_i = t_i x_i$, $0 \leqq t_i \leqq 1$, pour $i = 1 \ldots m$, dans ce cas

$$\alpha_m(x, v) = \alpha(x, v) = 1 \qquad \text{et} \qquad \alpha_i(x, v) = t_i, i = 1 \ldots m-1$$

d'où

$$V_l f(x) = \sum_{r : |r| = l} t_1^{r_1} \ldots t_{m-1}^{r_{m-1}} D_r f(x),$$

or (en utilisant, par exemple, l'équivalence des normes sur un espace vectoriel de dimension finie) il existe une constante C_l telle que pour tout polynôme à $m-1$ variables de degré $\leqq l$,

$$P(t_1, \ldots, t_{m-1}) = \sum_{r : |r| \leqq l} a_r t_1^{r_1} \ldots t_{m-1}^{r_{m-1}}$$

on ait

$$\sup\{|a_r| : r, |r| \leqq l\} \leqq C_l \sup\{|P(t_1, \ldots, t_{m-1})| : t_i \in [0, 1], i = 1 \ldots m-1\},$$

par suite, pour $f \in \mathscr{C}^\infty$ et $x \in M$,

$$\sup\{|D_r f(x)| : r, |r| \leqq l\} \leqq C_l \sup\{|V_l f(x)| : t_i \in [0, 1], i = 1 \ldots m-1\} \leqq C_l J_l f$$

ce qui permet de conclure à l'équivalence des normes.

3.2.3. *Vérification de* (ii)

Nous prouvons que pour un q convenable $P. \in \mathscr{C}^k(I, \mathscr{L}_q)$ où I est un intervalle ouvert relativement compact dans J.
Pour $f \in \mathscr{C}^\infty$, on pose $f \circ g_s(x) = f(g_s . x)$.

LEMME 3.3. — *Soit $f \in \mathscr{C}^\infty$ alors, pour $l = 1 \ldots k+2$, on a $\frac{\partial^l}{\partial s^l} f \circ g_s \in \mathscr{C}^\infty$; de plus, pour $r \in \mathbb{N}^m$, il existe $C_r > 0$ tel que : pour tout $f \in \mathscr{C}^\infty$, $l = 1 \ldots k+2$, $s \in I$, on ait*

$$\sup\left\{\left|D_r \frac{\partial^l}{\partial s^l} f \circ g_s(x)\right| : x \in M\right\} \leqq C_r w^l \, \| |f| \|_{l+r}.$$

Démonstration. — On pose, pour $i = 1 \ldots m$,

$$g_{si}(x) = a_{il}(s) x_1 + \ldots + a_{im}(s) x_m + a_{id}(s)$$

et

$$g_{si} . x = \frac{g_{si}(x)}{g_{sd}(x)}$$

l'on a

$$g_s \cdot x = (g_{s1} \cdot x, \ldots, g_{sm} \cdot x).$$

Les dérivées l-ième par rapport à s de ces fonctions seront signalées par l'indice supérieur (l).

LEMME 3.4. — *Pour tout $r \in \mathbb{N}^m$, il existe une constante C'_r telle que: pour $l = 1 \ldots k+2$, $i = 1 \ldots m$, $s \in I$, $x \in M$,*

$$\left| D_r \left(\frac{g_{si}^{(l)} \cdot x}{g_{si} \cdot x} \right) \right| \leqq C'_r w^l.$$

Démonstration du lemme 3.4. — Remarquons que, si u est l fois dérivable de I dans $\mathbb{R}_+^*$, on a

$$(\log u)^{(l)} = P_l \left(\frac{u'}{u}, \frac{u''}{u}, \ldots, \frac{u^{(l)}}{u} \right)$$

et

$$\frac{u^{(l)}}{u} = Q_l (\log u)', (\log u)'', \ldots, (\log u)^{(l)})$$

où P_l et Q_l sont des polynômes à l variables possédant la propriété d'homogénéité de degré l définie par

$$\lambda \geqq 0, \qquad S_l(\lambda X_1, \lambda^2 X_2, \ldots, \lambda^l X_l) = \lambda^l S_l(X_1, X_2, \ldots, X_l).$$

Si v est une autre fonction l fois dérivable de I dans $\mathbb{R}_+^*$, on a

$$\frac{(u/v)^{(l)}}{(u/v)} = R_l \left(\frac{u'}{u}, \frac{u''}{u}, \ldots, \frac{u^{(l)}}{u}, \frac{v'}{v}, \frac{v''}{v}, \ldots, \frac{v^{(l)}}{v} \right)$$

où

$$\begin{aligned} R_l(X_1, \ldots, X_l, Y_1, \ldots, Y_l) \\ = Q_l(P_1(X_1) - P_1(Y_1), \ldots, P_l(X_1, \ldots, X_l) - Q_l(Y_1, \ldots, Y_l)) \end{aligned}$$

est tel que, pour tout $\lambda \geqq 0$,

$$R_l(\lambda X_1, \ldots, \lambda^l X_l, \lambda Y_1, \ldots, \lambda^l Y_l) = \lambda^l R(X_1, \ldots, X_l, Y_1, \ldots, Y_l).$$

Le lemme sera donc établi si l'on prouve pour tout $r \in \mathbb{N}^m$ l'existence d'une constante C''_r telle que, pour $l = 1 \ldots k+2$, $i = 1 \ldots m$, $s \in I$ et $x \in M$

$$\left| D_r \left(\frac{g_{si}^{(l)}(x)}{g_{si}(x)} \right) \right| \leqq C''_r w^l.$$

Omettant la variable s, on écrira, pour $i=1\ldots m$,

$$\frac{g_i^{(l)}(x)}{g_i(x)}=\sum_{j=1}^{m}\frac{(e^{c_{ij}})^{(l)}}{e^{c_{ij}}}g_{ij}(x)+\frac{(e^{c_{id}})^{(l)}}{e^{c_{id}}}g_{id}(x),$$

en posant

$$g_{ij}(x)=\frac{a_{ij}x_j}{g_i(x)}\qquad\text{pour}\quad i=1\ldots m\qquad\text{et}\qquad g_{id}(x)=\frac{a_{id}}{g_i(x)};$$

δ_{jl} étant le symbole de Kronecker, on vérifie que, pour $j=1\ldots d$ et $l=1\ldots m$,

$$x_l\frac{\partial}{\partial x_l}g_{ij}(x)=\delta_{jl}g_{ij}(x)-g_{ij}(x)g_{il}(x),$$

puisque $0<g_{ij}(x)\leqq 1$, l'assertion en résulte en remarquant que $D_{r'}\circ D_r=D_{r'+r}$ et en utilisant finalement l'expression précitée de $(e^{c_{ij}})^{(l)}e^{-c_{ij}}$ à l'aide des dérivées $c_{ij}^{(l')}$, $l'=1\ldots l$.

Revenons à la preuve du lemme 3.3. $\dfrac{\partial^l}{\partial s^l}f\circ g_s(x)$ est une combinaison linéaire de termes

$$d^{\lambda}_{g_s.x}f(g_s^{(l_1)}.x,\ldots,g_s^{(l_\lambda)}.x)$$

où $1\leqq\lambda\leqq l$, $l_1\geqq 1,\ldots,l_\lambda\geqq 1$, $l_1+\ldots+l_\lambda=l$, soit encore combinaison linéaire de termes

$$\begin{aligned}A(f,s,j_1,\ldots,j_\lambda,l_1,\ldots,l_\lambda)(x)&\\ &=\frac{\partial^\lambda f}{\partial x_{j_1}\ldots\partial x_{j_\lambda}}(g_s.x)(g_{s_{j_1}}^{(l_1)}.x)\ldots(g_{s_{j_\lambda}}^{(l_\lambda)}.x)\\ &=D_{r_0}f(g_s.x)\left(\frac{g_{s_{j_1}}^{(l_1)}.x}{g_{s_{j_1}}.x}\right)\ldots\left(\frac{g_{s_{j_\lambda}}^{(l_\lambda)}.x}{g_{s_{j_\lambda}}.x}\right)\end{aligned}$$

pour un $r_0\in\mathbb{N}^m$ convenable tel que $|r_0|=\lambda$.

Or, si $f\in\mathscr{C}^\infty$, $D_{r_0}f\in\mathscr{C}^\infty$ d'après la proposition 3.2 et donc, d'après le lemme 2.2, pour tout $r_1\in\mathbb{N}^m$ il existe une constante C'' telle que, pour tout $f\in\mathscr{C}^\infty$, $s\in I$, $x\in M$

$$|D_{r_1}[(D_{r_0}f)\circ g_s](x)|\leqq C''_{r_1}|||f|||_{|r_1|+\lambda};$$

on conclut alors en utilisant le lemme précédent que, pour $r\in\mathbb{N}^m$, il existe une constante C'''_r telle que, pour $f\in\mathscr{C}^\infty$, $s\in I$, $x\in M$

$$|D_rA(f,s,j_1,\ldots,j_\lambda,l_1,\ldots,l_\lambda)(x)|\leqq C'''_r|||f|||_{|r|+\lambda}w^{l_1+\ldots+l_\lambda},$$

ce qu'il fallait établir.

PROPOSITION 3.3. — $P_{\cdot} \in \mathscr{C}^k(I, \mathscr{L}_{k+2})$.

Démonstration. — Posons, pour $l=0, \ldots, k+2$ et $f \in \mathscr{C}^\infty$

$$P_s^{(l)} f(x) = \int \frac{\partial^l}{\partial s^l} f \circ g_s(x)\, dp.$$

On déduit aisément du lemme 3.3 que cette expression a un sens, que la fonction $P_s^{(l)} f$ est indéfiniment dérivable sur M et que, pour $r \in \mathbb{N}^m$,

$$D_r(P_s^{(l)} f)(x) = \int D_r\left(\frac{\partial^l}{\partial s^l} f \circ g_s\right)(x)\, dp$$

et encore que $P_s^{(l)} \in \mathscr{L}_l$.

D'autre part la permutation des différentielles en x et des dérivations en s étant possible, on a, pour s et $s+t \in I$, $t \neq 0$ et $l=1 \ldots k+1$.

$$\left|\frac{1}{t}\left[D_r \frac{\partial^{l-1}}{\partial s^{l-1}} f \circ g_{s+t}(x) - D_r \frac{\partial^{l-1}}{\partial s^{l-1}} f \circ g_s(x)\right] - D_r \frac{\partial^l}{\partial s^l} f \circ g_s(x)\right|$$
$$\leqq \left|\frac{t}{2}\right| \sup\left\{\left|\frac{\partial^{l+1}}{\partial s^{l+1}} D_r f \circ g_{s+u}(x)\right|, |u| \leqq |t|\right\}$$
$$\leqq \left|\frac{t}{2}\right| C_r w^{l+1} \| |f| \|_{|r|+l+1}$$

par intégration par rapport à p

$$\sup\left\{\left|D_r\left\{\frac{1}{t}[P_{s+t}^{(l-1)} f - P_s^{(l-1)} f] - P_s^{(l)} f\right\}(x)\right| : x \in M\right\}$$
$$\leqq \frac{|t|}{2} C_r \left(\int w^{l+1}\, dp\right) \| |f| \|_{|r|+l+1}$$

de sorte que $P_{\cdot}^{(l-1)}$ est dérivable de I dans $\mathscr{L}_{l+1}$ et de dérivée $P_{\cdot}^{(l)}$.

Finalement $P_{\cdot}^{(0)}$ est $k+1$ fois dérivable de I dans $\mathscr{L}^{k+2}$, d'où le résultat.

3.2.4. *Vérification de* (iii)

Rappelons que gx désigne l'image du vecteur x par l'endomorphisme g.

LEMME 3.5. — *Pour $r \in \mathbb{N}^m$, il existe C_r tel que, pour $l=1 \ldots k+2$, $s \in I$, $x \in M$, on ait*

$$\left|D_r \frac{\partial^l}{\partial s^l} \log \| g_s x \|\right| \leqq C_r w^l.$$

Démonstration. — Il suffit comme au lemme 3.4, d'établir que, pour $l=1\ldots k+2$, il existe C telle que, pour tout $x\in \mathrm{M}$,

$$\left|\mathrm{D}_r\left(\frac{1}{\|g_s x\|}\frac{\partial^l}{\partial s^l}\|g_s x\|\right)\right|\leqq \mathrm{C}\, w^l,$$

or, avec les notations de ce lemme,

$$\frac{1}{\|g_s x\|}\frac{\partial^l}{\partial s^l}\|g_s x\|=\frac{\sum_{i=1}^{d} g_{si}^{(l)}(x)}{\sum_{k=1}^{d} g_{sk}(x)}$$
$$=\sum_{i=1}^{d}\left\{\sum_{j=1}^{m}\frac{(e^{c_{ij}(s)})^{(l)}}{e^{c_{ij}(s)}}\frac{a_{ij}(s)\,x_j}{\sum_{k=1}^{d} g_{sk}(x)}+\frac{(e^{c_{id}(s)})^{(l)}}{e^{c_{id}(s)}}\frac{a_{id}(s)}{\sum_{k=1}^{d} g_{sk}(x)}\right\}$$

et l'on conclut de façon analogue.

PROPOSITION 3.4. — $\bar{\sigma}_{\cdot}\in\mathscr{C}^k(\mathrm{I},\mathscr{C}^\infty)$.

Démonstration. — Elle est similaire à celle de la proposition 3.3.
On a, pour $s\in\mathrm{I}$, $s+t\in\mathrm{I}$, $t\neq 0$, $l=1\ldots k+1$ et $r\in\mathbb{N}^m$,

$$\left|\frac{1}{t}\left[\mathrm{D}_r\frac{\partial^{l-1}}{\partial s^{l-1}}\log\|g_{s+t}x\|-\mathrm{D}_r\frac{\partial^{l-1}}{\partial s^{l-1}}\log\|g_s x\|\right]-\mathrm{D}_r\frac{\partial^l}{\partial s^l}\log\|g_s x\|\right|$$
$$\leqq\left|\frac{t}{2}\right|\sup\left\{\left|\frac{\partial^{l+1}}{\partial s^{l+1}}\mathrm{D}_r\log\|g_{s+u}x\|\right|,:|u|\leqq|t|\right\}\leqq\frac{|t|}{2}\mathrm{C}_r\, w^{l+1},$$

soit après intégration

$$\sup\left\{\left|\mathrm{D}_r\left\{\frac{1}{t}[\bar{\sigma}_{s+t}^{(l-1)}-\bar{\sigma}_s^{(l-1)}]-\bar{\sigma}_s^{(l)}\right\}(x)\right|:x\in\mathrm{M}\right\}\leqq\frac{|t|}{2}\mathrm{C}_r\int w^{(l+1)}\,dp$$

où l'on a posé, pour $l=0,\ldots,k+2$,

$$\bar{\sigma}_s^{(l)}(x)=\int\frac{\partial^l}{\partial s^l}\log\|g_s x\|\,dp,$$

il en résulte que $\bar{\sigma}_{\cdot}$ est $k+1$ fois dérivable de I dans $\mathscr{C}^\infty$.

RÉFÉRENCES

[1] Ph. BOUGEROL et J. LACROIX, Products of Random Matrices with Applications to Schrödinger Operators. *Prog. Prob. Stat.*, vol. **8**, 1985, Birkhäuser.

[2] H. FURSTENBERG, Non-commuting Random Products, *Trans. Am. Math. Soc.*, vol. **108**, 1963, p. 377-428.

[3] H. FURSTENBERG et Y. KIFER, Random Matrix Products and Measures on Projective Spaces, *Israel J. Math.*, vol. **10**, 1983, p. 12-32.

[4] H. HENNION, Loi des grands nombres et perturbations pour des produits réductibles de matrices aléatoires, *Zeit. Wahr. verw.*, Geb, vol. **67**, 1984, p. 265-278.

[5] F. LEDRAPPIER, Quelques propriétés des exposants caractéristiques, École d'Été de Saint-Flour, 12, 1982, *Lect. Notes Math.*, n° **1097**, Springer-Verlag.

[6] E. LE PAGE, Théorèmes limites pour les produits de matrices aléatoires. *Probability measures on groups, Lect. Notes Math.*, n° **928**, 1982, p. 258-303, Springer-Verlag.

[7] E. LE PAGE, Régularité du plus grand exposant caractéristique des produits de matrices aléatoires indépendantes et applications, *Ann. Inst. Henri-Poincaré*, vol. **25**, n° 2, 1989, p. 109-142.

[8] E. LE PAGE, Théorème de renouvellement pour les produits des matrices aléatoires, Séminaire de Rennes, 1983.

[9] F. NORMAN, Markov Processes and Learning Models, Academic Press, New York, 1972.

[10] D. RUELLE, Analyticity Properties of the Characteristic Exponents of Random Matrix Products, *Adv. Math.*, vol. **32**, 1979, p. 68-80.

[11] E. SENETA, Non-negative Matrices and Markov Chains, 2nd ed., Springer-Verlag.

(*Manuscrit reçu le* 18 *janvier* 1990;
corrigé le 11 *mai* 1990.)